

# 从李模型看 Slac 口袋模型

岳宗五

汤拒非

(中国科学院高能物理研究所)

(中国科学院研究生院)

## 提 要

本文用 Slac 方法<sup>[1]</sup>处理了李模型<sup>[2]</sup>,结果表明,对应于李模型中单粒子和双粒子束缚态的精确解都有一个口袋模型解.后者与前者的差别,在能量上主要是将耦合常数由  $g$  修正为  $g/\sqrt{e}$ .就波场而言,“口袋”的形式能够与  $\theta$  粒子场的精确解相对应.但对于费米粒子  $(N, V)$  的场,则与精确解差别较大,出现了  $\delta$ -函数形式的束缚.我们认为 Bardeen、Rafelski 等人所说的夸克的“表皮束缚”(Skin confinement)<sup>[1-3]</sup>是与这里用相干态近似求得的单粒子态中的  $\delta$  函数型束缚相对应的,因而它可能并不代表量子场论方程式精确解的物理图象.

## 一、序 言

从 Weisskopf<sup>[4]</sup> 等人提出口袋模型(M. I. T. 口袋)以来, Creutz<sup>[5]</sup> 首先指出 M. I. T. 口袋的许多性质有可能在量子场论的基础上获得实现. Bardeen 等人更进一步提出了 Slac 口袋模型的理论,这些理论都引用了自发破缺的拉氏量作为出发点,但 Rafelski<sup>[3]</sup> 证明,对于非自发破缺的场,同样可以有口袋出现.如果这些理论的分析都是正确的,则人们不仅从这里获得了强子结构的图象,而且对于强相互作用的处理方法有了一个明显的进步.可惜这些方法包含了各种近似,而这些近似的可靠性仍有待证明.正是从这点出发,我们选取 Lee 模型试图对 Slac 方法进行较严格的检验.这种检验的优点在于,无论是 Lee 模型的 Shrödinger 方程或其在 Slac 方法下的变分方程,都可以严格地解出.因而在比较它们的结果时,结论是明确的.本文第二、三、四节讨论用 Slac 方法对单粒子态(即  $\|V\rangle$  态)的处理,这里用的是坐标表示;在第五节中讨论用 Slac 方法对双粒子态(即  $\|V, N\rangle$  态)的处理,这里用的是动量表示.在两种情况下,我们都得到了变分方程式的精确解.在第六节中对上述结果进行了讨论.

## 二、Slac 方法与李模型

在 Lee 模型中,为了消除鬼态,我们采用有截断因子的哈氏量<sup>[2]</sup>.

$$H = H_0 + H_I \quad (1)$$

$$H_0 = m_V \int \phi_V^\dagger \phi_V d\tau + m_N \int \phi_N^\dagger \phi_N d\tau + \frac{1}{2} \int [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2] d\tau$$

$$H_I = g \int d\tau [\phi_V^\dagger \phi_N \tilde{A} + \phi_N^\dagger \phi_V \tilde{A}^\dagger]$$

式中  $m_V$  是未经重整化的 V 粒子的质量,  $\mu$  和  $m_N$  分别是  $\theta$  粒子和 N 粒子的质量;  $g$  是耦合常数,  $\phi_V$ 、 $\phi_N$ 、 $\phi$  分别是 V、N、 $\theta$  粒子的场算符, 上述表式是在坐标表象中写出, 因而  $d\tau$  代表体积元.  $\tilde{A}$  的定义如下, 令

$$\phi = A + A^\dagger, \quad (2)$$

式中

$$A = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}Q}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{\sqrt{Q}}{(2\pi)^3} \int d^3K \frac{a_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}},$$

$$A^\dagger = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}Q}} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{\sqrt{Q}}{(2\pi)^3} \int d^3K \frac{a_{\mathbf{K}}^\dagger e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}},$$

$a^+$ 、 $a$  是产生算符和消灭算符,  $Q$  是归一化体积, 则  $\tilde{A}$ 、 $\tilde{A}^\dagger$  的形式为

$$\tilde{A} \equiv \int d\tau' A(\tau') v(\tau - \tau'), \quad (3)$$

$$\tilde{A}^\dagger \equiv \int d\tau' A^\dagger(\tau') v^*(\tau - \tau'),$$

$$v(\tau) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3K T_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}},$$

式中  $T_{\mathbf{K}}$  是截断因子, 而  $v(\tau)$  就是它在坐标空间中的表示.

由于在 Lee 模型中存在两个守恒量

$$\mathfrak{N}_1 = \int d^3p V^\dagger(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}) + \int d^3p N^\dagger(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}), \quad (4)$$

$$\mathfrak{N}_2 = \int d^3p V^\dagger(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}) + \int d^3p a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}), \quad (5)$$

因而它的 Schrödinger 方程式的精确解可以较容易地求得. 对于单粒子态而言, 它们是<sup>[8]</sup>:

$$\begin{cases} \|\theta\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \\ E_\theta = \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{K^2 + \mu^2} \end{cases} \quad (a_{\mathbf{k}}^\dagger \text{ 是 } \theta \text{ 粒子的产生算符}), \quad (6)$$

$$\begin{cases} \|N\rangle = N^\dagger |0\rangle \\ E_N = m_N \end{cases} \quad (N^\dagger \text{ 是 N 粒子的产生算符}). \quad (7)$$

$$\begin{cases} \|V\rangle = Z_2^{\frac{1}{2}} \left[ \int d\mathbf{p} v(\mathbf{p}) [V^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle + \int d\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) N^\dagger(\mathbf{p} - \mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \right] \\ E_V = m_V + \delta m_V \end{cases} \quad (V^\dagger \text{ 是 V 粒子的产生算符}). \quad (8)$$

(8) 式中的  $\Phi(\mathbf{k})$  和  $\delta m$ 、 $Z_2$  分别为:

$$\begin{cases} \Phi(K) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} P \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K(E_V - m_N - \omega_K)}} \\ \delta m = \frac{g^2}{(2\pi)^3} P \int \frac{T_K^2}{2\omega_K(E_V - m_N - \omega_K)} d^3K \\ Z_2^{-1} = 1 + \frac{g^2}{(2\pi)^3} P \int d^3K \frac{T_K^2}{2\omega_K(E_V - m_N - \omega_K)^2}. \end{cases} \quad (P \text{ 表示主值}) \quad (9)$$

(6)、(7) 属于平凡解, 因而无需多加讨论. 我们主要用 Slac 方法求得和 (9) 式相对应的口袋模型解, 以下是这一处理过程的概要.

首先对物理的  $V$  粒子我们采用如下形式的试探态矢

$$|S_1\rangle = Z_V^{1/2} V_1^+ |0\rangle + Z_N^{1/2} N_1^+ D(\alpha_K) |0\rangle, \quad (10)$$

式中  $Z_V$ 、 $Z_N$  是归一化常数,  $D(\alpha_K)$  的定义<sup>[6]</sup>为

$$D(\alpha_K) = \exp - i \left[ \sum_K (\alpha_K a^+(K) - \alpha_K^* a(K)) \right], \quad (\alpha_K \text{ 是 } c \text{ 数}) \quad (11)$$

它作用在真空态上产生了  $\theta$  粒子的相干态. 另外,  $D(\alpha_K)$  还具有如下的性质:

$$\begin{aligned} \langle 0 | D^+(\alpha_K) a_K D(\alpha_K) | 0 \rangle &= \alpha_K \\ \langle 0 | D^+(\alpha_K) a_K^* D(\alpha_K) | 0 \rangle &= \alpha_K^*, \end{aligned} \quad (12)$$

由此得出

$$\langle 0 | D^+(\alpha_K) \varphi(x) D(\alpha_K) | 0 \rangle = f(x), \quad (13)$$

$f(x)$  是在算子  $\varphi(x)$  中用  $\alpha$  代替  $a$  算子, 用  $\alpha^*$  代替  $a^+$  算子所得到的函数. 考虑到  $\varphi$  是实标量场, 因而  $f$  是实函数. 且有

$$\begin{aligned} \langle 0 | D^+(\alpha_K) \pi(x) D(\alpha_K) | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | D^+(\alpha_K) A^+(x) D(\alpha_K) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} f, \\ \langle 0 | D^+(\alpha_K) A(x) D(\alpha_K) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} f. \end{aligned} \quad (14)$$

由 (13) 式得出

$$\begin{aligned} \alpha_K &= \sqrt{\frac{\omega_K}{2Q}} \int d^3K e^{-iK \cdot x} f(x), \\ \alpha_K^* &= \sqrt{\frac{\omega_K}{2Q}} \int d^3K e^{iK \cdot x} f(x). \end{aligned} \quad (15)$$

用  $N$  代表相干态中  $\theta$  粒子数的平均值, 则

$$N = \sum_K \alpha_K^* \alpha_K = \frac{1}{2} \int d^3x f(x) \int d^3x' f(x') D(x - x'), \quad (16)$$

式中

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3K \omega_K e^{-iK \cdot (x - x')}.$$

对于  $\psi_V$  和  $\psi_N$  场, Bardeen 等人的方法是将它们各用一组正交完备函数系展开, 这些函数并不事先指定, 而是通过变分方程加以确定的. 为此, 我们令  $\chi_V$ 、 $\chi_N$  分别表示  $\psi_V$ 、 $\psi_N$  的展开式中正交完备函数系中的函数. 由于所讨论的问题限于基态,  $\chi_V(\tau)$ 、 $\chi_N(\tau)$

就只取基态波函数(坐标表象)。而试探态矢  $|S_1\rangle$  中的产生算子  $V_1^+$ 、 $N_1^+$  分别是对应于基态待定波函数  $\chi_V$ 、 $\chi_N$  的(注意不同于  $V_1^+$ 、 $N_1^+$ )。将哈氏量对试探函数(基态)求期望值,我们得出

$$E = \langle S_1 | H | S_1 \rangle = Z_V m_V \int d^3\tau \chi_V^\dagger \chi_V + Z_N m_N \int d^3\tau \chi_N^\dagger \chi_N + \frac{1}{2} Z_N \int d^3\tau [(\nabla f)^2 + \mu^2 f^2] \\ + \frac{1}{2} g (Z_V Z_N)^{1/2} e^{-\frac{N}{2}} \left[ \int d^3\tau (\chi_N^\dagger \chi_N + \chi_N^\dagger \chi_V) \int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau') \right]. \quad (17)$$

式中  $N$  的定义见(16)式,  $\tau$  表示粒子的空间坐标。

在对(17)式变分之前,还应当考虑拘束条件,现在的拘束条件是

$$\int \chi_V^\dagger \chi_V d^3\tau = 1, \quad (18)$$

$$\int \chi_N^\dagger \chi_N d^3\tau = 1, \quad (19)$$

$$N \equiv \frac{1}{2} \int f(x) d^3x \int d^3x' f(x') D(x - x') = 1. \quad (20)$$

还有一个归一化条件

$$Z_V + Z_N = 1. \quad (21)$$

上述四个条件给出  $\langle S_1 | \mathfrak{R}_1 | S_1 \rangle = 1$ , 这是与精确解  $\|V\rangle$  态的量子数相符合的。当然,  $|S_1\rangle$  显然也是  $\mathfrak{R}_1$  的本征值为 1 的本征态,但它不是  $\mathfrak{R}_2$  的本征态,这是不同于  $\|V\rangle$  的。

由此我们得到变分的泛函为

$$I = Z_V m_V \int \chi_V^\dagger \chi_V d^3\tau + Z_N m_N \int \chi_N^\dagger \chi_N d^3\tau + \frac{Z_N}{2} \int d^3\tau [(\nabla f)^2 + \mu^2 f^2] \\ + \frac{1}{2} g (Z_V Z_N)^{1/2} e^{-\frac{N}{2}} \int d^3\tau (\chi_V^\dagger \chi_N + \chi_N^\dagger \chi_V) \int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau') \\ + \lambda_1 \int \chi_V^\dagger \chi_V d^3\tau + \lambda_2 \int \chi_N^\dagger \chi_N d^3\tau + \frac{\lambda_3}{4} \int d^3\tau f(\tau) \int d^3\tau' f(\tau') D(\tau - \tau'). \quad (22)$$

自然,对于试探函数还可以有其他的选择,例如,可以选

$$|S_1\rangle = \{Z_V^{1/2} V_1^+ + Z_N^{1/2} N_1^+\} D(\alpha_K) |0\rangle \quad (10')$$

但这样的试探函数所得结果与(10)式结果相似,因而无需多加叙述。

### 三、单粒子态的变分方程及其解

把方程式(22)中的泛函  $I$  对  $\chi_V^\dagger$ 、 $\chi_N^\dagger$  和  $f$  变分求极值,得到如下的方程式组

$$(Z_V m_V + \lambda_1) \chi_V + \tilde{g} \chi_N \int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau') = 0, \quad (23)$$

$$(Z_N m_N + \lambda_2) \chi_N + \tilde{g} \chi_V \int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau') = 0, \quad (24)$$

$$Z_N [\nabla^2 f - \mu^2 f] - \tilde{g} \int d^3\tau' (\chi_V^\dagger \chi_N + \chi_N^\dagger \chi_V) v(\tau - \tau')$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \{ \lambda_3 + \tilde{g} \int d^3\tau (\chi_V^\dagger \chi_N + \chi_N^\dagger \chi_V) \int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau') \} \\
 & \times \int d^3\tau' f(\tau') D(\tau - \tau') = 0, \quad (25)
 \end{aligned}$$

式中

$$\tilde{g} = \frac{1}{2} (Z_V Z_N)^{1/2} g e^{-N/2}.$$

将 (23) 代入 (24) 中我们得到

$$\chi_N ((Z_V m_V + \lambda_1)(Z_N m_N + \lambda_2) - \tilde{g}^2 (\int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau'))^2) = 0. \quad (26)$$

这表明  $\chi_N$  是个  $\delta$  函数:

$$\chi_N = F \delta[(Z_V m_V + \lambda_1)(Z_N m_N + \lambda_2) - \tilde{g}^2 (\int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau'))^2], \quad (27)$$

常数  $F$  由  $\chi_N$  的归一化条件决定

$$\int \chi_N^\dagger \chi_N d^3\tau = 1,$$

即

$$F^2 \int [\delta\{(Z_V m_V + \lambda_1)(Z_N m_N + \lambda_2) - \tilde{g}^2 (\int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau'))^2\}]^2 d^3\tau = 1. \quad (28)$$

令

$$G(r) = \tilde{g}^2 (\int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau'))^2,$$

并假定  $G(r)$  只是向径  $r$  的函数而与方位角无关, 则

$$dG = G'(r) dr \quad [G'(r) = dG/dr]$$

或

$$dr = \frac{1}{G'(r)} dG. \quad (29)$$

将 (29) 式代入 (28) 式积分, 可得

$$F^2 \delta(0) \frac{4\pi r_0^2}{G'(r_0)} = 1, \quad (30)$$

式中  $r_0$  是满足下式的半径

$$G(r_0) = (Z_V m_V + \lambda_1)(Z_N m_N + \lambda_2). \quad (31)$$

其次用  $\int \chi_V^\dagger \chi_V d^3\tau = 1$  的条件得出

$$Z_V m_V + \lambda_1 = Z_N m_N + \lambda_2, \quad (32)$$

而且

$$\chi_V = -\chi_N, \quad (33)$$

可见  $V$  粒子波函数  $\chi_V$  也是  $\delta$  函数型的.

根据上面解出的  $\chi_V$ 、 $\chi_N$ , 可以把 (25) 式的第二项对  $d\tau'$  的积分变为:

$$\tilde{g} \int d^3\tau' (\chi_V^\dagger \chi_N + \chi_N^\dagger \chi_V) v(\tau - \tau') = -2\tilde{g} \int d^3p \frac{T_p \sin r_0 |p|}{r_0 |p|} \frac{e^{ip \cdot \tau}}{(2\pi)^3}. \quad (34)$$

又令

$$c = \tilde{g} \int d^3\tau (\chi_V^\dagger \chi_N + \chi_N^\dagger \chi_V) \int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau'), \quad f = \int e^{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}} \phi(\mathbf{p}) d^3p,$$

代入(25)式乃得到

$$Z_N \int \omega_p^2 \phi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}} d^3p = \frac{1}{2} (\lambda_3 + c) \int d^3p \omega_p \phi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}} + \frac{2\tilde{g}}{(2\pi)^3} \int d^3p T_p e^{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\tau}} \frac{\sin r_0 |\mathbf{p}|}{r_0 |\mathbf{p}|}, \quad (35)$$

由上式得出  $\phi(\mathbf{p})$  的解为

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{-2\tilde{g}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{Z_N} \frac{\Gamma_p T_p}{\omega_p (\omega_0 - \omega_p)}, \quad (36)$$

式中

$$\Gamma_p = \frac{\sin r_0 |\mathbf{p}|}{r_0 |\mathbf{p}|}, \quad Z_N \omega_0 = \frac{1}{2} (\lambda_3 + c).$$

现在可以把  $Z_N$ 、 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $c$  用  $\phi$  表示出来, 由  $\sum_K \alpha_K^* \alpha_K = 1$  得:

$$\frac{(2\tilde{g})^2}{(2\pi)^3} \int d^3K \frac{(\Gamma_K T_K)^2}{2\omega_K (\omega_0 - \omega_K)^2} = Z_N^2 \quad (\text{积分取主值}), \quad (37)$$

由

$$\tilde{g}^2 \left( \int d\tau' f(\tau') v(\tau - \tau') \right)^2 = (Z_N m_N + \lambda_2)^2$$

得

$$\frac{(2\tilde{g})^2}{(2\pi)^3} \int d^3K \frac{(\Gamma_K T_K)^2}{2\omega_K (\omega_0 - \omega_K)} = -Z_N (Z_N m_N + \lambda_2) \quad (\text{积分取主值}), \quad (38)$$

(37)、(38) 两式乃把  $Z_N$ 、 $\lambda_2$  表为  $r_0$ 、 $\omega_0$  的函数。

将(23)、(24)两式分别乘以  $\chi_V^\dagger$ 、 $\chi_N^\dagger$  并积分再相加, 得

$$\tilde{g} \int d^3\tau (\chi_V^\dagger \chi_N^\dagger + \chi_N^\dagger \chi_V) \int d^3\tau' f(\tau') v(\tau - \tau') = -2(Z_N m_N + \lambda_2),$$

即

$$c = -2(Z_N m_N + \lambda_2), \quad (39)$$

这样,  $c$  也可以表为  $\omega_0$ 、 $r_0$  的函数。

#### 四、单粒子态的能量与口袋

为了进一步求出能量  $E$  以及  $r_0$ 、 $\omega_0$ 、 $\lambda_3$ 、 $Z_V$  等常数, 令

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \int [(\nabla f)^2 + \mu^2 f^2] d^3\tau,$$

并将(25)式乘以  $\frac{1}{2} f$  再积分得

$$Z_N \bar{\omega} = \frac{1}{2} \lambda_3. \quad (40)$$

由此得

$$E = m_V Z_V + m_N Z_N + Z_N \omega_0 + \frac{1}{2} c. \quad (41)$$

根据 (37)、(38)、(39)、(40) 可以看出, 现在独立的变量是  $r_0$ 、 $\omega_0$ , 而  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $c$ 、 $E$ 、 $\tilde{g}$ 、 $Z_N$ 、 $Z_V$ 、 $\bar{\omega}$ 、 $\lambda_3$  都是它们的函数. 为了求得  $E$  的极小值, 应使

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_0} = 0,$$

由此得

$$Z_N + (m_N + \omega_0 - m_V) \frac{\partial Z_N}{\partial \omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial \omega_0} = 0. \quad (42)$$

将 (38) 微分得

$$c Z_N \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \omega_0} - Z_N^2 \tilde{g} = \frac{Z_N}{2} \tilde{g} \frac{\partial c}{\partial \omega_0} + \frac{c}{2} \tilde{g} \frac{\partial Z_N}{\partial \omega_0}. \quad (43)$$

又根据  $\tilde{g}$  的定义有

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \omega_0} = \frac{1}{2} \tilde{g} \left[ \frac{1}{Z_N} - \frac{1}{Z_V} \right] \frac{\partial Z_N}{\partial \omega_0},$$

代入 (43) 式得

$$\frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial \omega_0} = - Z_N - \frac{c}{2 Z_V} \frac{\partial Z_N}{\partial \omega_0}. \quad (44)$$

将 (42)、(44) 两式联立得

$$\left( m_N + \omega_0 - m_V - \frac{c}{2 Z_V} \right) \frac{\partial Z_N}{\partial \omega_0} = 0, \quad (45)$$

以致

$$\omega_0 = m_V - m_N + \frac{c}{2 Z_V}, \quad (46)$$

因而

$$E = \omega_0 + m_N. \quad (47)$$

将上述结果代入 (38) 式, 我们得到

$$\omega_0 + m_N - m_V = \frac{g^2}{e} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 K \frac{(\Gamma_K T_K)^2}{2\omega_K(\omega_0 - \omega_K)} \quad (\text{积分取主值}), \quad (48)$$

$$E - m_V = \frac{g^2}{e} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 K \frac{(\Gamma_K T_K)^2}{2\omega_K(E - m_N - \omega_K)} \quad (\text{积分取主值}). \quad (49)$$

又由 (37) 式得

$$\frac{1}{Z_V} = 1 + \frac{g^2}{e} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 K \frac{(\Gamma_K T_K)^2}{2\omega_K(E - m_N - \omega_K)^2} \quad (\text{积分取主值}). \quad (50)$$

由 (49) 式可以看出 (参考 S. S. Sweber p. 357), 当  $r_0 \rightarrow 0$  时  $\Gamma_K \rightarrow 1$ . 这时  $E$  的值为极小, (49)、(50) 两式的结果除了在耦合常数上有如下的修正

$$g \rightarrow \frac{g}{\sqrt{e}}$$

而外,其它与(9)式完全相同.这也表明,按照口袋模型,在单粒子的束缚态  $|S_1\rangle$  中,  $N$  粒子和  $V$  粒子都将被约束在  $r_0 = 0$  的一点上.这和 Bardeen 等人所讨论的表皮约束现象极为一致.当然这时的口袋半径并没有收缩到 0, 我们可以在坐标空间中求出口袋的形式:

$$f(\mathbf{r}) = \int d^3K e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \phi(K) \\ = \frac{4\pi g}{e} \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{Z_V}{Z_N}} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{K_{\max}} \frac{\sin K|r|}{(\omega_0 - \omega_K)\omega_K} K dK \quad (K \text{ 是 } \mathbf{K} \text{ 的绝对值}). \quad (51)$$

当  $r > 0$  时,有

$$f \sim -\frac{g}{2\pi e} \sqrt{\frac{Z_V}{Z_N}} \cdot \frac{1}{r} \cos(r\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}) \quad (\text{假定 } K_{\max} \text{ 很大}); \quad (52)$$

而当  $r = 0$  时

$$f = \frac{4\pi g}{e} \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{Z_V}{Z_N}} P \int_{\mu}^{K_{\max}} \frac{d\omega_K}{\omega_0 - \omega_K} \sqrt{\omega_K^2 - \mu^2}, \quad (53)$$

这是一个有限值 ( $P$  代表积分主值,  $e$  是常数). 因此,  $f(\mathbf{r})$  在空间中的分布具有如图 1 的形式.

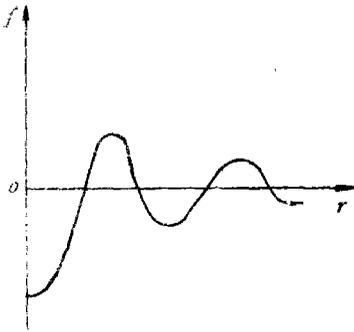


图 1  $f$  的空间分布

最后,着重谈谈  $V$ 、 $N$  粒子波函数的特征.在精确解(8)中,我们看到:当  $|V\rangle$  同时也是总动量算子的本征态时,应有  $v(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P})$ . 这表示  $V$ 、 $N$  粒子的精确解波函数在动量表示中都是正比于  $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P})$  的,因而在座标表示中是个平面波 ( $\sim e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}}$ ). 可是,对于用相干态试探态矢(10)近似求得的  $|S_1\rangle$  态,  $V$ 、 $N$  粒子波函数在坐标表示中却是  $\delta$  函数型的. 这两者有很大的差异.在 Bardeen、Rafelski 等人求得的夸克波函数中出现的“表皮束缚”现象,是与这里的  $\delta$  函数型

束缚相对应的.因为,如果在他们变分所得方程组中略去费米子动能项(含微分算子项),就会得到与本文中(23)、(24)、(25)式完全相似的数学方程组.并且他们考虑的也都只是单粒子态波函数.

至于为什么  $\theta$  粒子用 Slac 方法求得的近似波函数  $f(\mathbf{r})$  与量子精确解相近,而  $V$ 、 $N$  粒子的则相差很大,这可以从把动量表示下单粒子态  $|V\rangle$  的波函数  $v(\mathbf{p})$ 、 $\phi(\mathbf{k})$  所满足的方程组与 Slac 方法近似解所满足的方程组相比较而得到一定的理解.  $\theta$  粒子近似波函数满足的方程很类似于其精确解所满足的方程,而  $V$ 、 $N$  粒子则不然.

## 五、双粒子态 $|V, N\rangle$

由于李模型中的费米子是非相对论性的粒子,因而 Slac 方法中所用的 Bogoliubov<sup>[1]</sup> 变换在这里是不必要的.我们可以把包含在  $H$  中的  $\psi_V$ 、 $\psi_N$  等场用通常的平面波展开,而把待定的函数  $\chi_V$ 、 $\chi_N$  等转移到试探函数中去,在单粒子的情况下,这样做得到了与前一节

中完全相同的结果。对于双粒子态,我们也可以采用这一办法,这将使计算简化。

为了实现上述过程,最好先将哈氏量变到动量空间中的表示<sup>[7]</sup>:

$$H = m_V \int V^+(\mathbf{p}_V) V(\mathbf{p}_V) d^3 p_V + m_N \int N^+(\mathbf{p}_N) N(\mathbf{p}_N) d^3 p_N + \int \omega_K a_{\mathbf{K}}^\dagger a_{\mathbf{K}} d^3 K \\ + \lambda_0 \int d^3 K d^3 p_V \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \{V^+(\mathbf{p}_V) N(\mathbf{p}_V - \mathbf{K}) a_{\mathbf{K}} + N^+(\mathbf{p}_V - \mathbf{K}) a_{\mathbf{K}}^\dagger V(\mathbf{p}_V)\}, \quad (54)$$

式中  $\lambda_0 = g/(2\pi)^{3/2}$ ,  $V^+(\mathbf{p})$ 、 $N^+(\mathbf{p})$  分别代表与平面波相联系的产生算符。于是我们可以采用如下形式的试探态矢作为  $\|VN\rangle$  态的近似解:

$$|S_2\rangle = \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \Phi^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) V^+(\mathbf{p}) N^+(\mathbf{q}) |0\rangle \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \Phi^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) N^+(\mathbf{p}) N^+(\mathbf{q}) D(\alpha_K) |0\rangle, \quad (55)$$

式中  $\Phi^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 、 $\Phi^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  是待定的试探函数。归一化的要求为

$$\langle S_2 | S_2 \rangle = \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} |\Phi^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 + \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} |\Phi^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 = Z_V + Z_N = 1. \quad (56)$$

其中  $Z_V$ 、 $Z_N$  按其左边的对应项来定义。显然  $|S_2\rangle$  是算子  $\mathfrak{N}_1$  (本征值  $n_1 = 2$ ) 的本征态,但它不是  $\mathfrak{N}_2$  的本征态。为了与精确解  $\|VN\rangle$  的  $\mathfrak{N}_2$  本征值等于 1 相对应,我们进一步要求  $|S_2\rangle$  满足

$$\langle S_2 | \mathfrak{N}_2 | S_2 \rangle = Z_V + Z_N Z_\theta = 1, \quad (57)$$

式中  $Z_\theta = \int d\mathbf{k} |\alpha_K|^2$ , 由于 (56), 上式等价于

$$Z_\theta = 1. \quad (57')$$

系统的能量期待值为

$$E_{S_2} = \langle S_2 | H | S_2 \rangle \\ = (m_V + m_N) Z_V + 2m_N Z_N + Z_N Z_\theta \omega_0 + \sqrt{2} A (\Theta + \Theta^*), \quad (58)$$

式中

$$\omega_0 = \int d\mathbf{k} \omega_K |\alpha_K|^2 / Z_\theta, \\ \Theta = \lambda_0 \int d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{q} \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} [\Phi^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})^* \Phi^{(2)}(\mathbf{p} - \mathbf{K}, \mathbf{q}) \alpha_K], \quad (59) \\ A = \langle 0 | D(\alpha_K) | 0 \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2} Z_\theta\right\} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

当把  $E_{S_2}$  就  $\Phi^{(1)*}$ 、 $\Phi^{(2)*}$  进行变分时要受到两个约束 (56)、(57), 所以应当引入两个不定乘子  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ , 于是变分的泛函就是

$$I = E_{S_2} + \lambda_1 (Z_V + Z_N) + \lambda_2 Z_\theta \\ = (m_V + m_N + \lambda_1) Z_V + (\lambda_1 + 2m_N) Z_N + Z_N Z_\theta \omega_0 + \lambda_2 Z_\theta + \sqrt{2} A (\Theta + \Theta^*). \quad (60)$$

这样可得到决定  $\Phi^{(1)}$ 、 $\Phi^{(2)}$  的积分方程组

$$(m_N + m_V + \lambda_1)\Phi^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \sqrt{2} A \lambda_0 \int d\mathbf{K} \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \Phi^{(02)}(\mathbf{p} - \mathbf{K}, \mathbf{q}) \alpha_K = 0, \quad (61)$$

$$(2m_N + Z_\theta \omega_0 + \lambda_1)\Phi^{(02)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \sqrt{2} A \lambda_0 \int d\mathbf{K} \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \Phi^{(11)}(\mathbf{p} + \mathbf{K}, \mathbf{q}) \alpha_K^* = 0, \quad (62)$$

$$\left[ Z_N \omega_K + \lambda_2 - \sqrt{2} A \cdot \frac{1}{2} (\Theta + \Theta^*) \right] \alpha_K + \sqrt{2} A \lambda_0 \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \Phi^{(02)*}(\mathbf{p} - \mathbf{K}, \mathbf{q}) \Phi^{(11)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0. \quad (63)$$

分别以  $\Phi^{(11)*}$ 、 $\Phi^{(02)*}$ 、 $\alpha_K^*$  乘上三式, 积分, 得到

$$(m_V + m_N + \lambda_1)Z_V + \sqrt{2} A \Theta = 0, \quad (64)$$

$$(2m_N + Z_\theta \omega_0 + \lambda_1)Z_N + \sqrt{2} A \Theta^* = 0, \quad (65)$$

$$[Z_N \omega_0 + \lambda_2 - \sqrt{2} A \cdot \frac{1}{2} (\Theta + \Theta^*)] Z_\theta + \sqrt{2} A \Theta^* = 0. \quad (66)$$

由 (64)、(65) 解出  $\sqrt{2} A (\Theta + \Theta^*)$  代入 (58), 得到

$$E_{S_2} = -\lambda_1 = m_V + m_N + \sqrt{2} \frac{A}{Z_V} \Theta = 2m_N + \omega_0 + \sqrt{2} \frac{A}{Z_N} \Theta. \quad (67)$$

于是我们知道  $\lambda_1$  是实数, 进而知道 (根据 (64) 式)  $\Theta$  也是实的. 这样由 (66) 知  $\lambda_2 = -Z_N \omega_0$ , 从而由 (67) 有

$$\lambda_2 - \sqrt{2} A \Theta = Z_N (2m_N - E_{S_2}). \quad (68)$$

利用 (67)、(68)、(57) 消去  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ , 可以把积分方程组 (61)、(62)、(63) 写成更为简洁的形式:

$$(m_V + m_N - E_{S_2})\Phi^{(11)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \sqrt{2} A \lambda_0 \int d\mathbf{K} \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \Phi^{(02)}(\mathbf{p} - \mathbf{K}, \mathbf{q}) \alpha_K = 0, \quad (69)$$

$$(2m_N + \omega_0 - E_{S_2})\Phi^{(02)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \sqrt{2} A \lambda_0 \int d\mathbf{K} \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \Phi^{(11)}(\mathbf{p} + \mathbf{K}, \mathbf{q}) \alpha_K^* = 0, \quad (70)$$

$$Z_N (\omega_K + 2m_N - E_{S_2}) \alpha_K + \sqrt{2} A \lambda_0 \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \Phi^{(02)*}(\mathbf{p} - \mathbf{K}, \mathbf{q}) \Phi^{(11)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0. \quad (71)$$

不难看出上述方程组的解应具有如下的形式:

$$\frac{\Phi^{(11)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{Z_V^{1/2}} = \frac{\Phi^{(02)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{Z_N^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} \left\{ \frac{e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} - e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_1)}}{2} \right\}. \quad (72)$$

解 (72) 满足  $\Phi^{(02)}$  为反对称的要求 (即  $\Phi^{(02)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -\Phi^{(02)}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ ), 其中  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$  是固定值. 也容易证明当  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_2$ 、 $T_K$  只依赖于  $|\mathbf{k}|$  时  $\alpha_K$  的解为

$$\alpha_K = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{Z_V}{Z_N}} A \lambda_0 \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \cdot \frac{1}{(\omega_K + 2m_N - E_{S_2})} \cdot \frac{1}{2} (e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1} + e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_2}). \quad (73)$$

从而,  $E_{S_2}$  满足如下的超越方程

$$E_{S_2} = m_V + m_N - A^2 \left( \frac{g}{2\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{K^2 dK T_K^2 \left\{ 1 + \frac{\sin K |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| K}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\}}{\omega_K [\omega_K + 2m_N - E_{S_2}]}. \quad (74)$$

显然  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  应当理解为 V、N 粒子各在空间某一固定点的坐标。(74) 式表明当  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0$  时,  $E_{S_2}$  的值为最小, 这就是基态能量

$$E_{S_2} = m_V + m_N - 4\pi A^2 \lambda_0^2 \int \frac{K^2 T_K^2 d|K|}{\omega_K (\omega_K + 2m_N - E_{S_2})}. \quad (75)$$

在基态的情况下不仅有  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ , 而且应当有  $\mathbf{r}_1 \rightarrow 0, \mathbf{r}_2 \rightarrow 0$ , 这是因为我们可以取质心坐标系, 这时质心坐标  $\mathbf{R} = (m_V \mathbf{r}_1 + m_N \mathbf{r}_2) / (m_V + m_N) = 0$ , 这就导致当  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0$  时有  $\mathbf{r}_1 \rightarrow 0, \mathbf{r}_2 \rightarrow 0$ . 于是  $\alpha_K$  变为

$$\alpha_K = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{Z_V}{Z_N}} A \lambda_0 \frac{T_K}{\sqrt{2\omega_K}} \frac{1}{\omega_K + 2m_N - E_{S_2}}, \quad (73')$$

这个结果表明在双粒子态的基态情况下, 口袋的形式与单粒子态相似.

上述结果可以和 S. Weinberg<sup>[18]</sup> 求得精确解相比较, 他讨论了  $m_V = m_N = m$  的情况, 结果是

$$E_{S_2}^W - 2m_N = -\left( \frac{g}{2\pi} \right)^2 \int \frac{K^2 T_K^2 d|K|}{\omega_K (\omega_K + 2m_N - E_{S_2}^W)} \left[ 1 + \frac{E_{S_2}^W - 2m}{\omega_K} \right]. \quad (\text{基态}) \quad (76)$$

可见除了耦合常数的修正之外, 在积分号内还有一个因子  $\left[ 1 + \frac{E_{S_2}^W - 2m}{\omega_K} \right]$  代替了 (75) 中的因子 2.

当回到坐标表示时,  $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \Phi^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  都是关于  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  的双  $\delta$  函数, 这和精确解的结果也是有很大偏差的. 因为精确解  $|\nu N\rangle$  态可以是总动量的本征态, 以致可以分出一个反映质心运动的平面波因子, 而不必与双  $\delta$  函数相对应. 这种情形完全类似于单粒子态 V、N 粒子波函数的情形.

我们还可以从  $\alpha_K$  的解求出口袋在空间表示中的形式, 其结果和单粒子态的相同. 对于双粒子态, 由于  $\theta$  粒子近似波函数所满足的方程也是很近于精确解的, 所以用 Slac 方法求得的  $\theta$  粒子近似波函数也是很类似于精确解的.

## 六、讨 论

本文的结果表明, Slac 方法作为有相互作用的量子场系统存在束缚态的指示是有效的, 对本征值的计算能够得到类似于精确解的表式. 当然这种表式带有修正, 使它不能与精确结果完全相符. 这主要是由于在试探函数中引进了相干态, 从而失去了各粒子的动量关连, 以致虽然增加了试探函数中的参数, 但也不能完全挽回由此造成的差异. 由本文可以看出相干态造成耦合常数的修正是特别明显的, 这种修正虽然可以用改变试探函数的形式 (如采用式 (10')) 来消除, 但这种消除是表面的, 它的效应仍然在其它方面的修正中表现出来.

本文的结果还表明, Slac 方法中的口袋是有物理意义的, 无论对于单粒子态或双粒子态, 它都相当精确地表现了  $\theta$  粒子在空间分布的几率。

对于  $\psi_V, \psi_N$  场, Slac 方法导致了  $\delta$  函数形式的解, 这与精确解的差异很大。我们也注意到无论在 Bardeen 等人的文章中或 Rafelski 的文章中都出现了表皮束缚 (Skin Confinement), 这种束缚和这里的单粒子态中的  $\delta$  束缚出于同一原因, 即相干态近似的结果。由于在相干态中  $\theta$  粒子的动量是任意的, 它失去了与  $V, N$  粒子的动量关连。因而增加了试探函数中的自由度, 至少使相干态近似下的态矢不再是系统总动量的本征态了, 这必然导致  $\psi_V, \psi_N$  场的某种束缚。当然, 我们不能认为这种束缚一定是精确解所固有的。

### 参 考 文 献

- [1] W. A. Bardeen et al., *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 1094.
- [2] T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **95** (1954), 1329.
- [3] J. Rafelski, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 2358.
- [4] V. F. Weisskopf et al., *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 3471.
- [5] M. Creutz, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 2599.
- [6] K. E. Cahill, R. I. Glauber, *Phys. Rev.*, **177** (1969), 1857.
- [7] S. S. Schweber, "An introduction to Relativistic quantum field theory", New York, Harper and Row, Inc. 1961.
- [8] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **102** (1956), 258.

## THE TEST OF SLAC METHOD USING LEE MODEL

YUE ZONG-WU

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

TANG JU-FEI

(*The Graduated School of the Academia of Science of China, Peking*)

### ABSTRACT

Treating Lee Model by Slac method, we find that, to state  $||V\rangle$  of one particle and state  $||VN\rangle$  of two particles, there corresponds a solution of Slac bag type respectively. The latter bears resemblance to the former in energy especially for  $||V\rangle$  state with the replacement of the interaction constants  $g$  by  $g/\sqrt{e}$  only. In addition, the "bag" corresponds precisely to the scalar field in  $||V\rangle$  and  $||VN\rangle$  states. However, for  $\psi_N$ - and  $\psi_V$ - field, we get  $\delta$ -function type solutions by Slac method. They deviate greatly from the rigorous solutions. The "skin confinement" as stated by Bardeen et al., and Rafelski is closely related to the  $\delta$ -confinement in the one particle state found here by coherent state approximation. Thus it may not represent the physical picture in the rigorous solution of a quantum field theory.