常曲率空间与SU_2对偶荷

葛墨林　段一士
（兰州大学）

摘要

讨论了四维常曲率空间拓扑性质与SU_2对偶荷间的联系，所得的结论是三维同位旋空间拓扑荷的自然推广.

本工作是作者以前工作[1-3]的自然推广. 在[1]中，利用通常时空向SO_3同位旋空间内单位模矢量函数$n^a(x)$ $(a=1, 2, 3)$的映射，讨论了SO_3规范势的拓扑性质. 显然，此一拓扑性质仅由 Higgs 场所决定. 由于$n^a = \phi^a/\phi$，在$\phi = 0$处将产生奇异，而且ϕ的原点是三维同位旋空间中唯一的奇点，所以在讨论约化为$U(1)$的情况时，此空间事实上是球对称的. 它所对应的几何即是一个三维同位旋空间中的二维（单位半径）球面. 通过通常时空向同位旋空间的映射，$\phi^a = 0$将对应通常时空中的经典流形式. 这种流所体现的乃是$n^a(x)$的"自然"性质，或者说其本质是一种几何性质. 不过由于此种几何所规定的内在联系，上述几何属性与规范势必存在一定的联系（至少同规范势中的一部分相联系）. [1]中指出，最简单的要求是使$\nabla_\mu n^a = 0$，这种无挠条件的限制意味着标架（与 Higgs 场有关）必然与联络（规范势）发生关系，在SO_3情况，这个关系是相当简单的. 并且由于同位旋空间这时是三维，而通常时空为四维，因之这种映射是允许的，一般地说，设α为同位旋指标，则$\alpha \leqslant 4$时映射是允许的.

那么如何将上述观念推广到一般SU_2群的情况？按一般的步骤自然应当首先作出SO_4同位旋空间的几何，然后分解成为两个SU_2，并进一步应用以上的步骤讨论其对偶荷等问题. 因此首先在于如何构造四维同位旋空间的几何，它应当是三维同位旋空间中单位球的推广，最自然的推广便是四维常曲率空间. 在工作[4]中，从共形平坦空间的角度已经提出了这个问题，那里指出，共形平坦空间无源的充要条件为$R=$常数.（R为其标曲率）不过，事实上，我们不必仅仅限于共形平坦空间的情况. 因为从[2]已经看到，三维情况时，当$\phi^a = r^a$ $(a=1, 2, 3)$即狭义球对称时，规范势是无源解，而当$\phi^a(x^1, x^2, x^3, x^0)$是一种复杂的映射时，那么相应的规范势就不一定能满足无源解. 这样，最普遍的性质似乎应当是相应 Higgs 场的拓扑性质，而满足无源条件的规范势仅是其中的一类.

我们考虑一个四维欧氏常曲率同位旋空间，这个空间是由$\phi^\alpha(x)$ $(\alpha=1, 2, 3, 4)$形成的，对该空间附加以无挠条件，即[3]中的挠率张量为0的条件. 由此出发，我们将会看到通常的半子解便自然地包含在这个几何框架之中，当然[4]中的讨论也很容易包含在这

本文1979年2月6日收到.

个常曲率空间之中.

本文将从[3]的讨论出发,指出:一个四维(欧氏)常曲率空间将给予通常半子解以合理的几何说明,并同时将[1, 2]中"映射"的观念自然推广到一般的 SU_2 群规范势的情况. 文中所用的方法不超出 Cartan 活动标架原始理论的范畴[5](只不过是在同位旋空间中).

一、

按[3]我们将考虑以 I_A, K_a 为基底的代数,其中 I_A, K_a 满足以下对易关系

$$
\begin{aligned}
&[I_A, I_B] = C_{AB}^D I_D;\\
&[K_a, I_B] = D_{aB}^b K_b;\\
&[K_a, K_b] = G_{ab}^A I_A.
\end{aligned} \tag{1}
$$

代替[3]中的提法, 将称 I_A, K_a 组成的大群为 G, 称其子群 I_A 为群 H, 而 K_a 则称为 G 中的"破缺部分". 如果取 $I_A = I_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ 为洛仑兹群生成元, $\gamma_a = \gamma_\alpha$ 为通常 Dirac 矩阵形式的矩阵(不过均在同位旋空间中). 以 $\omega_\mu^\alpha(x)$ 表示标架, $\theta_\mu^{\alpha\beta}(x)$ 表示与群 H 相应的联络(规范势),则无挠条件为[3]

$$
\partial_\mu \omega_\nu^{(\alpha)} - \partial_\nu \omega_\mu^{(\alpha)} - \frac{1}{2} D_{\beta,\rho\sigma}^{\alpha} (\omega_\mu^{(\beta)} \theta^{(\rho\sigma)}_\nu - \omega_\nu^{(\beta)} \theta^{(\rho\sigma)}_\mu) = 0. \tag{2}
$$

其中 $\alpha, \beta, \cdots$ 取值 1, 2, 3, 4 表示同位旋指标. 在[3]中仅用到无挠条件, 对于曲率张量没有附加任何限制,现在我们对这个空间附加以常曲率的限制,由[5]稍加变形易知常曲率条件为

$$
F_{\mu\nu}^{(\rho\sigma)} = \partial_\mu \theta_\nu^{(\rho\sigma)} - \partial_\nu \theta_\mu^{(\rho\sigma)} - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{\rho\sigma} \theta_\mu^{(\alpha\beta)} \theta_\nu^{(\gamma\delta)} = k(\omega_\mu^{(\rho)} \omega_\nu^{(\sigma)} - \omega_\nu^{(\rho)} \omega_\mu^{(\sigma)}). \tag{3}
$$

注意(2)与(3)两式左端的因子 1/2 是由于洛仑兹群独立参数为 6, 应保证与通常黎曼几何相应. (3)式中 k 为常数,特别, 当 $k = -1$ 时给出常曲率为 $R = +1$. (2)和(3)是此种空间几何的限制条件,因为并非任意给定的 $\omega_\mu^{(\alpha)}$ 与 $\theta_\mu^{(\rho\sigma)}$ 就一定能同时满足(2)与(3)两式,但它们并不能限定 $\omega_\mu^{(\alpha)}$ 与 $\theta_\mu^{(\rho\sigma)}$ 的具体形式, 换言之,限制(2)与(3)是个很宽的限制.

二、

当同位旋空间与 E_4 重合时,在通常四维黎曼几何中, $\omega_\mu^\alpha = \lambda_{\mu(\alpha)}(x)$ 即为四脚正交标架("半度规"), $\theta_\mu^{(\alpha\beta)} = \eta_{\mu(\alpha\beta)}$, 且 $\eta_{(\alpha\beta\gamma)} = \lambda_{(\alpha)}^\mu(x)\eta_{\mu(\beta\gamma)}$ 为李西旋度系数. 利用 $g_{\mu\nu}(x) = \lambda_{\mu(\alpha)}\lambda_{\nu(\alpha)}$ 以及 $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \lambda_{\rho(\alpha)}\lambda_{\sigma(\beta)}F_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$, 易知(3)正是常曲率黎曼空间(爱因斯坦空间). 注意以上结论对 M_4 仍为正确这一显然事实.

由于存在(3)式,其左、右两端皆由 $g_{\mu\nu}$ 所构成,于是将对 $g_{\mu\nu}$ 构成一定的约束. [4]中的作法即为如果人为地要求

$$
g_{\mu\nu} = e^{2\omega} \delta_{\mu\nu}. \tag{4}
$$

那么 $u = e^{\sigma}$ 即不能任意，因为形如 (4) 的度规 $g_{\mu\nu}$ 并不“自然”满足 (2) 与 (3)，从而 (3) 变为决定 u 的方程，易知此时 u 必须满足

$$\Box u = R u^3, \tag{5}$$

这即是 [4] 中的结果．当然如果人为要求 $g_{\mu\nu}$ 是另外的形式，那么原则上有无数种选择方程形式的余地，既然我们已知道瞬子解的一种形式的解，便可认为 (4)、(2)、(3) 给出了这种瞬子解形式的一种几何说明．于是，方程 (5) 的形式与度规形式 (4)、常曲率要求 (2)、(3) 有密切的关系．

我们看到，从以上意义来说，共形平坦空间并非“自然”满足 (2) 与 (3) 的要求的标架与联络的形式，而是为得到方程 (5) 应人为加以要求的形式．

三、

容易找到对任意 x 流形上存在的任意函数 $\phi^{\alpha}(x)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$，它均可“自然”满足 (2) 与 (3) 的 $\omega_{\mu}^{(\alpha)}$ 与 $\theta_{\mu}^{(\rho\sigma)}$ 的形式，“自然”的含义是 $\omega_{\mu}^{(\alpha)}$ 与 $\theta_{\mu}^{(\rho\sigma)}$ 通过 (2) 与 (3) 可以用某任意函数 $\phi^{\alpha}(x)$ 表示，但 (2) 与 (3) 并不对 $\phi^{\alpha}(x)$ 表现任何限制．

一组“自然”解可以是

$$\omega_{\mu}^{(\alpha)} = \frac{1}{\phi}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\phi^{\alpha}\phi^{\beta}}{\phi^2}\right)\partial_{\mu}\phi^{\beta}, \tag{6}$$

$$\theta_{\mu}^{(\rho\sigma)} = -\frac{1}{\phi^2}(\phi^{\rho}\partial_{\mu}\phi^{\sigma} - \phi^{\sigma}\partial_{\mu}\phi^{\rho}). \tag{7}$$

直接验证可知，(6)、(7) 对任意 $\phi^{\alpha}(x)$ 均满足 (2) 与 (3)，并且相应于

$$k = -1, \tag{8}$$

显然正表明 (6)、(7) 所对应的常曲率为 $+1$．引入 $n^{\alpha} = \phi^{\alpha}/\phi$，易知 (6) 与 (7) 相应于

$$\omega_{\mu}^{(\alpha)} = \partial_{\mu} n^{(\alpha)}, \tag{9}$$

$$\theta_{\mu}^{(\rho\sigma)} = -(n^{\rho}\partial_{\mu}n^{\sigma} - n^{\sigma}\partial_{\mu}n^{\rho}), \tag{10}$$

其中

$$n^{\alpha}n^{\alpha} = 1, \quad n^{\alpha}\partial_{\mu}n^{\alpha} = 0. \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{11}$$

特别要注意，在这里对 $\phi^{\alpha}(x)$ 是四维欧氏空间，但 ϕ^{α} 作为 x 的函数，对 x 的流形没有什么限制，这样我们就可以象 [2] 那样，只须从 ϕ^{α} 本身出发研究 $\theta_{\mu}^{(\rho\sigma)}$ 的分解式．

此外，当狭义球同步时，上面结果回到 [6]，但是由于采用的形如 (1) 的群 G，因而出现一个因子 1/2．

以下按通常方式分解为 SU_2 规范势，令

$$I_i^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}I_{jk} \pm I_{i4}\right),$$

$$[I_i^{(\pm)}, I_j^{(\pm)}] = -\varepsilon_{ijk}I_k^{(\pm)}, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

则可有

$$\theta_{\mu}^{(+)k} = -\frac{1}{\phi^2}\{\varepsilon_{ijk}\phi^i\partial_{\mu}\phi^j + (\phi^k\partial_{\mu}\phi^4 - \phi^4\partial_{\mu}\phi^k)\}, \tag{12}$$

$$\theta_{\mu}^{(-)k} = -\frac{1}{\phi^2}\{\varepsilon_{ijk}\phi^i\partial_{\mu}\phi^j - (\phi^k\partial_{\mu}\phi^4 - \phi^4\partial_{\mu}\phi^k)\}, \tag{13}$$

$$\theta_\mu = \theta_\mu^{(+)k} I_k^{(+)} + \theta_\mu^{(-)k} I_k^{(-)}. \tag{14}$$

引入

$$g = (\phi^4 - i\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma})/\phi, \quad g^{-1} = (\phi^4 + i\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma})/\phi, \tag{15}$$

则

$$\theta_\mu^{(+)} = -1/2\, g^{-1}\partial_\mu g, \tag{16}$$

$$\theta_\mu^{(-)} = -1/2\, g\partial_\mu g^{-1}. \tag{17}$$

由于 $\phi^\alpha(x)$ 可以是 x 的任意函数，所以(16)、(17)显然就是通常 DFF 半子解的一般形式，尤其，当狭义球对称时回到通常形式.

由于

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu], \tag{18}$$

$$I_\mu = \frac{1}{8\pi^2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} T_r(A_\alpha\partial_\beta A_\gamma - 2/3 A_\alpha A_\beta A_\gamma), \tag{19}$$

而且

$$\frac{i}{4\pi^2}\Box_\phi \frac{1}{\phi^2} = \delta^4(\phi), \tag{20}$$

其中

$$\Box_\phi = \partial_{\phi^\alpha}\partial_{\phi^\alpha}$$

与[2]类似，如引入

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\phi^\lambda\partial_\nu\phi^\beta\partial_\rho\phi^\gamma\partial_\sigma\phi^\delta = \varepsilon_{\lambda\beta\gamma\delta} D\left(\frac{\phi}{x}\right), \tag{21}$$

其中

$$D\left(\frac{\phi}{x}\right) = \frac{(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)}{(x^1, x^2, x^3, x^0)}$$

为 ϕ^α 与 $x^1, \cdots, x^0$ 变换的雅可比行列式易知其对偶荷为

$$D^{(+)} = \partial_\mu I_\mu^{(+)} = \frac{1}{2} D\left(\frac{\phi}{x}\right)\delta^4(\phi). \tag{22}$$

如果 ϕ 存在零点，则有

$$\delta^4(\phi) = \frac{1}{\left|D\left(\frac{\phi}{x}\right)\right|}\sum_i \delta^4(x - a^i). \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{23}$$

其中 i 表 $\phi(x) = 0$ 的第 i 个根指标，a_i 为第 i 个时空固定点. 于是

$$D^{(+)} = \frac{1}{2}\frac{D\left(\frac{\phi}{x}\right)}{\left|D\left(\frac{\phi}{x}\right)\right|}\sum_i \delta^4(x - a^i), \tag{24}$$

$$D^{(-)} = -\frac{1}{2}\frac{D\left(\frac{\phi}{x}\right)}{\left|D\left(\frac{\phi}{x}\right)\right|}\sum_i \delta^4(x - a^i). \tag{25}$$

自然，由于现在是 4 个变量与 4 个变量之间的变换，所以不能象三维—四维变换那样具有轨道的意义。

上述结果显然是过去三维作法的自然推广。当狭义球同步时满足无源解，但与以前的讨论类似，当由 $x^1, \cdots, x^0$ 映射到任意的 $\phi^\alpha(x)$ 时，一般说不一定是无源解。

还应当注意的是，由 (6) 看出，一定形式的标架可以给出拓扑性质，但由 (6) 决定的标架所形成的空间并非通常的黎曼空间几何，因为在决定出 ϕ^α 空间的 $g_{\alpha\beta}(\phi)$ 之后并不存在其逆 $g^{\alpha\beta}(\phi)$，这是与[4]中所讨论的情况非常不同的一点。

四、

上一段适合 (2)、(3) 要求的形式 (6) 与 (7) 并非是唯一的形式，因为符合 (2)、(3) 要求的形式还可能是很多的。例如以下形式

$$\omega_\mu^{(\alpha)} = \left\{\delta_{\alpha\beta} + \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\phi^\alpha\phi^\beta}{\phi^2}\right)\left(\frac{\sin\phi}{\phi} - 1\right)\right\}\partial_\mu\phi^\beta, \tag{26}$$

$$\theta_\mu^{(\rho\sigma)} = -\{\phi^\rho\partial_\mu\phi^\sigma - \phi^\sigma\partial_\mu\phi^\rho\}\left(\frac{1-\cos\phi}{\phi^2}\right), \tag{27}$$

同样可以满足 (2) 与 (3)，而且使 $k=-1$. 上式中 ϕ 可以理解为无量纲的量，即某一 Higgs 场除以某一常数，该常数具有长度量纲。

此时有

$$\theta_\mu^{(+)} = -\frac{1}{2}(1-\cos\phi)g^{-1}\partial_\mu g; \tag{28}$$

$$\theta_\mu^{(-)} = -\frac{1}{2}(1-\cos\phi)g\partial_\mu g; \tag{29}$$

它并不具有拓扑性质，因而并不具有确定的半子荷。为考虑此时 ϕ^α 自身空间的几何性质，可以考虑由拉氏函数

$$\mathscr{L}_0 = \omega_\mu^\alpha\omega_\mu^\alpha = g_{\alpha\beta}(\phi)\partial_\mu\phi^\alpha\partial_\mu\phi^\beta$$

决定的 ϕ^α 空间自身的度规，由 (26) 易知有

$$g_{\alpha\beta}(\phi) = \delta_{\alpha\beta} + \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\phi^\alpha\phi^\beta}{\phi^2}\right)\left(\frac{\sin^2\phi}{\phi^2} - 1\right), \tag{30}$$

其逆

$$g^{\alpha\beta}(\phi) = \delta_{\alpha\beta} + \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\phi^\alpha\phi^\beta}{\phi^2}\right)\left(\frac{\phi^2}{\sin^2\phi} - 1\right), \tag{31}$$

这正是[7]中表达式在四维空间的推广。可计算出其相应的第二类克氏符号为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(\phi) = \frac{1}{\phi^2}\left\{(\phi\operatorname{ctg}\phi - 1)(P_{\mu\alpha}\phi^\nu + P_{\nu\alpha}\phi_\mu) + \left(1 - \frac{\sin 2\phi}{2\phi}\right)P_{\mu\nu}\phi^\alpha\right\}, \tag{32}$$

其中

$$P_{\alpha\beta}(\phi) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\phi^\alpha\phi^\beta}{\phi^2}.$$

相应的 ϕ^α 空间的李西张量可计算出，为

$$R_{\alpha\beta}(\phi) = 3g_{\alpha\beta}(\phi), \quad (33)$$

即对 ϕ^α 自身空间仍为常曲率空间. 这些都是 [8] 的推广.

由 (27) 知在这种形式的选择中,当 $\phi \to 0$ 时,由于 $\frac{1-\cos\phi}{\phi^2}$ 因子的出现, 使得此时势不再具有奇异,因而不存在对偶荷. 如果用 [8] 中的方法将其用泰勒级数展开,近似采用 $\Box\phi^\alpha=0$ 的运动方程量子化,那么可以考虑 ϕ 场自身和 ϕ 场同相应夸克间的互作用. 尤其, 当采用超传播子方法时可以得到若干收敛的结果, 然而由于它们已不属于半子解, 因而这种互作用的物理意义尚很不清楚,不过它显然是 Chiral 代数类似形式的推广.

五、

综合以上所述, 首先将 x 空间映射为四维同位旋空间, 那么目前许多有关瞬子、半子的性质概括地说均可用常曲率空间给予几何说明. 同时, 这个空间尚包括不具有确定对偶荷的另一范畴,而且在作动力计算时却可获得收敛的结果, 它可以看作是类似于 Chiral 代数作法的合理推广.

因此,目前有关拓扑荷的讨论 (包括狭义球对称时的无源解) 实际上都属于常曲率同位旋空间的几何性质,尤其是狭义球对称时更明显地看出无源解同拓扑性质的一致关系, 故而从这个意义上说,此时无源解并未反映动力性质,如果单纯从这个角度处理有关规范场问题,其所能获得的物理结论恐怕会受到一定限制.

作者感谢吴詠时、高心海同志的讨论与帮助.

参 考 文 献

[1] 侯伯宇、段一士、葛墨林,兰州大学学报(自然科学版), **2** (1975), 26.
[2] 段一士、葛墨林,兰州大学学报, **2** (1978), 53.
[3] 段一士、葛墨林,高能物理与核物理, **2** (1978), 511.
[4] 谷超豪、沈纯理、胡和生、杨振宁,复旦大学学报, **4** (1977), 8.
[5] 嘉当,《黎曼几何学》,姜立夫等译(科学出版社, 1964).
[6] 冼鼎昌、李华钟、郭硕鸿,中山大学学报(自然科学版), **2** (1977), 47.
[7] М. К. Волков, В. Н. Первушин, *УФН*, **120** (1976), 363.
[8] М. К. Волков, В. Н. Первушин, *Я. Ф.*, **20** (1974), 762.

SPACE OF CONSTANT CURVATURE AND SU_2-DUAL CHARGES

Ge Mo-lin Duan Yi-shi
(*Lanchow University*)

Abstract

The connections of SU_2-dual charges and the topological properties in 4-dimensional space of constant curvature are discussed. The conclusions derived here are natural generalization of topological charges in 3-dimensions isospace.