第4卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 2
1980 年 3 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1980

研究简报

强子同位旋的有限群分类

徐教林 吴詠时 陈 时 郭汉英
（北京航空学院） （中国科学院理论物理研究所）

一、

杨振宁等人很早就建议采用三维旋转群的有限子群来对强子同位旋进行分类[1]. 最近文献[2]又继续进行了讨论. 这些处理尽管容易得到强子同位旋具有确定上限的结论，但是还存在着一些尚待解决的问题. 例如，这些作者都是用有限群对强子直接分类，往往不得不把介子和重子分别填入不同有限群的不可约表示. 显然这在处理介子与重子之间的相互作用问题时会遇到困难，对于如何确定强子的量子数等问题，也有不清楚的地方.

本文参照层子模型的观点[3]，来处理利用有限群对强子分类的问题. 虽然通常的层子模型能自然限定强子的同位旋上限，但是能否用有限群来对强子同位旋进行分类仍是值得讨论的. 本文首先认定层子的表示，然后通过层子表示的直乘分解确定强子的表示，这就有可能利用同一个有限群统一处理介子和重子的同位旋问题. 本文将指出，有限群 T_d 群可以满足这一要求.

二、

T_d 群是完全四面体群，它由保持正四面体不变的所有对称变换（转动和反演）所组成. 如果用 E 表示恒同变换，J 表示反演变换，C_α 表示转 α 角的变换，那么 T_d 群便有如表 1 所示的 48 个对称变换，它们分别属于 8 个类.

1. 特征表 表 1 为 T_d 群的特征表. 从相容关系可以看出，在 T_d 群对称变换之下，Γ_1 为标量、Γ_2 为赝标量，Γ_4 为赝矢量、Γ_5 为矢量、Γ_6 为正宇称旋量、Γ_7 为负宇称旋量、Γ_8 有 4 个分量.

2. 不可约表示的直乘分解 表 2 给出 T_d 群不可约表示的直乘分解.

3. Clebsch-Gordan 系数 T_d 群也有相应的 Clebsch-Gordan 系数[4]，用它可以求耦合系数和算矩阵元之比.

4. T_d 群的守恒量 如果一个系统具有某种不变性，那么就有相应的物理量是守恒的. 显然，一旦假定强作用系统具有 T_d 群的不变性，就应该给出相应的守恒量. 分析表明，对于离散群 T_d 群，应该用类算符来描述这些量[5]，这里只给出有关 T_d 群同位旋分类

本文 1979 年 6 月 19 日收到.

表 1　T_d 群特征表[4]

表　示	$E(n_i)$	$R^{1)}E$	$8C_3$	$8RC_3$	$3C_2\ 3RC_2$	$6JC_4$	$6JRC_4$	$6JC_2$ $6JRC_2$	基　函　数	与其相容的 $SU(2)$ 群表示
Γ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	u_1	D_0^+
Γ_2	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	u_2	D_0^-
Γ_3	2	2	-1	-1	2	0	0	0	u_1^3、u_2^3	2)
Γ_4	3	3	0	0	-1	1	1	-1	u_1^4、u_0^4、u_{-1}^4	D_1^+
Γ_5	3	3	0	0	-1	-1	-1	1	u_1^5, u_0^5, u_{-1}^5	D_1^-
Γ_6	2	-2	1	-1	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$u_{1/2}^6, u_{-1/2}^6$	$D_{1/2}^+$
Γ_7	2	-2	1	-1	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$u_{1/2}^7, u_{-1/2}^7$	$D_{1/2}^-$
Γ_8	4	-4	-1	1	0	0	0	0	$u_{3/2}^8, u_{1/2}^8, u_{-1/2}^8, u_{-3/2}^8$	$D_{3/2}^{\pm}$

1) R 表示转 2π 的变换．如果 C_3 表示转 $2/3\,\pi$ 的变换，RC_3 则表示先绕对称轴转 $2/3\,\pi$ 接着再转 2π 的变换．

2) $\Gamma_3 \oplus \Gamma_4$ 与 D_2^- 相容，$\Gamma_3 \oplus \Gamma_5$ 与 D_2^+ 相容．

表 2　T_d 群不可约表示的直乘分解

Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8	
Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8	Γ_1
	Γ_1	Γ_3	Γ_5	Γ_4	Γ_7	Γ_6	Γ_8	Γ_2
		$\Gamma_1\oplus\Gamma_2\oplus\Gamma_3$	$\Gamma_4\oplus\Gamma_5$	$\Gamma_4\oplus\Gamma_5$	Γ_8	Γ_8	$\Gamma_6\oplus\Gamma_7\oplus\Gamma_8$	Γ_3
			$\Gamma_1\oplus\Gamma_3\oplus\Gamma_4\oplus\Gamma_5$	$\Gamma_2\oplus\Gamma_3\oplus\Gamma_4\oplus\Gamma_5$	$\Gamma_6\oplus\Gamma_8$	$\Gamma_7\oplus\Gamma_8$	$\Gamma_6\oplus\Gamma_7\oplus2\Gamma_8$	Γ_4
				$\Gamma_1\oplus\Gamma_3\oplus\Gamma_4\oplus\Gamma_5$	$\Gamma_7\oplus\Gamma_8$	$\Gamma_6\oplus\Gamma_8$	$\Gamma_6\oplus\Gamma_7\oplus2\Gamma_8$	Γ_5
					$\Gamma_1\oplus\Gamma_4$	$\Gamma_2\oplus\Gamma_5$	$\Gamma_3\oplus\Gamma_4\oplus\Gamma_5$	Γ_6
						$\Gamma_1\oplus\Gamma_4$	$\Gamma_3\oplus\Gamma_4\oplus\Gamma_5$	Γ_7
							$\Gamma_1\oplus\Gamma_2\oplus\Gamma_3\oplus2\Gamma_4\oplus2\Gamma_5$	Γ_8

的一些结果.

首先,单位元素本身构成一类,其特征标为表示的维数,从而提供了一个守恒量——状态的简并度 n_i, 对于 T_d 群恰可表示为 $n_i = 2I_i + 1$, I_i 为非负整数.

在 T_d 群中,可构造一个相应于角动量平方的类算符 $\hat{K}$, 它满足本征方程[5]

$$\hat{K}\phi_i = \kappa\phi_i = \frac{\chi^{(i)}}{n_i}\phi_i = \frac{\chi^{(i)}}{2I_i + 1}\phi_i, \tag{1}$$

其中 ϕ_i 是第 i 个表示的基函数, $\chi^{(i)}$ 是第 i 个表示的特征标. 我们将 I_i 定义为第 i 个不可约表示的总同位旋值. 显然它是一个守恒量. 此外, T_d 群还有一个用算符 $\hat{C}_z(\alpha)$ 表示的守恒量,它相应于绕 z 轴转 α 角的对称变换

$$\hat{C}_z(\alpha) = e^{-i\hat{I}_Z\alpha}, \tag{2}$$

$$\hat{C}_z(\alpha)u_z^i = e^{-iI_z\alpha}u_z^i = C_z^i(\alpha)u_z^i. \tag{3}$$

其中 u_z^i 是 Γ_i 的基函数, $\hat{I}_z$ 相应于同位旋 z 分量的投影算符,对于 T_d 群 $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$、$\pm\pi$. 根据 (3) 可由 $C_z^i(\alpha)$ 求出 I_z 值,由于指数函数的周期性 $C_z^i(\alpha)$ 不能确定唯一的 I_z 值,但是当我们要求其值在主值区间时,即 $0 \leqslant I_z\alpha \leqslant 2\pi$, I_z 值便是唯一的了. 这样定出的 I_z 值正好与由 (1) 给出的总同位旋 I 值相一致,即 $I_z = -I$、$-I+1$、$\cdots$、I. 以后采用 I 和 I_z 标记 $\hat{K}$ 和 $\hat{C}_z(\alpha)$ 的共同本征态.

三、

现在我们用 T_d 群来讨论强子的分类.

假定强相互作用具有 T_d 群的对称性. 除了同位旋的量子数外, 我们还考虑其他量子数,例如奇异数 S 和重子数 B, 并且仿照 [1, 2] 要求 Gell-Mann-Nishijima 关系在指数形式下成立

$$\exp\{iI_z\alpha\} = \exp\left\{i\left(Q - \frac{B+S}{2}\right)\alpha\right\}, \tag{4}$$

其中 α 为 T_d 群的绕 z 轴转动的对称变换的转角. 参照层子模型的概念[3], 根据 T_d 群不可约表示的性质我们假设:

1. Γ_6 表示层子 u 和 d, Γ_2 表示奇异层子 s, 即 $u \to u_{-\frac{1}{2}}^6$、$d \to u_{\frac{1}{2}}^6$、$s \to u_2$. 这样便有

$$\hat{I}_z u_{\frac{1}{2}}^6 = \frac{1}{2}u_{\frac{1}{2}}^6、\quad \hat{I}_z u_{-\frac{1}{2}}^6 = -\frac{1}{2}u_{-\frac{1}{2}}^6, \quad \hat{I}_z u_2 = 0 \tag{5a}$$

$$\hat{S}u_{\frac{1}{2}}^6 = 0, \quad \hat{S}u_{-\frac{1}{2}}^6 = 0, \quad \hat{S}u_2 = -u_2 \tag{5b}$$

取 s 层子的奇异数为 -1, 则 $\bar{s}$ 层子的奇异数为 $+1$. 由 (5b) 和 T_d 群表示的宇称性质, 我们发现同位旋空间宇称和奇异数满足下边的关系

$$\hat{J} = e^{-i\pi\hat{S}} \tag{6}$$

$\hat{J}$ 为同位旋空间的反演算符.

我们进一步假定每个层子的重子数为 1/3, 它们的电荷数分别为

$$\hat{Q}u^6_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}u^6_{\frac{1}{2}}, \quad \hat{Q}u^6_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}u^6_{-\frac{1}{2}}, \quad \hat{Q}u_2 = -\frac{1}{3}u_2, \tag{5c}$$

显然对于层子量子数的这些假定与 (4) 相符.

2. 假定重子是由三个层子构成的，介子是由一个层子和一个反层子构成的. 层子表示的直乘分解给出它们所构成的强子表示. 由表 2 可见重子表示为

$$\Gamma_2 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_2 = {}^{-3}\Gamma_2, \tag{7a}$$

$$\Gamma_2 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_6 = {}^{-2}\Gamma_6, \tag{7b}$$

$$\Gamma_6 \otimes \Gamma_2 \otimes \Gamma_6 = {}^{-1}\Gamma_2 \oplus {}^{-1}\Gamma_5, \tag{7c}$$

$$\Gamma_6 \otimes \Gamma_6 \otimes \Gamma_6 = 2\Gamma_6 \oplus \Gamma_8. \tag{7d}$$

介子表示由下列诸式给出

$$\Gamma_6 \otimes \bar{\Gamma}_6 = \Gamma_1 \oplus \Gamma_4; \tag{8a}$$

$$\Gamma_6 \otimes \bar{\Gamma}_2 = \Gamma_7; \tag{8b}$$

$$\Gamma_2 \otimes \bar{\Gamma}_6 = \bar{\Gamma}_7; \tag{8c}$$

其中 $\bar{\Gamma}_2$、$\bar{\Gamma}_6$、$\bar{\Gamma}_7$ 分别是 Γ_2、Γ_6 和 Γ_7 的共轭表示. $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma_2$, $\bar{\Gamma}_6$、$\bar{\Gamma}_7$ 分别等价于 Γ_6 和 Γ_7. 为了区别 Γ_2 和 Γ_6 我们在强子表示的左上角标出奇异数. 为了辨认出每个表示所代表的粒子，我们根据直乘分解规则求出每个表示的基函数，算出量子数，并由此确定相应的粒子填充 (表 3). 值得注意的是对于强子表示的奇异数 S 和同位旋空间宇称也符合关系式 (6)，由此可见奇异数 S 与同位旋空间宇称可能存在一定的联系.

表 3 强子表示的量子数及其粒子填充

表示	Γ_1	${}^{-1}\Gamma_2$	${}^{-3}\Gamma_2$	Γ_4	Γ_5	Γ_6	${}^{-2}\Gamma_6$	${}^{+1}\Gamma_7$	${}^{-1}\Gamma_7$	Γ_8
I	0	0	0	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	3/2
I_z	0	0	0	1,0,−1	1,0,−1	1/2,−1/2	1/2,−1/2	1/2,−1/2	1/2,−1/2	3/2,1/2,−1/2,−3/2
S	0	−1	−3	0	−1	0	−2	+1	−1	0
B	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
Q	0	0	−1	1,0,−1	1,0,−1	1,0	0,−1	1,0	0,−1	2,1,0,−1
粒子	η	Λ	Ω^-	π	Σ	N	Ξ	K	$\bar{\mathrm{K}}$	Δ

四、

现在已经有了强子填充的不可约表示，只要进一步根据相互作用的特性对哈密顿算符在 T_d 群下的变换性质做适当的假定，就可以象通常那样进行同位旋分析. 当然，这里用到的不是 $SU(2)$ 的 C-G 系数，而是 T_d 群的 C-G 系数了. 作为例子，给出用 T_d 群计算的几个过程的分支比：

1. 强作用过程. 强作用过程同位旋守恒，我们假设其哈密顿量为 T_d 群标量 Γ_1. 对于强衰变过程

$$N^+(1520) \to \Delta(1232) + \pi$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow N + \pi$$

得到

$$N^+(1520) \to \sqrt{\frac{1}{2}}(p\pi^+)\pi^- + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}(\pi^-p)\pi^+ - \frac{1}{3}(n\pi^+)\pi^0 + \frac{1}{3}\pi^+(n\pi^0) - \frac{\sqrt{2}}{3}(\pi^0 p)\pi^0$$

$$\sigma_{(\pi^+p)\pi^-}:\sigma_{(p\pi^-)\pi^+}:\sigma_{(n\pi^0)\pi^+}:\sigma_{(\pi^+n)\pi^0}:\sigma_{(\pi^0p)\pi^0} = 9:1:2:2:4.$$

2. 弱作用过程. 有 $\Delta I = \frac{1}{2}$、$\Delta S = 1$. 我们假设相互作用哈密顿量具有 Γ_7 的变换性质. 对于非轻子衰变过程,利用“虚粒子”(Spurion) 技术得出

$$\begin{cases}\Lambda \to n\pi^0 \\ \Lambda \to p\pi^-\end{cases} \frac{\sigma(\Lambda \to n\pi^0)}{\sigma(\Lambda \to p\pi^-)} = \frac{1}{2}, \quad \begin{cases}\Omega^{-1} \to \pi^-\Xi^0 \\ \Omega^- \to \pi^0\Xi^0\end{cases} \frac{\sigma(\Omega^- \to \pi^-\Xi^0)}{\sigma(\Omega^- \to \pi^0\Xi^-)} = 2,$$

上述结果与用 $SU(2)$ 群处理的相同. 同时我们还处理了“(3, 3)”共振等强作用过程和 γ-N 等电磁作用过程中同位旋有关的问题, 所得的结果也都与用 $SU(2)$ 群的相同, 并与实验相符. 其实这种一致性是很自然的, 因为 T_d 群和 $SU(2)$ 群中 $I \leqslant \frac{3}{2}$ 的相应表示间的耦合系数相同.

总之,从层子模型出发, 利用 T_d 群作为同位旋对称群, 可以和 $SU(2)$ 群一样讨论强子的分类和解释后者所能解释的一切实验结果. 因此, 似乎不能排除用有限群 T_d 群来描述强子同位旋的可能性.

参　考　文　献

[1] K. M. Case, R. Karplus and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **101** (1956), 874.
[2] K. Yamada, *Phys. Rev.*, **D18** (1978), 935.
[3] 北京大学理论物理研究室,中国科学院数学研究所理论物理研究室,北大学报, **2**(1966), 103; 中国科学院原子能研究所基本粒子理论组,原子能, **3**(1966), 137.
[4] G. F. Koster et al., Properties of the Thirty-Two Point Groups, (1963).
[5] A. B. Соколов, B. П. Широковекий, *Успехи Физический Наук*, **60** (1956), 617—688.

ISOSPIN CLASSIFICATION OF HADRONS BY FINITE GROUP

Xu Jiao-lin
(*Peking Institute of Aeronautics and Astronautics*)
Wu Yong-shii, Chen Shi, Guo Han-ying
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

Abstract

Starting from the straton model, we discuss the possibility of slassifying the isospin of both mesons and baryons by one and the same finite group. We find that the finite group T_d can be used for the purpose.