第3卷 第4期　高能物理与核物理　Vol. 3, No. 4
1979年7月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　July, 1979

Levinson 定理及其在相对论量子力学中的推广

倪光炯
（复旦大学）

摘　要

本文先用 Green 函数方法证明非相对论量子力学中的 Levinson 定理有如下形式：

$$n_l = \frac{1}{\pi}[\delta_l(0) - \delta_l(\infty)] - \frac{(-1)^l}{2}\sin^2\delta_l(0),$$

然后导出了它在 Dirac 方程中的推广形式为：

$$n_\kappa^{(+)} - n_\kappa^{(-)} = \frac{1}{\pi}[\delta_\kappa(m) - \delta_\kappa(\infty) + \delta_\kappa(-\infty) - \delta_\kappa(-m)]$$
$$- \frac{\kappa}{|\kappa|}\frac{(-1)^\kappa}{2}[\sin^2\delta_\kappa(m) + \sin^2\delta_\kappa(-m)].$$

对于 Klein-Gordon 方程，则可以有两种形式：

$$n_l^{(+)} \pm n_l^{(-)} = \frac{1}{\pi}\{\delta_l(m) - \delta_l(\infty) \pm [\delta_l(-m) - \delta_l(-\infty)]\}$$
$$- \frac{(-1)^l}{2}[\sin^2\delta_l(m) \pm \sin^2\delta_l(-m)].$$

文中对此定理的含义、应用范围及有关问题作了讨论，并就方势阱的 s 态问题，检验了这些公式.

一、引　言

非相对论量子力学中的 Levinson 定理[1,2]可叙述如下：一粒子在中心势场 $V(r)$ 中运动，$V(r)$ 满足条件 $\int_0^a r|V(r)|dr < \infty$ 及 $\int_b^\infty r^2|V(r)|dr < \infty$，则散射态波函数在零动能(零动量)下之分波相移 $\lim\limits_{k\to0}\delta_l(k) = \delta_l(0)$ 与粒子在该势场中具有同一轨道角动量 l 的束缚态能级数目 n_l（不计磁量子数的简并度），有如下的联系：

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_l(0) = \pi\left(n_l + \frac{1}{2}\right), & \text{如 } l = 0,\ \text{且 } \lim\limits_{k\to0} f_0(k) = 0, \\ \delta_l(0) = \pi n_l, & \text{其它情形.} \end{array}\right. \tag{1.1}$$

本文 1978 年 8 月 8 日收到.

在通常的证明方法中，Jost 函数 $f_l(k)$ 的解析性是十分重要的.

看来,在实际应用中,对 Levinson 定理往往注意不够. 例如在低能 s 波散射的有效力程分析法中,常定义一个散射长度 a:

$$-\frac{1}{a}=\lim_{k\to 0}\ [k\cot\delta_0(k)]. \tag{1.2}$$

有时把此式进一步简化成

$$a=-\lim_{k\to 0}\frac{\delta_0(k)}{k} \tag{1.3}$$

并从势场 $V(r)$ 能容纳束缚态波函数的分析指明 $a>0$，则由(1.3)式 $\delta_0(0)<0$，这就与吸力势场中相移必定为正的一般规则(见下面定理二)矛盾,也与(1.1)式不符. 为了避免这种含糊情形的发生，我们希望对这个定理给一个比较直观的证明. 本文采用的 Green 函数方法,在精神上同 Jauch[3] 和 Martin[4] 的证明方法有类似之处,但可能更简捷一些,并较易于推广到相对论方程的情形，因为在后面的情形中，看来是很难采用解析性的严格证明方法的. 我们的讨论将都限于定域的中心势场 $V(r)$ 是无奇性的短程势而行为良好的情形.

二、Schrödinger 方程的情形

我们证明 Levinson 定理的方法分两步走,先证明在吸引性势场增强时具有角动量 l 的束缚态增加的数目等于散射态中减少的数目,再给出后一数目与散射相移的联系.

1. 数学准备

记无势场情形下定态 Schrödinger 方程之解为 $\phi(\mathbf{r})$:

$$H_0\phi(\mathbf{r})\equiv-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\mathbf{r})=E\phi(\mathbf{r}). \tag{2.1}$$

有中心势场 $V(r)$ 时之定态解为 $\psi(\mathbf{r})$:

$$H\psi(\mathbf{r})\equiv-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r})+V(r)\psi(\mathbf{r})=E\,\psi(\mathbf{r}). \tag{2.2}$$

用球坐标作分波展开后，$\psi(\mathbf{r})$ 的渐近行为是

$$\psi(\mathbf{r})\xrightarrow[r\to\infty]{}\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)\,e^{i\delta_l}P_l(\cos\theta)\frac{\sin\left(kr-\frac{l}{2}\pi+\delta_l\right)}{kr}. \tag{2.3}$$

这里定义了相移 $\delta_l\equiv\delta_l(k)=\delta_l(E)$. (2.1)式的推迟 Green 函数由下式定义:

$$(E-H_0+i\eta)\,G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';E)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{2.4}$$

$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';E)$ 的 Fourier 变换 (令 $\hbar=c=1$)

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\mathbf{r},\mathbf{r}';E)\,e^{-iE(t-t')}\,dE, \tag{2.5}$$

满足方程 $$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';t-t')=\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\delta(t-t'), \tag{2.6}$$

它们都可用(2.1)式解出的本征函数展开:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \sum_\nu \frac{\phi_\nu(\mathbf{r})\,\phi_\nu^*(\mathbf{r}')}{E - E_\nu + i\eta}. \tag{2.7}$$

其中 ν 标记各量子数（可以是 $\mathbf{k}$ 或 k, l, m），$\phi_\nu(\mathbf{r})$ 为归一化的本征函数.

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') = -i \sum_\nu \phi_\nu(\mathbf{r})\,\phi_\nu^*(\mathbf{r}')\, e^{-iE_\nu(t-t')}\,\theta(t - t'), \tag{2.8}$$

以(2.7)代入(2.5)式，(2.8)代入(2.6)式，(2.7)代入(2.4)式，并用完备性定理

$$\sum_\nu \phi_\nu(\mathbf{r})\,\phi_\nu^*(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{2.9}$$

上述各式都不难证明. 对于有势场的情形，只须改 $H_0 \to H = H_0 + V$, $\phi_\nu(\mathbf{r}) \to \psi_\nu(\mathbf{r})$, 此时 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$ 变为 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$，两者有如下的联系：[5]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; E)\, V(\mathbf{r}'')\, G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; E)\, d\mathbf{r}''. \tag{2.10}$$

现在我们限于讨论中心势情况，$V(\mathbf{r}) = V(r)$，把(2.4)式及相应之方程

$$(E - H_0 - V(r) + i\eta)\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.11}$$

按球坐标展开，令

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \sum_l \sum_m Y_{lm}(\theta, \varphi)\, Y_{lm}^*(\theta', \varphi')\, G^l(r, r'; E), \tag{2.12}$$

即得 $$\left[E + \frac{1}{2mr^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - V(r) - \frac{l(l+1)}{2mr^2} + i\eta\right] G^l(r, r'; E) = \frac{\delta(r - r')}{rr'}.$$

令 $$\psi_\nu(\mathbf{r}) = \frac{u_{l\nu}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

则 $$G^l(r, r'; E) = \sum_{E_\nu} \frac{u_{l\nu}(r)\, u_{l\nu}^*(r')}{rr'(E - E_\nu + i\eta)}. \tag{2.13}$$

$u_{l\nu}(r)$ 满足方程

$$\frac{d^2}{dr^2} u_{l\nu}(r) + \left[2m E_\nu - 2m V - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_{l\nu}(r) = 0. \tag{2.14}$$

$u_{l\nu}(r)$ 满足边界条件 $u_{l\nu}(0) = 0$，当 $E_\nu > 0$, $2m E_\nu = k_\nu^2 = k^2$,

$$u_{l\nu}(r) = u_{lk}(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} A \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \delta_l(k)\right), \tag{2.15}$$

(2.12)代入(2.10)式，就有

$$G^l(r, r'; E) = G_0^l(r, r'; E) + \int_0^\infty G_0^l(r, r''; E) V(r'') G^l(r'', r'; E) r''^2 dr''. \tag{2.16}$$

2. 渐近完备性定理

现在我们来建立状态数目和 Green 函数虚部之间的联系. 在(2.13)式中利用公式

$$\frac{1}{E - E_\nu \pm i\eta} = \frac{P}{E - E_\nu} \mp i\pi\delta(E - E_\nu), \tag{2.17}$$

令 $r = r'$，乘以 $r^2 dr$ 后对 r 积分，则

$$Im \int G^l(r, r; E)\, r^2 dr = -\pi \sum_{E_\nu} \delta(E - E_\nu). \tag{2.18}$$

同理
$$Im\int G_0^l(r,r;E)\,r^2dr=-\pi\sum_{E_{\nu'}}\delta(E-E_{\nu'}). \tag{2.19}$$

注意在(2.19)式中 $E_{\nu'}>0$. 而在(2.18)式中,既有 $E_\nu>0$, 也有 $E_\nu<0$. 由此可见势场 $V(r)$ 中束缚态数目 n_l 可表示为:
$$n_l=-\frac{1}{\pi}Im\int_{-\infty}^{0}\left\{\int[G^l(r,r;E)-G_0^l(r,r;E)]\,r^2dr\right\}dE. \tag{2.20}$$

(2.20)式中的 $G_0^l(r,r;E)$是可以去掉的,这样写法是因为可以证明下面这个定理.

定理一
$$-\frac{1}{\pi}Im\int_{-\infty}^{0}dE\left\{\int[G^l(r,r;E)-G_0^l(r,r;E)]\,r^2dr\right\}=n_l, \tag{2.20}$$
$$-\frac{1}{\pi}Im\int_{0}^{\infty}dE\left\{\int[G^l(r,r;E)-G_0^l(r,r;E)]\,r^2dr\right\}=-n_l, \tag{2.21}$$
$$-\frac{1}{\pi}Im\int_{-\infty}^{\infty}dE\left\{\int[G^l(r,r;E)-G_0^l(r,r;E)]\,r^2dr\right\}=0. \tag{2.22}$$

[证]: 利用(2.13)式及 $G_0^l(r,r';E)=\sum_{E_{\nu'}}\frac{u_{l\nu'}^{(0)}(r)\,u_{l\nu'}^{(0)*}(r')}{rr'(E-E_{\nu'}+i\eta)}$,

选
$$u_{l\nu'}^{(0)}(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}A_0\sin\left(k_{\nu'}r-\frac{l}{2}\pi\right) \tag{2.23}$$

中之 $A_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, 使满足如下之连续谱动量归一化条件:
$$\int_0^\infty u_{l\nu}^{(0)*}(r)\,u_{l\nu'}^{(0)}(r)\,dr=\delta(k_\nu-k_{\nu'}), \tag{2.24}$$

则(2.16)式乘 r^2dr, 对 r 积分后成为(令 $r=r'$):
$$\begin{aligned}&\int_0^\infty[G^l(r,r;E)-G_0^l(r,r;E)]\,r^2dr\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty G_0^l(r,r'';E)\,V(r'')\,G^l(r'',r;E)r''^2r^2dr''dr\\&=\sum_{E_\nu}\sum_{E_{\nu'}}\iint\frac{u_{l\nu}^{(0)}(r)u_{l\nu}^{(0)*}(r')}{E-E_\nu+i\eta}V(r')\frac{u_{l\nu'}(r')\,u_{l\nu'}^{*}(r)}{E-E_{\nu'}+i\eta'}drdr'\end{aligned} \tag{2.25}$$

(式中对 E_ν 或 $E_{\nu'}>0$ 的累和理解为对 k_ν 或 $k_{\nu'}$ 积分),此式包含两类积分:

(i) $E_\nu>0$, $E_{\nu'}>0$,

由方程(2.14)(改 $\nu\to\nu'$)及 $n_\nu^{(0)}(r)$ 所满足之方程,可得
$$\begin{aligned}\langle\phi_\nu|V|\phi_{\nu'}\rangle&\equiv\int_0^\infty u_{l\nu}^{(0)*}(r')\,V(r')\,u_{l\nu'}(r')\,dr'\\&=(E_{\nu'}-E_\nu)\Big\{\langle\phi_\nu|\phi_{\nu'}\rangle-e^{i\delta_l}\Big[\cos\delta_l\,(\delta(k-k')+(-1)^{l+1}\delta(k+k'))\\&\quad+\sin\delta_l\left(\frac{\cos(k'-k)R}{\pi(k'-k)}+(-1)^{l+1}\frac{\cos(k'+k)R}{\pi(k'+k)}\right)_{R\to\infty}\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

其中已取(2.15)式中之 $A=e^{i\delta_l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, 并用了 $u_\nu^{(0)}(0)=u_{\nu'}(0)=0$. (2.26)式的推导有些与后面(2.45)—(2.47)式类似,故不详.

而
$$\langle\phi_\nu|\phi_{\nu'}\rangle\equiv\int_0^\infty u_\nu^{(0*}(r')\,u_{\nu'}(r')\,dr'. \tag{2.27}$$

于是(2.25)式右端出现之矩阵元当 $E_\nu>0$, $E_{\nu'}>0$ 时为:

$$\begin{aligned}\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu|V|\phi_{\nu'}\rangle&=(E_{\nu'}-E_\nu)\\&\times\Big\{|\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle|^2-e^{i\delta_l}\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle\Big[\cos\delta_l\,(\delta(k-k')+(-1)^{l+1}\delta(k+k'))\\&+\sin\delta_l\Big(\frac{\cos(k'-k)R}{\pi(k'-k)}+(-1)^{l+1}\frac{\cos(k'+k)R}{\pi(k'+k)}\Big)_{R\to\infty}\Big]\Big\}^{1)}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

(ii) $E_\nu>0$, $E_{\nu'}<0$

此时 $|\phi_{\nu'}\rangle$ 对应于束缚态波函数, $u_{\nu'}(r')\xrightarrow[r'\to\infty]{}0$, 上面推导结果中整个后面一项就不见了,我们有:

$$\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu|V|\phi_{\nu'}\rangle=(E_{\nu'}-E_\nu)|\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle|^2. \quad (E_\nu>0,\ E_{\nu'}<0) \tag{2.29}$$

将(2.28)和(2.29)式代入(2.25)式,再展开

$$\begin{aligned}\frac{1}{(E-E_\nu+i\eta)(E-E_{\nu'}+i\eta')}&=\Big[\frac{1}{E-E_\nu+i\eta}-\frac{1}{E-E_{\nu'}+i\eta'}\Big]\frac{1}{E_\nu-E_{\nu'}+i(\eta'-\eta)}\\&=\Big[P\frac{1}{E-E_\nu}-i\pi\delta(E-E_\nu)-P\frac{1}{E-E_{\nu'}}\\&+i\pi\delta(E-E_{\nu'})\Big]\Big[P\frac{1}{E_\nu-E_{\nu'}}-i\pi\delta(E_\nu-E_{\nu'})\Big],\end{aligned}$$

(其中假定 $(\eta'-\eta)>0$, 相反的情形不改变下面定理的结果),故对 E 积分后:

$$\begin{aligned}&Im\int dE\int_0^\infty[G^l(r,r;E)-G_0^l(r,r;E)]\,r^2dr\\&=-\pi\int dE\iint P\frac{\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu|V|\phi_{\nu'}\rangle}{E_\nu-E_{\nu'}}\delta(E-E_\nu)\,dk_\nu\,dk_{\nu'}\\&+\pi\int dE\iint P\frac{\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu|V|\phi_{\nu'}\rangle}{E_\nu-E_{\nu'}}\delta(E-E_{\nu'})\,dk_\nu\,dk_{\nu'}\\&-\pi\int dE\iint P\frac{\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu|V|\phi_{\nu'}\rangle}{E-E_\nu}\delta(E_\nu-E_{\nu'})\,dk_\nu\,dk_{\nu'}\\&+\pi\int dE\iint P\frac{\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu|V|\phi_{\nu'}\rangle}{E-E_{\nu'}}\delta(E_\nu-E_{\nu'})\,dk_\nu\,dk_{\nu'}\\&+\pi\sum_{E_{\nu'}<0}\int dE\int|\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle|^2\delta(E-E_\nu)\,dk_\nu\\&-\pi\sum_{E_{\nu'}<0}\int dE\int|\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle|^2\delta(E-E_{\nu'})\,dk_\nu\\&-\pi\sum_{E_{\nu'}<0}\int dE\int P\frac{(E_{\nu'}-E_\nu)|\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle|^2}{E-E_\nu}\delta(E_\nu-E_{\nu'})\,dk_\nu\\&+\pi\sum_{E_{\nu'}<0}\int dE\int P\frac{(E_{\nu'}-E_\nu)|\langle\phi_{\nu'}|\phi_\nu\rangle|^2}{E-E_{\nu'}}\delta(E_\nu-E_{\nu'})\,dk_\nu.\end{aligned} \tag{2.30}$$

1)后面为复数的含中括号的一项在下面对 k 或 k' 的积分后等于零。

这八项积分中，第七、八两项必分别为零(因有 $\delta(E_\nu - E_{\nu'})$ 而 $E_\nu > 0$, $E_{\nu'} < 0$). 第三及第四两项积分因都有 $\delta(E_\nu - E_{\nu'})$，亦必定互相消去. 如果对 E 的积分限从 $-\infty \to \infty$，则第一项和第二项，第五项和第六项，也都分别抵销，这就证明了(2.22)式.

而如果我们限制 E 的积分区间为 $(-\infty, 0)$，则第五和一、二项积分为零，留下第六项为

$$
\begin{aligned}
&-\pi \sum_{E_{\nu'}<0} \int_0^\infty dk_\nu \int_{-\infty}^0 |\langle \psi_{\nu'} | \phi_\nu \rangle|^2 \delta(E - E_{\nu'})\, dE \\
&= -\pi \sum_{E_{\nu'}<0} \int_0^\infty |\langle \psi_{\nu'} | \phi_\nu \rangle|^2 dk_\nu = -\pi \sum_{E_{\nu'}<0} \int_0^\infty \langle \psi_{\nu'} | \phi_\nu \rangle \langle \phi_\nu | \psi_{\nu'} \rangle\, dk_\nu \\
&= -\pi \sum_{E_{\nu'}<0} |\langle \psi_{\nu'} | \psi_{\nu'} \rangle|^2 = -\pi n_l,
\end{aligned}
$$

这就是 (2.20) 式. 如果限制 E 的积分范围为 $(0, \infty)$，则一、二两项相消，第六项积分为零，留下第五项等于 πn_l，这就是(2.21)式. 于是定理一证毕.

我们称定理一为"渐近完备性定理"，它告诉我们：势场 $V(r)$ 的存在并不改变状态的总数，而只是把一部分散射态从 $E > 0$ "拉下来"，成为 $E < 0$ 的束缚态，这一点乃是本征函数系完备性的又一种表现. 由于连续谱能级不可数，我们可以用简单的模型来说明这一点. 考虑一个三维方势阱

$$
V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \tag{2.31}
$$

把它放在一个大球（半径为 R, $R \gg a$）的中央，为简单计，只看 s 态 $(l = 0)$. 由边界上 $r = R$ 处波函数为零的条件，一切本征态，包括 $E > 0$ 的散射态能级都分立了，于是可仿照文献[7]中的办法，具体地看到随着 V_0 的增大，那些最低的散射态能级逐个地连续地转变为束缚态能级.

3. Levinson 定理的证明

由上述可见，对一定的 l 分波而言，束缚态能级的数目就等于被势场拉下来的散射态能级数. 下一步我们要弄清楚，由于加上势场而少掉的散射态数目同相移有什么关系. 为此先证明

定理二　设在势场 $\lambda V(r)$ 中散射态的径向波函数 $u_{lk}(r, \lambda)$ 有如下的渐近行为[1)]：

$$
u_{lk}(r, \lambda) \xrightarrow[r \to \infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \delta_l(k, \lambda)\right) \tag{2.32}
$$

则

$$
\frac{\partial}{\partial \lambda} \delta_l(k, \lambda) = -\frac{\pi m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty V(r) [u_{k,l}(r, \lambda)]^2 dr \tag{2.33}
$$

[证]：按 (2.14) 式分别写出 $u_{lk}(r, \lambda)$ 和 $u_{lk}(r, \lambda + \Delta\lambda)$ 所满足的方程，将前者乘上 $u_{lk}(r, \lambda + \Delta\lambda)$，减去乘上了 $u_{lk}(r, \lambda)$ 的后一方程，对 r 从 $0 \to \infty$ 积分，利用 $u_{lk}(0, \lambda) = 0$ 及(2.32)式，再令 $\Delta\lambda \to 0$，即得(2.33)式[8].

定理二告诉我们，当一个吸力势场 $(V(r) < 0)$ 由零逐渐增强时，各分波的相移

---

1) 从这里以下，我们略去因子 $e^{i\delta_l}$，使 $u_{lk}(r)$ 为实函数，这样不影响结果而可使式子简洁些.

$\delta_l > 0$，且单调地增大：$\frac{\partial \delta_l}{\partial \lambda} \geqslant 0$，但在 $k = 0$ 处，由(2.33)式可见，$\frac{\partial \delta_l}{\partial \lambda}$可能不连续.

另外，相移的一级 Born 近似值为：

$$\tan \delta_l = -k \int_0^\infty [j_l(kr)]^2 \frac{2mV(r)}{\hbar^2} r^2 dr. \tag{2.34}$$

其高能极限

$$\lim_{k \to \infty} \tan \delta_l = -\frac{1}{k} \int_0^\infty \sin^2\left(kr - \frac{l}{2}\pi\right) \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\, dr \to 0 \tag{2.35}$$

对于低能情形，展开

$$j_l(kr) \approx \frac{2^l\, l!}{(2l+1)!} (kr)^l, \tag{2.36}$$

设 $V(r)$ 是力程为 a 的短程势，对 $l > ka$ 仍可用(2.34)作近似估计，得

$$\tan \delta_l \sim k^{2l+1}. \quad (k \text{ 小且 } l > ka) \tag{2.37}$$

由此可见，对 $l \geqslant 1$ 各分波，

$$\lim_{k \to 0} \delta_l(k) = n\pi \quad (l \geqslant 1) \tag{2.38}$$

而对于 $l = 0$ 的 s 波，需另外讨论.

有了这些准备知识，我们以势场 $\lambda V(r)$ 的中心为球心，作一个半径 R 足够大的球，让(2.32)式所示的散射波在球壁内形成驻波，即由

$$kR - \frac{l}{2}\pi + \delta_l(k, \lambda) = N\pi, \tag{2.39}$$

使各 k 值分立. 根据(2.35)式，我们可指定一个最大的 k_M，使它的相移在 $\lambda = 1$ 时也可忽略，于是动量比 k_M 更大的各散射波可不予考虑. 比 k_M 小一个编号的波，它在 $0 \to R$ 范围的节点数比 k_M 波少一个. 依此类推.

现在让势场逐渐增强，这些波的相移都随之增大，我们特别注意能量最低的那二个 s 波，最低的一个 k_1，其径向波函数 $u_{0k_1}(r)$ 除在 $r = 0$ 和 R 有二个节点外，中间没有节点，次最低的一个 k_2 波，则在中间有一个节点. 当势从零增强，而在阱内 ($r < a$) 还不足以把 $u_{0k_1}(r)$ 弯到水平之前，$\lim\limits_{k_1 \to 0} \delta_0(k_1) = 0$ ($k_1 \to 0$ 的极限对应于 $R \to \infty$)，直到 $u_{0k_1}(r)$ 被弯成水平，$\delta_0(0) = \pi/2$. 此时势阱刚好容纳一个 $E = 0$ 的“虚态”，(散射长度 $a = -\lim\limits_{k \to 0} \frac{\delta_0(k)}{k}$ 此时变为 $-\infty$)，其波函数不能在阱附近归一化，故又叫做“半束缚态”. 在这以后，当势阱开始能把波函数弯下来，也就是开始能容纳一个束缚态的时候，$\delta_0(0)$ 又突变为 π，我们注意这时在阱内形成了一个有一个节点的束缚态 ($E < 0$)，原来 $E > 0$ 的最低散射态 $u_{0k_1}(r)$ 实际上消失了，代替它位置的正是原来的 $u_{0k_2}(r)$. 这就是说，s 波的散射态被势场拉掉了一个，而这一过程伴随着零动量分波相移的突增：$\delta_0(0)$ 由 0 经 $\pi/2$ 跳变到 π.

对于 $l \geqslant 1$ 的各分波，也可作类似的讨论，但由(2.38)式可见 $\delta_l(0)$ 不可能为 $\pi/2$，原因是离心势垒的存在把 $E = 0$ 这种态真的束缚住了，于是现在 $\delta_l(0)$ 从 0 一下子跳到 π.

λ 如此增大直到 1 为止，在这过程中除 $l = 0$ 的 s 态恰好出现一个 $E = 0$ 的半束缚能级时，相移 $\delta_0(0)$ 需加上 $\pi/2$ 外，属于 l 分波的散射态每减少一个，相移 $\delta_l(0)$ 便

增加 π. 这一结论同前面关于散射态每少一个，束缚态便增加一个的结论合起来，就是 Levinson 定理(1-1)式.

最近，Jackiw 和 Woo 对一维情形的 Levinson 定理，也作了类似的论证[9]. 但是下面我们要仿照 Friedel 的办法[10],另外作一个形式上更严谨些的证明,这就是

定理三

$$-\frac{1}{\pi}\,Im\int_0^\infty dE\left\{\int_0^\infty\left[G^l(r,r;E)-G_0^l(r,r;E)\right]r^2\,dr\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\delta_l(\infty)-\delta_l(0)\right]+\frac{(-1)^l}{2}\sin^2\delta_l(0). \tag{2.40}$$

显然,定理一、三合起来,直接给出对非奇性势的 **Levinson 定理**:

$$n_l=\frac{1}{\pi}\left[\delta_l(0)-\delta_l(\infty)\right]-\frac{(-1)^l}{2}\sin^2\delta_l(0). \tag{2.41}$$

再由上面讨论看出,(2.41)等价于(1.1)式.

现在我们来证明(2.40)式. 它的左方被积函数中的二个 Green 函数,如果分别按(2.7)和(2.13)的分立本征函数展开式代入,而各自的本征函数又都归一化的话,则象(2.18)和(2.19)所示,(2.40)式左方只不过表示由于加入势场后散射态减少的数目再乘(−1),即等于$(-n_l)$,就是(2.21)式. 现在我们让 $u_{lk}^{(0)}(r)$ 按(2.24)式的连续谱归一化,而要求 $u_{lk}(r)$ 在无穷远的自由边界条件下满足如下的渐近行为[1]:

$$u_{lk}(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(kr-\frac{l}{2}\pi+\delta_l(k)\right), \tag{2.42}$$

将(2.7)和(2.13)式代入(2.40)左端,用(2.17)式,先完成对 E 的积分,就可改写为:

$$(2.40)\text{ 式左端}=\lim_{R\to\infty}\int_0^\infty dk\int_0^R\left[u_{lk}^2(r)-u_{lk}^{(0)2}(r)\right]dr, \tag{2.43}$$

下一步计算$\int_0^R u_{lk}^2(r)dr$ 和$\int_0^R u_{lk}^{(0)2}(r)\,dr$ 这两个积分之差. 我们利用公式[11] (略去 l 脚标):

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R u_{k_1}(r)\,u_{k_2}(r)\,dr$$

$$=\frac{1}{k_2^2-k_1^2}\lim_{R\to\infty}\left[u_{k_2}(r)\frac{d}{dr}u_{k_1}(r)-u_{k_1}(r)\frac{d}{dr}u_{k_2}(r)\right]_{r=R} \tag{2.44}$$

此式不难从方程(2.14)直接推出,已用了边界条件 $u_k(0)=0$. 以(2.42)式代入,即得:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R u_{k_1}(r)\,u_{k_2}(r)\,dr$$

$$=\frac{2}{\pi(k_2^2-k_1^2)}\lim_{R\to\infty}\left[\left(\frac{k_1+k_2}{2}+\frac{k_1-k_2}{2}\right)\sin\theta_2\cos\theta_1\right.$$

$$\left.-\left(\frac{k_1+k_2}{2}-\frac{k_1-k_2}{2}\right)\cos\theta_2\,\sin\theta_1\right]$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{\sin\left[(k_2-k_1)R+\delta_l(k_2)-\delta_l(k_1)\right]}{\pi(k_2-k_1)}\right.$$

1) 这样做法与 (2.26)—(2.28) 诸式中对 $u_{l\nu'}$ 的选取一致.

$$-\frac{\sin[(k_2+k_1)R-l\pi+\delta_l(k_2)+\delta_l(k_1)]}{\pi(k_1+k_2)}\Big\}. \tag{2.45}$$

同理

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R u_{k_1}^{(0)}(r)\,u_{k_2}^{(0)}(r)\,dr=\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{\sin[(k_2-k_1)R]}{\pi(k_2-k_1)}-\frac{\sin[(k_2+k_1)R-l\pi]}{\pi(k_2+k_1)}\right\}, \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\lim_{R\to\infty}\int_0^R[u_{k_1}(r)\,u_{k_2}(r)-u_{k_1}^{(0)}(r)\,u_{k_2}^{(0)}(r)]\,dr\\ &=\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi(k_2-k_1)}2\cos\left[(k_2-k_1)R+\frac{\delta_l(k_2)-\delta_l(k_1)}{2}\right]\sin\left[\frac{\delta_l(k_2)-\delta_l(k_1)}{2}\right]\right.\\ &\left.-\frac{1}{\pi(k_2+k_1)}2\cos\left[(k_2+k_1)R+\frac{\delta_l(k_2)+\delta_l(k_1)}{2}-l\pi\right]\sin\left[\frac{\delta_l(k_2)+\delta_l(k_1)}{2}\right]\right\}.\end{aligned}$$

现在取 $k_2\to k_1=k$ 的极限，并与对 R 取极限交换次序，则

$$\begin{aligned}&\lim_{k_2\to k_1(k)}\lim_{R\to\infty}\int_0^R[u_{k_1}(r)\,u_{k_2}(r)-u_{k_1}^{(0)}(r)\,u_{k_2}^{(0)}(r)]\,dr\\ &=\lim_{R\to\infty}\int_0^R[u_k^2(r)-u_k^{(0)^2}(r)]\,dr\\ &=\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\lim_{k_2\to k_1}\cos\left[(k_2-k_1)R+\frac{\delta_l(k_2)-\delta_l(k_1)}{2}\right]\lim_{k_2\to k_1}\frac{\sin\left[\frac{\delta_l(k_2)-\delta_l(k_1)}{2}\right]}{k_2-k_1}\right.\\ &\left.-(-1)^l\,\frac{2\cos[2k_1R+\delta_l(k_1)]}{2\,\pi k_1}\sin\delta_l(k_1)\right\}_{k_1=k}\\ &=\frac{1}{\pi}\frac{d\delta_l}{dk}+(-1)^l\sin^2\delta_l(k)\cdot\delta(k)-(-1)^l\sin 2\delta_l(k)\lim_{R\to\infty}\frac{\cos 2kR}{2\pi k}\end{aligned} \tag{2.47}$$

代入(2.43)对 k 积分，第三项因 $R\to\infty$ 时振荡很快而无贡献[1)]，再注意

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left[\frac{1}{\pi}\frac{d\delta_l}{dk}+(-1)^l\sin^2\delta_l\cdot\delta(k)\right]dk\\ &\qquad=\frac{1}{\pi}[\delta_l(\infty)-\delta_l(0)]+(-1)^l\int_0^\infty\sin^2\delta_l(k)\cdot\delta(k)\,dk\end{aligned} \tag{2.48}$$

中第二个积分，做自变量代换 $\int_0^\infty\sin^2\delta_l(k)\cdot\delta(k)\,dk=\int_0^\infty\sin^2\delta_l(E)\cdot\delta(E)\,dE=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\sin^2\delta_l(E)\cdot\delta(E)\,dE$，即得(2.40)式，**Levinson 定理**证毕.

三、 Dirac 方程的情形

1. Dirac 方程的有效势

人们通常把中心势场 $V(r)$ 下的 Dirac 方程的解写成[12]

---

1) 这一点可论证如下：取半径为 R 的大球后，各 k 值量子化为 $k_n=\frac{2\pi}{\lambda_n}=\frac{n\pi}{R}$, $n=1,2,\cdots N,\cdots$, $dk=\frac{\pi}{R}$,

则 $$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\frac{\cos 2kR}{k}\sin 2\delta_l(k)\,dk&=\lim_{\substack{R\to\infty\\N\to\infty}}\sum_{n=1}^N\frac{\cos 2n\pi}{n\pi}R\cdot\sin 2\delta_l\left(\frac{n\pi}{R}\right)\frac{\pi}{R}\\ &=\lim_{\substack{R\to\infty\\N\to\infty}}\sum_{n=1}^N\frac{(-1)^n}{n}\sin 2\delta_l\left(\frac{n\pi}{R}\right)=\lim_{\substack{N\to\infty\\R\to\infty}}\sum_{n=N}^\infty\frac{(-1)^n}{n}\sin 2\delta_l\left(\frac{n\pi}{R}\right)=0.\end{aligned}$$

(对有限的 $n<N$，因 $\lim_{R\to\infty}\sin 2\delta_l\left(\frac{n\pi}{R}\right)=\sin 2\delta_l(0)=\sin m\pi=0$)

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} f(r) & \chi_\kappa^\mu \\ g(r) & \chi_{-\kappa}^\mu \end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} u_1(r) & \chi_\kappa^\mu \\ iu_2(r) & \chi_{-\kappa}^\mu \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

其中

$$\chi_\kappa^\mu=\sum_{m=\pm 1/2}\left(l,\frac{1}{2},j\,|\,\mu-m,m,\mu\right)Y_l^{\mu-m}\chi^m \tag{3.2}$$

$$\text{量子数 } \kappa=\begin{cases}-(l+1) & j=l+1/2 \\ l. & j=l-1/2\end{cases} \tag{3.3}$$

(3.1) 式中的径向波函数满足如下的耦合方程:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}u_1=-\dfrac{\kappa}{r}u_1+(E+m-V)u_2 \\ \dfrac{d}{dr}u_2=-(E-m-V)u_1+\dfrac{\kappa}{r}u_2.\end{cases} \tag{3.4}$$

从(3.4)消去 u_2，得到 u_1 的一个二阶线性方程，再做代换

$$u_1(r)=[m+E-V]^{1/2}v(r), \tag{3.5}$$

可导出

$$v''(r)+\left[E^2-m^2-V_{\text{eff}}(r)-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}\right]v(r)=0. \tag{3.6}$$

其中

$$V_{\text{eff}}(r)=-V^2+2EV+\left[\frac{1}{2}\frac{V''}{m+E-V}+\frac{3}{4}\left(\frac{V'}{m+E-V}\right)^2-\frac{\kappa}{r}\frac{V'}{m+E-V}\right] \tag{3.7}$$

称为有效势，它依赖于粒子的能量 E，使我们无法象非相对论量子力学中那样，定义有良好解析性质的 Jost 函数，这就是把 Levinson 定理推广到 Dirac 方程时的主要困难。

2. Feynman 传播子和真空的荷密度

先定义在有外势场情形下之 Feynman 传播子[13]

$$iS_{F\alpha\beta}(x,y)=\langle 0|T(\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\bar{\psi}}_\beta(y))|0\rangle \tag{3.8}$$

其中场算符在 Furry 表象中写出:

$$\hat{\psi}_\alpha(x)=\sum_{E_\nu>E_F}\hat{b}_\nu\phi_{\nu\alpha}(\mathbf{x},E_\nu)e^{-iE_\nu t}+\sum_{E_\nu<E_F}d_\nu^\dagger\phi_{\nu\alpha}(\mathbf{x},E_\nu)e^{-iE_\nu t} \tag{3.9}$$

$\phi_{\nu\alpha}(\mathbf{x},E_\nu)$ 为在势场中能量为 E_ν 的本征态波函数(旋量的 α 分量)，粒子填充到费米能级 E_F，$\hat{b}_\nu$ 为粒子湮灭算符，$\hat{d}_\nu^\dagger$ 为反粒子(空穴)产生算符，真空 $|0\rangle$ 定义是:

$$\begin{cases} b_\nu|0\rangle=0 & E_\nu>E_F \\ d_\nu|0\rangle=0. & E_\nu<E_F\end{cases} \tag{3.10}$$

真空的荷密度可以通过传播子表达出来:

$$\rho(\mathbf{x})=-i\,T_r[S_F(x,x)\gamma_0]. \tag{3.11}$$

以(3.8)和(3.9)式代入，即得

$$\rho(\mathbf{x})=-\frac{1}{2}\left[\sum_{E_\nu>E_F}\phi_\nu^\dagger(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu(\mathbf{x},E_\nu)-\sum_{E_\nu<E_F}\phi_\nu^\dagger(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu(\mathbf{x},E_\nu)\right]. \tag{3.12}$$

(这里求和理解为包括了对角动量的求和)

当势场不存在，$V=0$ 时，类似地有荷密度表示式：

$$\rho_0(\mathbf{x})=-\frac{1}{2}\left[\sum_{E_\nu>m}\phi_\nu^{(0)\dagger}(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu^{(0)}(\mathbf{x},E_\nu)-\sum_{E_\nu<-m}\phi_\nu^{(0)\dagger}(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu^{(0)}(\mathbf{x},E_\nu)\right].\quad(3.13)$$

3. Levinson 定理的推广

我们假定势场引入后，真空在整体上仍保持为中性，即

$$\int[\rho(\mathbf{x})-\rho_0(\mathbf{x})]\,d\mathbf{x}=0,\quad(3.14)$$

以(3.12)和(3.13)式代入(3.14)式，便有

$$\int\Big\{\sum_{m>E_\nu>E_F}\phi_\nu^\dagger(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu(\mathbf{x},E_\nu)-\sum_{-m<E_\nu<E_F}\phi_\nu^\dagger(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu(\mathbf{x},E_\nu)\Big\}d\mathbf{x}$$

$$=-\int\sum_{E_\nu>m}\{\phi_\nu^\dagger(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu(\mathbf{x},E_\nu)-\phi_\nu^{(0)\dagger}(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu^{(0)}(\mathbf{x},E_\nu)\}d\mathbf{x}$$

$$+\int\sum_{E_\nu<-m}\{\phi_\nu^\dagger(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu(\mathbf{x},E_\nu)-\phi_\nu^{(0)\dagger}(\mathbf{x},E_\nu)\phi_\nu^{(0)}(\mathbf{x},E_\nu)\}\,d\mathbf{x}.\quad(3.15)$$

此式的左端，当去掉关于角动量的$(2j+1)$简并度后，就是在$-m<E<m$区间内以量子数κ标记的正粒子能级数减去反粒子能级数$n_\kappa^{(+)}-n_\kappa^{(-)}$. 所以下面的任务是对一定的$\kappa$值计算(3.15)式右端的积分.

用(3.1)式的记号，按文献[14]中的公式：

$$\int\phi_1^\dagger(\mathbf{x},E_1)\phi_2(\mathbf{x},E_2)\,d\mathbf{x}=\frac{-i}{E_2-E_1}\lim_{R\to\infty}R^2(f_1^*(R)g_2(R)+f_2(R)g_1^*(R)),\quad(3.16)$$

这里已假定 $\lim\limits_{r\to0}rf(r)=\lim\limits_{r\to0}rg(r)=0$,

对于散射态波函数有如下的渐近行为[15]：

$$\begin{aligned}f_1(R)&\xrightarrow[R\to\infty]{}\frac{A_1}{r}\cos\sigma_1=\frac{A_1}{r}\cos\left(k_1R+\kappa\frac{\pi}{2}+\delta_\kappa(k_1)\right)\\ g_1(R)&\xrightarrow[R\to\infty]{}i\frac{A_1}{r}\eta_1\sin\sigma_1,\end{aligned}\quad(3.17)$$

这里 $\kappa<0$ $(j=l+1/2)$, $\eta_1=\sqrt{\dfrac{E_1-m}{E_1+m}}$.

对于 $\kappa>0$, (3.17) 中 $\eta_1\to\dfrac{1}{\eta_1}$, $\sigma_1\to\tau_1$, $\tau_1=k_1R-\kappa\dfrac{\pi}{2}+\delta_\kappa(k_1)$.

先看 $\kappa<0$ 而 $E>m$ 的情况，以(3.17)式代入(3.16)式：

$$\int\phi_1^\dagger(\mathbf{x},E_1)\phi_2(\mathbf{x},E_2)d\mathbf{x}=$$

$$=\frac{A_1A_2}{2}\left\{\frac{\eta_2+\eta_1}{E_2-E_1}\sin(\sigma_2-\sigma_1)+\frac{\eta_2-\eta_1}{E_2-E_1}\sin(\sigma_2+\sigma_1)\right\}_{R\to\infty}.$$

现在令 $E_2\to E_1$, $E_2=E_1+dE$, 又用 $dE=\dfrac{k}{E}dk$, 并选 A_1 使括号外面的系数为 1, 于是(3.15)式右端的第一个积分(不包括负号)等于

$$\int_{0(E>m)}^{\infty} dk \int [\phi^\dagger(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) - \phi^{(0)\dagger}(\mathbf{x})\phi^{(0)}(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\delta_\kappa(\infty) - \delta_\kappa(m)] - (-1)^\kappa \frac{1}{2}\sin^2\delta_\kappa(m). \tag{3.18}$$

同理，(3.15)式右端第二个积分等于

$$\int_{0(E<-m)}^{\infty} dk \int [\phi^\dagger(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) - \phi^{(0)\dagger}(\mathbf{x})\phi^{(0)}(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\delta_\kappa(-\infty) - \delta_\kappa(-m)] + (-1)^\kappa \frac{1}{2}\sin^2\delta_\kappa(-m). \tag{3.19}$$

这里我们记相移为 $\delta_\kappa(E)$，注意第二项的符号不同，把此二式代回(3.15)式，就得到

定理四 Dirac 方程中对非奇性势的 Levinson 定理可推广为

$$(n_\kappa^{(+)} - n_\kappa^{(-)}) = \frac{1}{\pi}[\delta_\kappa(m) - \delta_\kappa(\infty) + \delta_\kappa(-\infty) - \delta_\kappa(-m)]$$

$$- \frac{\kappa}{|\kappa|}\frac{(-1)^\kappa}{2}[\sin^2\delta_\kappa(m) + \sin^2\delta_\kappa(-m)], \tag{3.20}$$

这里我们已经把 $\kappa > 0$ ($j = l - 1/2$) 的情形也写在一起了.

关于此定理的应用，我们想放在 Klein-Gordon 方程之后再讨论.

四、Klein-Gordon 方程的情形

1. Klein-Gordon 方程的有效势

在外势场 $V(r)$ 中的 Klein-Gordon 运动方程为

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V\right)^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = -\nabla^2\Phi(\mathbf{x}, t) + m^2\Phi(\mathbf{x}, t). \tag{4.1}$$

对定态解　　$\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x})e^{-iEt}$

$\phi(\mathbf{x})$ 满足一个 "Schrödinger" 型的方程：[16]

$$\left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{m}\left(EV - \frac{1}{2}V^2\right)\right]\phi = \frac{1}{2m}(E^2 - m^2)\phi. \tag{4.2}$$

其中　　$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{m}\left(EV - \frac{1}{2}V^2\right) \tag{4.3}$$

相当于非相对论量子力学中的"有效势"，它的形式除了定义用语的差别之外，实际上就是(3.7)式的前二项.

2. 波函数的正交完备性质

和 Dirac 方程不同，现在 K-G 方程的定态解并不简单地正交，而是满足如下的积分条件：[17]

$$\int \phi_k^*(E_k + E_l - 2V)\phi_l\, d\mathbf{x} = \epsilon_k \delta_{kl} \tag{4.4}$$

ϵ_k 是依赖于 ϕ_k 的一个数，它的符号十分重要，当 $\epsilon_k > 0$，$\phi_k(\mathbf{x})$ 描写一正粒子的态，如 $\epsilon_k < 0$，则 $\phi_k(\mathbf{x})$ 描写反粒子的态. 显然当 $V = 0$，$E > m$ 的态都是正粒子态，而

$E < -m$ 的态都是反粒子态. 当 $V \neq 0$, 在 $-m < E < m$ 能区出现正、反粒子的束缚态. 用 Green 函数可证完备性公式为[17]:

$$\sum_k \epsilon_k^{-1} \phi_k(\mathbf{x}) \phi_k^*(\mathbf{x}') = 0, \tag{4.5}$$

$$\sum_k \epsilon_k^{-1} \phi_k(\mathbf{x}) \phi_k^*(\mathbf{x}') E_k = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{4.6}$$

$$\sum_k \epsilon_k^{-1} \phi_k(\mathbf{x}) \phi_k^*(\mathbf{x}') E_k^2 = 2V(x)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{4.7}$$

3. 推广的 Levinson 定理

将(4.6)式乘2,减去(4.5)式乘 $2V$, 即得

$$\sum_k \frac{1}{\epsilon_k} \phi_k(\mathbf{x}) (2E_k - 2V) \phi_k^*(\mathbf{x}') = 2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{4.8}$$

再写出 $V = 0$ 时相应之表达式:

$$\sum_{k'} \frac{1}{\epsilon_{k'}} \phi_{k'}^{(0)}(\mathbf{x})\, 2E_{k'}\, \phi_{k'}^{(0)*}(\mathbf{x}') = 2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{4.9}$$

(4.8)与(4.9)相减,右端消去,左端可改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{-m<E_k<m} \frac{1}{\epsilon_k} \phi_k(\mathbf{x}) (2E_k - 2V) \phi_k^*(\mathbf{x}') \\
&+ \left[\sum_{E_k>m} \frac{1}{\epsilon_k} \phi_k(\mathbf{x}) (2E_k - 2V) \phi_k^*(\mathbf{x}') - \sum_{E_{k'}>m} \frac{1}{\epsilon_{k'}} \phi_{k'}^{(0)}(\mathbf{x}) (2E_{k'}) \phi_{k'}^{(0)*}(\mathbf{x}')\right] \\
&+ \left[\sum_{E_k<-m} \frac{1}{\epsilon_k} \phi_k(\mathbf{x})(2E_k - 2V) \phi_k^*(\mathbf{x}') - \sum_{E_{k'}<-m} \frac{1}{\epsilon_{k'}} \phi_{k'}^{(0)}(\mathbf{x})(2E_{k'})\phi_{k'}^{(0)*}(\mathbf{x}')\right] = 0.
\end{aligned}$$

令 $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$, 对 $\mathbf{x}$ 积分,如果 $\phi_k(\mathbf{x})$ 和 $\phi_{k'}^{(0)}(\mathbf{x})$ 分别满足(4.4)形状的式子,则我们便得到:

$$n^{(+)} + n^{(-)} = [N_0^{(+)} - N^{(+)}(E > m)] + [N_0^{(-)} - N^{(-)}(E < -m)] \tag{4.10}$$

其中 $n^{(+)}$ 和 $n^{(-)}$ 分别表示在 $-m < E < m$ 能区内的正粒子态数和反粒子态数,右端两个括号分别表示在 $E > m$ 和 $E < -m$ 区域内由于势场 $V(r)$ 引入后能级的减少数目.

仿照前面的经验,我们来计算(4.10)式右端的两个括号. 先在(4.2)式中令 $\phi(\mathbf{x}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$, 推得径向波函数 $u_l(r)$ 的方程:

$$\frac{d^2 u_{l1}}{dr^2} + \left[k_1^2 - 2\left(E_1 V - \frac{1}{2} V^2\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_{l1} = 0, \tag{4.11}$$

这里加上脚标 1 表示属于能量 $E_1(>0)$. 同样写出属于能量 E_2 的方程:

$$\frac{d^2 u_l^2}{dr^2} + \left[k_2^2 - 2(E_2 V - \frac{1}{2} V^2) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_{l2} = 0, \tag{4.12}$$

$(4.11) \times u_2 - (4.12) \times u_1$ (略去脚标中的 l), 得:

$$u_2 \frac{d^2u_1}{dr^2} - u_1 \frac{d^2u_2}{dr^2} = (E_2 - E_1)(E_2 + E_1 - 2V)u_1 u_2.$$

对 r 从 0 到 R 积分，得

$$\int_0^R (E_2 + E_1 - 2V) u_1 u_2 dr = \frac{1}{E_2 - E_1}\left[u_2 \frac{du_1}{dr} - u_1 \frac{du_2}{dr}\right]_0^R.$$

利用 $u(0) = 0$ 及 $u_1(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} B\sin\left(k_1 R + \delta_l(k_1) - \frac{l}{2}\pi\right)$,

然后我们选 B，使 $B^2E_1\pi = 1$，对于 $E_1 > m$（下面略去脚标 l），把二式相减，令 $k_2 \to k_1 = k$，再对 k 积分，就给出(4.10)式右端第一个括号的负值：

$$\begin{aligned}[N^{(+)}(E > m) - N_0^{(+)}] &= \int_0^\infty dk \int_0^\infty [(2E - 2V)u^2 - u^{(0)^2}(2E)]dr \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\delta_l}{dk} dk + (-1)^l \int_0^\infty (1 - \cos 2\delta_l)\,\delta(2k)\,dk \\ &= \frac{1}{\pi}[\delta_l(\infty) - \delta_l(m)] + \frac{(-1)^l}{2}\sin^2\delta_l(m).\end{aligned} \tag{4.13}$$

对于 $E < -m$，实数 B 仍取得一样，注意此时 $E < 0$，$\epsilon_k < 0$，则可得

$$\begin{aligned}[N^{(-)}(E < -m) - N_0^{(-)}] &= -\int_0^\infty dk \int_0^\infty [(2E - 2V)u^2 - 2E u^{(0)^2}]dr \\ &= \frac{1}{\pi}[\delta_l(-\infty) - \delta_l(-m)] + \frac{(-1)^l}{2}\sin^2\delta_l(-m).\end{aligned} \tag{4.14}$$

把(4.13)和(4.14)式代入(4.10)式，就得到

定理五 Klein-Gordon 方程中对非奇性势的 Levinson 定理的推广形式：

$$\begin{aligned}n_l^{(+)} + n_l^{(-)} &= \frac{1}{\pi}[\delta_l(m) - \delta_l(\infty) + \delta_l(-m) - \delta_l(-\infty)] \\ &\quad - \frac{(-1)^l}{2}[\sin^2\delta_l(-m) + \sin^2\delta_l(m)].\end{aligned} \tag{4.15}$$

我们还可以找到另一种推广形式，这就是假定能级不但有(4.10)所示的在整体上的守恒性(完备性)，而且对于正反粒子分别也是守恒的(这一点需要势场 V 不超过一个临界值，见下面讨论)．那末可以写出：

$$N_0^{(+)} = n^{(+)} + N^{(+)}(E > m),\quad N_0^{(-)} = n^{(-)} + N^{(-)}(E < m).$$

又当 $V = 0$ 时显然应有 $N_0^{(+)} = N_0^{(-)}$，则可得

$$n^{(+)} - n^{(-)} = [N_0^{(+)} - N^{(+)}(E > m)] - [N_0^{(-)} - N^{(-)}(E < -m)]. \tag{4.16}$$

以(4.13)和(4.14)代入(4.16)式，即有

定理六 Klein-Gordon 方程中 Levinson 定理的又一可能形式：

$$\begin{aligned}n_l^{(+)} - n_l^{(-)} &= \frac{1}{\pi}[\delta_l(m) - \delta_l(\infty) - \delta_l(-m) + \delta_l(-\infty)] \\ &\quad - \frac{(-1)^l}{2}[\sin^2\delta_l(m) - \sin^2\delta_l(-m)].\end{aligned} \tag{4.17}$$

五、对方势阱的应用及讨论

在应用举例之前，我们先要讨论 Dirac 方程和 K-G 方程的异同．

(1) 有效势不同.

(2) 本征函数正交性不同.

(3) 负能态的解释不同: Dirac 方程的一切能级包括正、负都被认为是属于粒子(如电子)的,粒子填充到费米能级 E_F, E_F 以下的空穴才对应于反粒子(如正电子);而 K-G 方程的解中只要(4.4)式 $\epsilon_k < 0$ 的,就直接对应反粒子态.

(4) 有效势对于 E 和 V 的对称性不同:

在 K-G 方程中: $E \to -E$, $V \to -V$, 使 V_{eff} 不变 (5.1)

但在 Dirac 方程中: $E \to -E$, $V \to -V$, $m \to -m$, 使 V_{eff} 不变 (5.2)

此外, K-G 方程的有效势 V_{eff} 还在代换 $E \to -E$, $V \to V-2E$ 下不变. (5.3)

(5) 当短程势 $\lambda V(r)$ 增强时 ($\lambda > 0$, $V(r) < 0$), Dirac 粒子的束缚态能级单调下降: [18],[12]

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \langle \phi | V(r) | \phi \rangle < 0. \tag{5.4}$$

而对 K-G 方程,则可证

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{2}{\epsilon\lambda} \langle \phi | [EV-V^2] | \phi \rangle. \tag{5.5}$$

(ϵ 由(4.4)式定义),故只能断定,对 $\epsilon > 0$ 的正粒子能级,当 $E > 0$ 时是下降的. 而 $\epsilon < 0$ 的反粒子能级当 $E > 0$ 时是上升的. 结果在 $-m < E < m$ 区域出现了正反粒子能级重叠的现象[19].

(6) 当势场增强到一个临界值 V_{cr}, Dirac 粒子的最低束缚态 $1s$ 能级降到 $E_{1s} = -m$, 继而沉入连续谱,随即可能会发生正-反粒子对产生的过程,中性真空转变为荷电真空[12,16,18,20,27]. 对于 K-G 方程,当 $V = V_{cr}$, (4.4)式中 $\epsilon_k = 0$, 此时能级变为复数,也可解释为粒子的成对产生[7,19,16].

(7) 在 $E = -m$ 处波函数的归一化性质也不同. 见下.

为具体应用推广的 Levinson 定理,我们来看最简单的势阱——方阱:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0. & r > a \end{cases} \tag{5.6}$$

实际上,方阱势在短程势中是足够典型的[16]. 以下只考虑 s 态. 则 Dirac 方程的束缚态能级决定于方程[21],[16]:

$$\sqrt{\frac{E+V_0+m}{E+V_0-m}}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{E+V_0+m} - \frac{1}{E+m}\right) - \sqrt{\frac{m-E}{m+E}}\right] \tan\left(a\sqrt{(E+V_0)^2-m^2}\right) = 1. \tag{5.7}$$

而散射相移 $\delta(E)$ 决定于方程:

$$\frac{1}{E+V_0+m}\left[\sqrt{(E+V_0)^2-m^2}\cot\left(a\sqrt{(E+V_0)^2-m^2} - \frac{1}{a}\right)\right] = \frac{1}{E+m}\left[\sqrt{E^2-m^2}\cot\left(a\sqrt{E^2-m^2}+\delta(E)\right) - \frac{1}{a}\right]. \tag{5.8}$$

对于 K-G 方程，束缚态能级决定于方程[16]：

$$\sqrt{(E+V_0)^2-m^2}\cot\left(a\sqrt{(E+V_0)^2-m^2}\right)=-\sqrt{m^2-E^2},\tag{5.9}$$

而散射相移 $\delta(E)$ 决定于方程：

$$\sqrt{(E+V_0)^2-m^2}\cot\left(a\sqrt{(E+V_0)^2-m^2}\right)=\sqrt{E^2-m^2}\cot\left(a\sqrt{E^2-m^2}+\delta(E)\right).\tag{5.10}$$

在这情形下 $$\delta(\infty)=\delta(-\infty)=0\tag{5.11}$$

我们对很狭的固定 a 的势阱，分析了随着 V_0 增大 $1s$ 能级从 m 降到 0 再降到 $-m$ 以下的全过程，并计算了相应的相移，结果如下表所示，表中记产生 $E_{1s}=m, 0, -m$ 之 V_0 分别为 V_1, V_2, V_3，而 V_4 为 K-G 方程中之临界势.

表　I

	Dirac 方程				Klein-Gordon 方程			
	$\cot\delta(m)$	$\delta(m)$	$\cot(-m)$	$\delta(-m)$	$\cot\delta(m)$	$\delta(m)$	$\cot\delta(-m)$	$\delta(-m)$
V_1	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0
$V_1(E_{1s}=m)$	0	$\pi/2$	∞	0	0	$\pi/2$	∞	0
$V_2(E_{1s}=0)$	∞	π	∞	0	$-\infty$	π	∞	0
$V_3(E_{1s}=-m)$	∞	π	∞	0	$-\infty$	π	0	$\pi/2$
$>V_3$	∞	π	$-\infty$	π	$-\infty$	π	$-\infty$	π
V_4	∞	π	$-\infty$	π	$-\infty$	π	$-\infty$	π

对于 Dirac 方程，我们一直取 E_F 在 $1s$ 能级之下，紧靠在 $E=-m$ 之上，所以在 $-m<E<m$ 区间内没有反粒子能级，$n_\kappa^{(-)}=0$，而且只有 $n_\kappa^{(+)}=0$ 或 $1(\kappa=-1)$ 两种可能值．此时公式(3.20)是：(略去脚标 $\kappa=-1$)

$$n^{(+)}=\frac{1}{\pi}(\delta(m)-\delta(-m))-\frac{1}{2}(\sin^2\delta(m)+\sin^2\delta(-m)).\tag{5.12}$$

用表 I 的相移数值代入，即见两端是符合的，但是有两点值得注意：

(1) $E=m$ 的 s 态是“半束缚态”，它的波函数不能归一化，这与非相对论情形相同，所以 $V=V_1$ 时 $n^{(+)}$ 仍为 0．然而 $E=-m$ 的 s 态却是一个束缚态，它的波函数平方可积，因此当 $V=V_3$ 时 $n^{(+)}=1$． Dirac 方程的 $E=-m$ 能级除 $P_{1/2}$ 态 ($j=1/2$, $\kappa=1$) 是不可归一化的之外，都是可归一化的[16],[21],[22].

(2) 我们形式地把公式一直用到临界势 $V_{cr}=V_3$，即产生沉潜态和荷电真空的边缘，而且照趋势看，当 $V>V_3$ 似乎仍适用.

Migdal 曾指出，荷电真空尽管能量较低，在概念上却不如中性真空优越，费米能级的选取是不应该太任意的[23]．我们同意他的看法．在这里，在一个外势场中，粒子填充情况的改变将会直接影响束缚态数的计算，很难相信此时散射相移和束缚态数会继续满足定理的要求.

对于 K-G 方程，(4.17)式成为：(略去脚标 $l=0$)

$$n^{(+)} - n^{(-)} = \frac{1}{\pi}(\delta(m) - \delta(-m)) - \frac{1}{2}[\sin^2\delta(m) - \sin^2\delta(-m)]. \tag{5.13}$$

(4.15) 则是:

$$n^{(+)} + n^{(-)} = \frac{1}{\pi}(\delta(m) + \delta(-m)) - \frac{1}{2}[\sin^2\delta(m) + \sin^2\delta(-m)]. \tag{5.14}$$

用表 I 对这个式子进行检验时,我们注意到和 Dirac 方程不同之点在于现在 $E = -m$ 的 s 态波函数是不可归一化的,因此和 $E = m$ 的 s 态一样,只是半束缚态. 此外,现在的反粒子能级从 $V = V_3$ 从 $E = -m$ 开始升起后,$n^{(-)} = 1$,到 $V_0 = V_4$ 时和上面降下来的粒子能级一起消失. 看来这以后(5.13)式还可以用而(5.14)式归于无效.

最后,应该承认,本文的证明还是不够严格的,因而对 Levinson 定理能够适用的势可放宽到什么程度,可能有那些例外等问题,还很难讲清楚. 最近,关于 Levinson 定理在各种情形下的推广文章很多[24]—[26]. 不过我们猜测,本文和其他作者在本质上一致的所谓渐近完备性的证明方法意味着,只要束缚态数有限,Levinson 定理可以对很一般的势成立.

杨振宁教授建议了这个题目并作了启发性的讨论,孙鑫、戴显熹等同志作了多次讨论,作者谨表示衷心的谢意.

参 考 文 献

[1] N. Levinson, Danske Videnskab, *Selskab, Mat-fys. Medd.*, **25** (1949), No. 9.
[2] L. Schiff, Quantum Mechanics;
M. Goldberger, K. Watson, Collision Theory.
[3] J. M. Jauch, *Helv. Phys. Acta.*, **30** (1957), 143.
[4] A. Martin, *Nuovo Cimento*, **7** (1958), 607.
[5] P. Roman, Advanced Quantum Theory, p. 384.
[6] 见[5], p. 300.
[7] L. I. Schiff, H. Snyder, J. Weinberg, *Phys. Rev.*, **57** (1940), 315.
[8] 见[5], p. 173. 但书上有误.
[9] R. Jackiw, G. Woo, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 1643.
[10] J. Fridel, *Nuovo Cimento, Suppl.*, **7** (1958), 287;
Phi. Mag., **43** (1952), 153.
R. J. Sokel, *A. J. Phys.*, **45** (1977), 676.
[11] 戴显熹、倪光炯, 复旦学报, (自然科学版) **3** (1977), 1.
[12] J. Reinhardt, W. Greiner, Reports on Progress in Phys, **40** (1977). No. 3.
[13] J. Rafelski, B. Müller, W. Greiner, *Nucl. Phys.*, **B68** (1974), 585.
[14] 戴显熹, 复旦学报(自然科学版), **1** (1977), 100.
[15] S. Flüyge, Practical Quantum Mechanica, 2 (1974), 210.
[16] B. C. Попов, *ЖЭТФ.*, **59** (1970), 965.
[17] H. Snyder, J. Weinberg, *Phys. Rev.*, **57** (1940), 307.
[18] Я. Б. Зельдович, B. C. Попов, *УФН.*, **105** (1971), 403.
[19] A. Klein, J. Rafelski, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 300; **D12** (1975), 1194.
[20] B. Müller, *ARNS*, **26** (1976), 351.
[21] W. Pieper, W. Greiner, *Z. Physik.*, **218** (1969), 327.
[22] A. Б. Мигдал, A. M. Переломов. B. C. Попов, *ЯФ.*, **14** (1971), 874.
[23] A. Б. Мигдал, *УФН.*, **123** (1977), 369.
[24] T. A. Osborn, D. Bolle, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 432.
[25] R. G. Newton, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 1348; 1582.
[26] B. Berg et al., *Phys. Rev.*, **D17** (1978), 1172.
[27] J. Rafelski, L. P. Fulcher, A. Klein, *Physics Reports*, **38C** (1978), No. 5.

THE LEVINSON THEOREM AND ITS GENERALIZATION IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

Ni Guang-jiong
(*Fudan University, Shanghai*)

Abstract

The Levinson Theorem in non-relativistic quantum mechanics is derived by Green function method which leads to the following expression:

$$n_l = \frac{1}{\pi}[\delta_l(0) - \delta_l(\infty)] - \frac{(-1)^l}{2}\sin^2\delta_l(0)$$

Then its generalization in Dirac equation is found as:

$$n_\kappa^{(+)} - n_\kappa^{(-)} = \frac{1}{\pi}[\delta_\kappa(m) - \delta_\kappa(\infty) + \delta_\kappa(-\infty) - \delta_\kappa(-m)]$$
$$- \frac{\kappa}{|\kappa|}\frac{(-1)^\kappa}{2}[\sin^2\delta_\kappa(m) + \sin^2\delta_\kappa(-m)]$$

There are two expressions for Klein-Gordon equation:

$$n_l^{(+)} \pm n_l^{(-)} = \frac{1}{\pi}\{\delta_l(m) - \delta_l(\infty) \pm [\delta_l(-m) - \delta_l(-\infty)]\}$$
$$- \frac{(-1)^l}{2}[\sin^2\delta_l(m) \pm \sin^2\delta_l(-m)]$$

The implication of these theorems and the range of their validity with relevant problems are discussed. An example of S state case in square well potential is treated for testing these formulas.