第3卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 4
1979年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1979

标度现象与重整化群

赵树松 彭守礼 喻传赞
(中国科学院高能物理研究所) (云南大学)

摘　　要

重整化群$\mathscr{D}$算子对截断格林函数的作用性质要求存在广义 Wroblewski 关系，由此导出多重数的 Kendall 标度分布. 标度变量的形状被证明为 $N/\langle N\rangle$. 讨论了非弹性度标度分布. 分布参量表征中心区的能量相对统计起伏.

高能强子-强子碰撞产生多量强子的过程，在中心区，存在着普遍的标度现象. 标度现象的普遍性(或对称性)是很高的. 实验指出 KNO 标度[1]与二碰撞粒子的种类和能量无关(或弱依赖)[2]，与产生粒子的种类无关(或弱依赖)[3]. 标度变量 $N/\langle N\rangle$ 本身随能量与粒子种类无显著变化. 任何粒子-粒子碰撞产生的强子平均多重数 $\langle N\rangle$ 随能量的变化都服从同一规律，如对数增长律[4,5]. 粒子-粒子碰撞似乎只为多量强子的产生提供能量，强子产生机构与入射粒子种类无关[4]. 可以推断，KNO 标度的普遍性可能比现在更广泛. 亚枚举 (Semi-inclusive) 反应的单粒子纵动量和横动量的分布也以"平均"变量 $P_{\parallel}/\langle P_{\parallel}\rangle_N$，$P_{\perp}/\langle P_{\perp}\rangle_N$ 为标度变量. 动量标度分布与多重数无关，与始态能量和粒子种类无关[6]，与产生粒子种类无关[7].

由于量子场论能在多大程度上描写强子过程这个基本问题尚不清楚，对强作用标度现象的研究主要是归纳实验数据和事实. 标度变量，标度结构函数或分布函数，大多是从归纳法得到的. 由于实验误差，归纳数据的结果总是非唯一的. 目前，不同的标度假设，标度变量和标度分布，就有好多种类型. 这就很有必要从量子场论的普遍原理来讨论和选择各种归纳结果，并揭露标度现象的物理实质. 描述粒子的产生现象可以用重整化量子场论. 但是，重整化的量子场论取决于固有质量、耦合常数及重整化点，还不能描写标度现象的普遍性. 具有更高普遍性的是重整化群，它是在重整化耦合常数、格林函数及顶角函数集合中的变换群. 重整化群的固有参数改变，过程改变. 一个物理量，如果它不依赖于固有参数，就是与能量和粒子种类无关的普适常量. 倘若分布的参量正是重整化群的这种普适常量，则用重整化群就能够描写标度现象及其普遍性. 另外，量子场论通过重整化群，从数学结构上看，同处理临界现象的统计力学有密切关系[8]. 这对理解强作用标度现象，至少在统计特征上是有益的.

在这篇短文里，我们只讨论多重数和非弹性度问题.

考虑一个量子场[9]，具有N条外线的截断格林函数 $\underline{G}^{(N)}$ 满足微分方程

$$\mathscr{D}\underline{G}^{(N)}=N\gamma\underline{G}^{(N)}. \tag{1}$$

本文1977年11月10日收到.

这里 $\mathscr{D}$ 是一阶线性齐次算子，只作用于格林函数 $G^{(N)}$ 的固有参数，γ 是量子场的反常维度（anomalous dimensionality）．由 N 粒子产生截面 σ_N 同格林函数的关系有

$$\mathscr{D}\sigma_N = 2\gamma(N+2)\sigma_N. \tag{2}$$

产生 N 个粒子的能量 $E_N = \eta_N\sqrt{S}$，$\sqrt{S}$ 是质心系总能量，η_N 是相应的非弹性度．多重数分布及平均值的定义为

$$P_N = \frac{\sigma_N}{\sigma_T}, \quad \left(\sigma_T = \sum_N \sigma_N\right) \tag{3}$$

$$\langle N\rangle = \sum_N NP_N, \quad \langle\eta_N\rangle = \sum_N \eta_N P_N, \tag{4}$$

这里 σ_T 是总的非弹性反应截面．为了求出 N 及 η_N 的标度分布，首先引进卷（cumulant）的生成函数

$$\phi(u) = \ln G(u). \tag{5}$$

其中 $G(u) = \sum\limits_N e^{Nu}P_N$ 是分布 P_N 的指数型生成函数．利用 q 阶矩 $\mu_q \equiv \langle N^q\rangle$ 为 q 阶卷 $\phi^{(q)} \equiv \dfrac{\partial^q}{\partial u^q}\phi$ 之间的关系及算子 $\mathscr{D}$ 的性质能够证明（见附录）q 阶卷满足微分方程

$$\mathscr{D}\phi^{(q)} = 2\gamma\phi^{(q+1)}, \tag{6}$$

即重整化群微分算子 $\mathscr{D}$ 是多粒子分布的卷的升阶算子．这是一个很普遍的结论．满足方程（6）的递推解可写为

$$\phi^{(q)} = (q-1)!\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{q-1}(\phi')^q, \quad q = 1, 2, \cdots \text{正整数} \tag{7}$$

其中 $\phi' = \phi^{(1)}$，α 是关于算子 $\mathscr{D}$ 的积分常数

$$\mathscr{D}\alpha = 0. \tag{8}$$

即 α 是与 $\sqrt{S}$，N，η_N 无关的普适常量，不依赖于重整化群的固有参量．式（7）可称为广义 Wroblewski 关系．注意（7）式是 q 个 q 阶非线性微分方程，它们具有共同解．当 $q=1$ 时的方程为

$$\alpha\mathscr{D}\phi' = 2\gamma\phi'^2, \tag{9}$$

由这个方程解出分布的生成函数为

$$G(u) = \left[1 - \frac{u}{C_N}\right]^{-\alpha}, \tag{10}$$

可以直接验证（10）式是方程（7）或（6）的共同解．这个共同解的存在表明重整化群算子 $\mathscr{D}$ 导出的分布由二阶卷方程（9）唯一确定．式（10）中的 C_N 是一个普通积分常数，而不是关于群算子 $\mathscr{D}$ 的积分常数．下面证明普通积分常数 C_N 决定标度变量的形状．为此，注意 $\langle N\rangle = \phi'|_{u=0}$ 则方程（9）变为熟知的 Wroblewski 关系

$$\alpha\mathscr{D}\langle N\rangle = 2\gamma\langle N\rangle^2 \quad \text{或} \quad DN = \frac{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2}{\langle N\rangle^2} = \frac{1}{\alpha}, \tag{11}$$

这里 DN 表示多重数的相对统计起伏．再将（10）式代回（9）式立刻得到

$$\mathscr{D}C_N = -2\gamma. \tag{12}$$

为使 (12) 式与 Wroblewski 关系 (11) 式一致，必定有

$$C_N = \frac{\alpha}{\langle N\rangle}, \tag{13}$$

这就决定了分布变量是标度的即为 $N/\langle N\rangle$ 的形状．由生成函数 (10) 式便得到多重数的标度分布[10]

$$\langle N\rangle P_N = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{N}{\langle N\rangle}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\alpha\left(\frac{N}{\langle N\rangle}\right)\right] \tag{14}$$

这类分布即 Kendall 分布[11]．$\Gamma(\cdot)$ 是伽偶函数．

非弹性度 η_N 与 N 是同时属于整个中心区的两个量．由亚枚举产生截面的能量求和规则，对各个一定的 N 单粒子平均能量

$$\langle\varepsilon\rangle_N = \eta_N\frac{\sqrt{S}}{N}.$$

且 $\langle\varepsilon\rangle_N$ 对 N 的依赖很弱[12a]．由 (4) 式有条件方程

$$\mathscr{D}\sum_N \frac{N}{\langle N\rangle}P_N = 0 \quad \mathscr{D}\sum_N \frac{\eta_N}{\langle\eta\rangle_N}P_N = 0 \tag{15}$$

二方程相减，结合能量求和规则有下列方程

$$\langle\eta_N\rangle\mathscr{D}\langle\eta_N\rangle^{-1} - \langle N\rangle\mathscr{D}\langle N\rangle^{-1} = 0. \tag{16}$$

利用 (16) 式很易证明

$$\mathscr{D}\left(\frac{\langle\eta_N\rangle}{\langle N\rangle}\right) = 0, \tag{17}$$

即

$$\langle\eta_N\rangle = c\langle N\rangle. \tag{18}$$

这里 c 是与固有参数无关的普适常数．从 (16) 式及

$$\mathscr{D}\langle\eta_N\rangle^{-1} = -\frac{2\gamma}{c}DN. \qquad D\eta_N = DN$$

便得出非弹性度的相对统计起伏

$$D\eta_N = \frac{1}{\alpha_\eta} \quad \alpha_\eta = \alpha. \tag{19}$$

这是非弹性度的 Wroblewski 关系，其相应的微分方程为

$$\alpha_\eta\mathscr{D}\phi' = 2\gamma\phi'^2. \tag{20}$$

同理，与 (14) 式相应的非弹性度的分布也是 Kendall 分布

$$\langle\eta_N\rangle P_\eta = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\eta_N}{\langle\eta_N\rangle}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\alpha\left(\frac{\eta_N}{\langle\eta_N\rangle}\right)\right]. \tag{21}$$

从非弹性度的 Wroblewski 关系到标度分布 (21) 式的正确性，取决于线性关系 $\langle\eta_N\rangle = c\langle N\rangle$ 是否成立．实验指出 $\eta_N/N \simeq$ 常数[12b]，线性关系 $\langle\eta_N\rangle = c\langle N\rangle$ 是为实验所支持的．但是，非弹性度的 Kendall 标度分布，仍需要实验检验．由于 $\alpha_\eta = \alpha$ 非弹性度与多重数的分布是相同的(图 1)，当 $\alpha = 4.55$ 时，多重数的 Kendall 标度分布与实验数据符合 (图 2)．

在 Wroblewski 关系中普适常量 α_η 的物理意义是很清楚的．按定义，能量

$$E_N = \eta_N\sqrt{S},$$

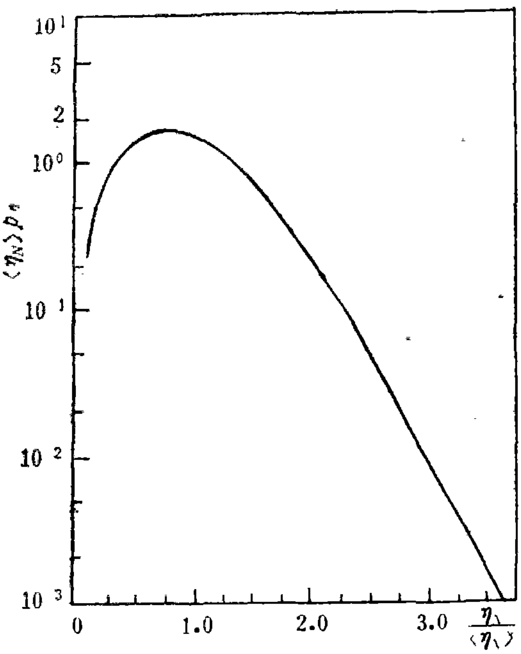

图1 非弹性度的 Kendall 标度分布

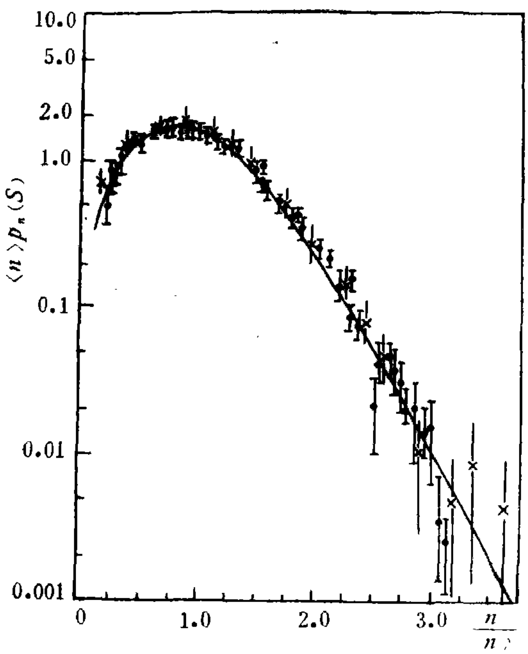

图2 多重数的 Kendall 标度分布

——19—303GeV [15]; ——405 GeV [16]

“平均”变量 $\eta_N/\langle\eta_N\rangle = E_N/\langle E_N\rangle$. 而且 $D\eta_N = DE_N$, 即 α_η 是中心区能量的相对统计起伏, (21) 式是中心区能量的标度分布. 如果把中心区看成统计物理学中的气态、液态或固态, 当 $\sqrt{S}\to\infty$ 时, 都存在 $DE_N = 0$, 因为那里的统计起伏纯属粒子性质的. 但是对于玻色-爱因斯坦气体, 例如黑体辐射(光子场)

$$DE_N = \frac{1}{\langle N\rangle} + \frac{1}{\alpha_\eta}. \tag{22}$$

式中右端第一项表示起源于粒子性质的相对能量起伏, 当 $\sqrt{S}\to\infty$ 时仍然趋于零; 第二项是起源于波动本性的相对能量统计起伏, 与 $\sqrt{S}$ 无关. 因此, 我们认为标度性对应于中心区的相对能量统计起伏与质心系总能量无关, 这种起伏产生于强子物质的波动本性. 从测不准关系有

$$\Delta P_x\Delta P_y\Delta P_z\Delta x\Delta y\Delta z = \alpha_\eta\hbar^3, \tag{23}$$

这里 P_x, P_y, P_z, x, y, z 表示强子的动量和位置, $\hbar$ 是蒲朗克常数, α_η 是统计权重, 表示一定能量(动量)的粒子在相空间中所占据的相格数. 最近实验已测出中心区的纵横线度[13]: $r_\perp \simeq 2r_f \simeq 0.7\times10^{-13}$ 厘米, 小于 π 介子的康普登长度, 在这样的区域, 按照量子场论[14], π 介子数将是一个很不确定的量, 因此多重数表现出特大的相对统计起伏.

由上所述我们得到这样的印象: 标度现象的普遍性可以由重整化群描述; Wroblewski 关系被包含在重整化群及其卷和矩的高阶普遍关系之中; 非弹性度和多重数都服从 Kendall 标度分布; 标度分布参数 α 及 α_η 是多重数及中心区能量相对统计起伏的度量, 这个起伏来源于强子物质的波动本性.

本文得到高崇寿同志的帮助和讨论，在此表示感谢.

附　　录

这里给出 $\mathscr{D}$ 是卷 (Cumulant) 的升阶算子的数学证明. 引入分布函数的各阶矩和卷的生成函数

$$G(u)=\sum_N P_N e^{Nu}dN, \tag{A1}$$

$$\phi(u)=\ln\sum_N P_N e^{Nu}dN. \tag{A2}$$

其中当分布变量为离散时，按 $N=0, 1, \cdots, +\infty$ 求和，分布变量为连续时在 $N(0, +\infty)$ 上积分.

显然

$$q\text{ 阶矩}\quad \mu_q=\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^q G(u)|_{u=0}\equiv\langle N^q\rangle, \tag{A3}$$

$$q\text{ 阶卷}\quad \phi^{(q)}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^q \phi(u)|_{u=0}. \tag{A4}$$

卷和矩两者有关系

$$\mu_q=\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{q-1}\left[e^{\phi(u)}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\phi(u)\right]\Big|_{u=0}.$$

运用乘积导数的莱伯尼兹公式展开上式即得到

$$\mu_q=\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\mu_k\phi^{(q-k)}. \tag{A5}$$

其中 $\mu_0=1$. $\binom{q-1}{k}$ 是二项式展开系数，每项矩和卷的脚标、肩标之和恒等于 q.

另方面按定义有

$$\mu_k=\langle N^k\rangle=\sum_N N^k P_N.\quad (k=1, 2, \cdots, q) \tag{A6}$$

将重整化群算子 $\mathscr{D}$ 作用于 (A 6) 式，并注意正文中 (2) (3) 式则有

$$\mathscr{D}\mu_k=2\gamma(\mu_{k+1}-\mu_1\mu_k). \tag{A7}$$

再将 $\mathscr{D}$ 作用于 (A 5) 式

$$\mathscr{D}\mu_q=\mathscr{D}\phi^{(q)}+\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\mu_k\mathscr{D}\phi^{(q-k)}+\sum_{k=1}^{q-1}\binom{q-1}{k}\phi^{(q-k)}\mathscr{D}\mu_k. \tag{A8}$$

代 (A 7) 式入 (A 8) 式两端，利用 (A 5) 式及二项式系数恒等式

$$\binom{q}{k}=\binom{q-1}{k}+\binom{q-1}{k-1}$$

经仔细整理后则得

$$\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\mu_k[\mathscr{D}\phi^{(q-k)}-2\gamma\phi^{(q-k+1)}]=0. \tag{A9}$$

因为 $\mu_k\neq 0$，关于 μ_k 有解的非零条件为

$$\mathscr{D}\phi^{(q-k)} - 2\gamma\phi^{(q-k+1)} = 0. \quad (k = 0, 1, \cdots, q-1) \tag{A10}$$

$\mathscr{D}$ 是 $\phi^{(q)}$ 的升阶算子得证. 为了从卷的关系去研究生成函数，一般将变量从 $u = 0$ 推广到使 (A 1) 收敛的 u 的全体域上，于是

$$\mathscr{D}\phi^{(q)}_{(u)} = 2\gamma\phi^{(q+1)}_{(u)}, \tag{A11}$$

这就是正文中的 (6) 式.

参 考 文 献

[1] Z. Koba, H. B. Nielson, P. Olesen, *Nucl. Phys.*, **40B** (1972), 317.
[2] D. Bondyopadhyay et al., *Nuovo Cimento.*, **35A** (1976), 325.
[3] D. Cohen, *Phys. Lett.*, **47B** (1973), 457.
[4] A. J. Sadoff et al., *Phys. Rev. Lett.*, **32** (1975), 955.
[5] G. A. Akopdjanov et al., *Nucl. Phys.*, **75B** (1974), 257.
V. E. Barnes et al., *Phys. Rev. Lett.*, **34** (1975), 415.
I. W. Chapman et al., *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976), 124.
[6] F. T. Dao et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 389.
[7] V. M. Hagman et al., *Phys. Scr.* (Sweden) **14** (1976), 24.
[8] K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.*, **47** (1975), 773.
[9] W. Ernst et al., *Nuovo Cimento*, **31A** (1976), 109.
[10] E. Parzen, Stochastic Processes (Holanden-Day. INC), 1962.
[11] D. G. Kendall. On the Role of Variable Generation Time in the Development of a Stochastic Birth Process, Biometrika, Vol. 35 pp. 316—330, 1948.
强子多重数的 Kendall 标度分布可以从不同的假定得出: N. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.*, **51** (1974), 1629. 此文假定强子-强子碰撞产生五个集团(α=5), 从光子计数分布得到 Kendall 分布, 只当$\langle N_{ch}\rangle$=8 时 [9]与实验符合;《基本粒子及超高能核作用模型简介》, 云南大学物理系高能短训班讲义, 1975, 从 π 介子受激发射假设出发得到 Kendall 标度分布;
从重整化群及 Wroblewski 关系出发得到多重数的 Kendall 标度分布; B. Carazza et al., *Lett. al Nuovo Cimento* **15** (1976), 553. 此文从 Wroblewski 关系及信息论考虑得出多重数的 Kendall 标度分布; D. P. Bhattacharyya et al., *Indian J. Phys.*, **50** (1976), 18. 此文也是从 Wroblewski 关系导出多重数的 Kendall 标度分布.
[12a] E. L. Feinberg, *Phys. Lett. C* (*Phys. Rep.*), **5** (1972), 269.
[12b] Y-A. Chao, *Nucl. Phys.*, **40B** (1972), 475.
[13] C. Ezell et al., *Phys. Rev. Lett.*, **38** (1977), 873.
[14] D. Lurie, Particles and Fields, §3—5, Interscience Publishers, 1968.
[15] P. Slattery, *Phys. Rev.*, **D7** (1973), 2073.
[16] C. Bromberg et al., *Phys. Rev. Lett.*, **31** (1973), 1563.

SCALING PHENOMENA AND RENORMALIZATION GROUP

ZHAO SHU-SONG PENG SHOU-LI YU CHUAN-ZAN

(*Yunan University*)

ABSTRACT

By acting the operator $\mathscr{D}$ of the renormalization group equation on the amputated Green's function of N particles, we can deduce the generalized Wroblewski relationship and the corresponding differential equations. Naturally, the Kendall scaling distribution of the multiplicity is obtained. The scaling variable is proved to be $N/\langle N\rangle$. Under certain conditions, the inelasticity scaling distribution is also of the Kendall type. The parameter of distribution represents relative statistical fluctuation of energy in the central region.