SU_3 群不可约表示直乘中的不可约表示及其重数

曾高坚
(湖南师范学院)

摘　　要

本文运用 Racah-Speier 定理研究了 SU_3 群的 Clebsch-Gordan 级数，建立了计算这个级数中的不可约表示及其重数的普遍公式．这个公式对具体计算是非常简单而有效的．可以运用这个公式去分析 SU_3 的 Clebsch-Gordan 级数中重数的分布规律，以及确定 SU_3 的 Wigner 算符的零空间，后者对计算有重数情形下的 Wigner 系数是重要的．

一、引言，Racah-Speier 定理

SU_3 群两个不可约表示 $R(\lambda_1, \mu_1)$ 和 $R(\lambda_2, \mu_2)$ 的直乘一般是可约的，即它可以分解为一系列不可约表示 $R(\lambda, \mu)$ 的直和

$$R(\lambda_1\mu_1)\otimes R(\lambda_2\mu_2)=\sum_{(\lambda\mu)}N(\lambda_1\mu_1;\lambda_2\mu_2;\lambda,\mu)R(\lambda,\mu); \tag{1.1}$$

级数(1.1)通常叫 Clebsch-Gordan 级数或简称 C-G 级数．它的复杂性在于：$R(\lambda\mu)$ 的出现次数即重数N可以大于 1．研究这种级数，自然需要知道，可能出现哪些 $R(\lambda\mu)$，其重数 $N=N(\lambda_1\mu_1;\ \lambda_2\mu_2;\ \lambda\mu)$ 为多少．

这个问题已经进行了许多研究，如文献 [1—5] 所介绍的；且可以认为，已有了原则性的解决办法，这个办法就是由下述定理所提供的[4]：

Racah-Speier 定理：

设L是任意紧致单纯李群，R和 R' 是L的两个其最高权分别为 Λ, Λ' 的不可约表示，W是R的重数为 N_W 的权．命 $\Lambda'+W_d$ 是权集 $\Lambda'+W$ 中L的支配权，则在 $R\otimes R'$ 的约化中

(i) 只有最高权为 $\Lambda'+W_d$ 的不可约表示出现；

(ii) 且其重数为

$$N=\sum_{W}(-1)^{n_W}N_W. \tag{1.2}$$

式中求和是对这样的W(包括 W_d 本身)进行，即由它构成的 $\Lambda'+W+\delta$ 在实行一系列

本文 1978 年 6 月 27 日收到．

外尔反射后，便变成 $\Lambda' + W_d + \delta$；n_W 是反射次数，δ 是群的正根和的一半.

Racah-Speier 定理适用于任意紧致单纯李群，自然也适用于 SU_3。但直到现在，人们没有运用这个定理，对 SU_3 的 C-G 级数给出一般的、明显的结果，即给出直接由表征直乘的两个不可约表示的字母所表达的结果.

J. J. De. Swart 根据 Racah-Speier 定理的几何解析[4]，用图解办法研究了 SU_3 的 C-G 级数[2]. 他的方法非常直观，容易掌握，但由于每次都需将权图画出，当直乘的不可约表示的空间的维数很高时，是很麻烦的，而且不便用来进行分析.

本文也以任意紧致单纯李群的 Racah-Speier 定理作基础，用代数的和解析的办法来研究 SU_3 解的 C-G 级数. 本文企图完成有关 SU_3 群 C-G 级数的工作，即给它建立一个统一的、一般的代数表式. 本文特点是运用了一个性质极为简单的阶梯函数，巧妙地勾画了 SU_3 群的内多重性结构，即表达了它的权和权的重数. 这一进展似乎是微小的，但正由于这一进展，使得为 SU_3 C-G 级数建立一个统一的、一般的表式成为可能. 另外，由于采用了对称化手续，由于对阶梯函数实行了一些特殊的运算技巧，本文得到的最后结果是很优美的.

二、SU_3 的不可约表示

为了给 SU_3 群的 C-G 级数建立一个统一的、一般的代数表式，我们先简单叙述一下 SU_3 的不可约表示，特别是描述一下它的内在的权的多重性结构.

我们知道，SU_3 的不可约表示 $R(\lambda\mu)$ 由两个非负整数 $\lambda\mu$ 表征，其基矢 $|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\nu\rangle$ 则用三个相互可交换的算符 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{I}^2$, $\boldsymbol{I}_0$ 的本征值 $\varepsilon, \Lambda, \nu$ 表征，即满足：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Q}|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\nu\rangle = \varepsilon|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\nu\rangle,\ \boldsymbol{I}^2|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\nu\rangle = \Lambda(\Lambda+1)|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\nu\rangle,\\ &\boldsymbol{I}_0|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\nu\rangle = \nu|(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\nu\rangle.\end{aligned} \tag{2.1}$$

式中

$$\begin{aligned}&\varepsilon = \varepsilon_H - 3(\alpha+\beta),\ \varepsilon_H = \lambda + 2\mu;\\ &\Lambda = \Lambda_H + \frac{1}{2}(\alpha-\beta),\quad \Lambda_H = \frac{1}{2}\lambda,\ \alpha = 0, 1, 2, \cdots, \mu,\ \beta = 0, 1, 2, \cdots, \lambda;\\ &\nu = \Lambda, \Lambda-1, \Lambda-2, \cdots, -\Lambda.\end{aligned} \tag{2.2}$$

ε 和 ν 合成表示的权. 由于相应于每一个 ε 值，可能有多个 Λ 值，SU_3 不可约表示的权可能是多重的. 令 $n = \alpha + \beta$，可以将与 $\varepsilon = \varepsilon_H - 3n$ 相应的 Λ 的数值重写成

$$\Lambda = \Lambda_H - \frac{1}{2}n + \alpha_n - x, \tag{2.3}$$

式中 x 为如下正整数：

$$x = 0, 1, 2, \cdots, x_n = \alpha_n + \beta_n - n, \tag{2.4}$$

而 α_n, β_n 是满足条件 $\alpha_n \leqslant n, \mu$；$\beta_n \leqslant n, \lambda$ 的最大正整数. 如果引入这样的阶梯函数 $y(x)$，即

$$y(x) = \begin{cases}1, & x \geqslant 0\\ 0, & x < 0\end{cases} \tag{2.5}$$

则 α_n, β_n 可以表成

$$\alpha_n = (n-\mu)y(\mu-n)+\mu,\ \beta_n = (n-\lambda)y(\lambda-n)+\lambda. \tag{2.6}$$

相应于 $\varepsilon = \varepsilon_H - 3n$ 的可能的 ν 值为

$$\nu = \Lambda_H - \frac{1}{2}n + \alpha_n - z. \tag{2.7}$$

式中 z 取如下整数

$$z = 0,1,2,\cdots,z_H = \lambda + 2\alpha_n - n. \tag{2.8}$$

不难看出，ν 的重数可用阶梯函数表成

$$\begin{aligned} N &= (z+1)y(x_n-1-z)+(x_n+1)[y(z-x_n)-y(z-x'_n)] \\ &\quad +[(x_n+1)-(z-x'_n)]y(z-x'_n) \\ &= (z+1)y(x_n-1-z)+(x_n+1)y(z-x_n)-(z-x'_n)y(z-x'_n), \end{aligned} \tag{2.9}$$

式中 x_n 由(2.4)决定，而

$$x'_n = \lambda + \alpha_n - \beta_n. \tag{2.10}$$

当 $z \leqslant x_n$，重数以正整数次序增加，当 $x_n \leqslant z \leqslant x'_n$，重数为常数，当 $z \geqslant x'_n$，重数以正整数次序减小. 我们叫 x_n 为"第一折点"，x'_n 为"第二折点".

在(2.9)中代入 $x_n = \alpha_n + \beta_n - n$，$x'_n = \lambda + \alpha_n - \beta_n$，并令 $\Delta z = z - \alpha_n$，则得

$$\begin{aligned} N &= (\Delta z + \alpha_n + 1)y(\beta_n - 1 - n - \Delta z) + (\alpha_n + \beta_n - n + 1)y(\Delta z + n - \beta_n) \\ &\quad - (\Delta z - \lambda + \beta_n)y(\Delta z - \lambda + \beta_n). \end{aligned} \tag{2.11}$$

令 $\lambda = 0$，则 $\beta_n = 0$，$\alpha_n = n$，$x_n = 0$，$z_H = x'_n = n$，由(2.9)，$N = 1$. 同样，令 $\mu = 0$，也可得 $N = 1$. 所以，$\lambda\mu$ 两个整数中只要有一个为零，则不可约表示的权都是一重的.

三、SU_3 不可约表示直乘中的不可约表示及其重数

现在我们来进行本文的主要工作.

我们将运用如下意义的权图：$m = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}}$ 表示纵轴，ν 表示横轴. 在权图上画出三条直线：i, k, l，如图 1 所示. 这三条直线表示的就是垂直于 SU_3 群的根矢量的外尔超平面. 一个权 $W = W(\nu, m)$ 经外尔超平面反射后，即变为另一个权 $W' = W'(\nu', m')$，W' 与W之间的关系为[2]

经 i 平面反射

$$m' = m,\ \nu' = -\nu;$$

经 l 平面反射

$$m' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\nu - m),\ \nu' = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{3}m); \tag{3.1}$$

经 k 平面反射

$$m' = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}\nu + m),\quad \nu' = \frac{1}{2}(\nu - \sqrt{3}m);$$

通过对外尔超平面的反射而联系的权是相互等价的.

我们将运用如下的最高权的定义：ε 最大，与 ε_{max} 相应的 ν 亦最大. 采用这样的定

义后，则对 SU_3 群，一切支配权都处于图 1 的区域(I)中，包括 i, l 两条反射线；而处于(I)中的权的坐标满足

$$\varepsilon \geqslant 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

1. $R(\lambda\mu)$ 的确定　根据 Racah-Speier 定理，我们将 $R(\lambda_1\mu_1)$, $R(\lambda_2\mu_2)$ 的一个的所有权加在另一个的最大权上，在得到的权集中，将非支配权弃去，保留支配权，并用这些支配权作为 C-G 级数中 $R(\lambda\mu)$ 的最高权.

我们先将 $R(\lambda_2\mu_2)$ 的所有权加在 $R(\lambda_1\mu_1)$ 的最高权上来求 $R(\lambda\mu)$. 将 $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2H} - 3n_2$ 和 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1H}$ 相加，得

$$\varepsilon = \varepsilon_{1H} + \varepsilon_{2H} - 3n_2, \tag{3.3a}$$

$$n_2 = 0,1,2,\cdots,\lambda_2 + \mu_2. \tag{3.3b}$$

将 $\nu_2 = \Lambda_{2H} - \frac{1}{2}n_2 + \alpha_{n_2} - z_2$ 和 $\nu_1 = \Lambda_{1H}$ 相加，得

$$\nu = \Lambda_{1H} + \Lambda_{2H} - \frac{1}{2}n_2 + \alpha_{n_2} - z_2, \tag{3.4a}$$

$$z_2 = 0,1,2,\cdots,\lambda_2 + 2\alpha_{n_2} - n_2. \tag{3.4b}$$

如要求 $W = W(\nu, \varepsilon)$ 为支配权，n_2, z_2 除满足 (3.3b)、(3.4b) 外，还须满足下列条件(由(3.2))：

$$n_2 \leqslant \frac{1}{3}(\lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_2 + 2\mu_2),$$

$$n_2 - \mu_1 - \mu_2 + \alpha_{n_2} \leqslant z_2 \leqslant \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - n_2 + 2\alpha_{n_2}). \tag{3.5}$$

z_2 的最大值应该 $\geqslant$ 它的最小值，特别是应该有 $n_2 - \mu_1 - \mu_2 + \alpha_{n_2} \leqslant \lambda_2 + 2\alpha_{n_2} - n_2$, 这对 n_2 又附与一个条件

$$n_2 \leqslant \frac{1}{2}(\lambda_2 + 2\mu_2 + \mu_1). \tag{3.6}$$

我们用这样确定的支配权来作为 C-G 级数中 $R(\lambda\mu)$ 的最高权，即令 $\varepsilon = \varepsilon_H$, $\nu = \nu_H$, 从而求得 $R(\lambda\mu)$ 为

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - n_2 + 2\alpha_{n_2} - 2z_2,\ \mu = \mu_1 + \mu_2 - n_2 - \alpha_{n_2} + z_2. \tag{3.7}$$

我们再将 $R(\lambda_1\mu_1)$ 的所有权加在 $R(\lambda_2\mu_2)$ 的最高权上来求 $R(\lambda\mu)$, 结果为

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - n_1 + 2\alpha_{n_1} - 2z_1,\ \mu = \mu_1 + \mu_2 - n_1 - \alpha_{n_1} + z_1. \tag{3.8}$$

式中 n_1, z_1 满足

$$n_1 \leqslant \lambda_1 + \mu_1, \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\mu_1 + \mu_2), \frac{1}{3}(\lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_2 + 2\mu_2);$$

$$0, n_1 - \mu_1 - \mu_2 + \alpha_{n_1} \leqslant z_1 \leqslant \lambda_1 + 2\alpha_{n_1} - n_1, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - n_1 + 2\alpha_{n_1}). \tag{3.9}$$

上述两种做法得到的结果在形式上是不一样的. 但是另一方面，根据 Racah-Speier 定理，两种做法应该等价. 我们采用下述做法将两种结果统一起来，即令

$$n = n_1 = n_2,\ \Delta z = z_1 - \alpha_{n_1} = z_2 - \alpha_{n_2}, \tag{3.10}$$

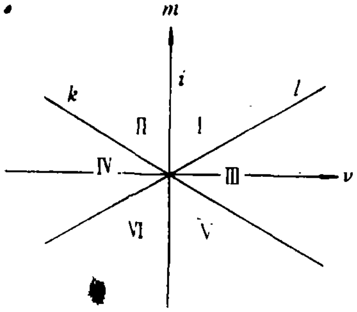

图 1

并令 n, Δz 同时满足 (3.3b), (3.4b), (3.5), (3.6), (3.9), 即满足

$$n \leqslant \lambda_1 + \mu_1,\ \lambda_2 + \mu_2,\ \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\mu_1 + \mu_2),\ \frac{1}{2}(\lambda_2 + 2\mu_2 + \mu_1),$$

$$\frac{1}{3}(\lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_2 + 2\mu_2);$$

$$\Delta z_{\min} \leqslant \Delta z \leqslant \Delta z_{\max},\ \Delta z_{\min} = -\min[\alpha_{1n},\ \alpha_{2n},\ (\mu_1 + \mu_2 - n)],$$

$$\Delta z_{\max} = \min\left[\lambda_1 + \alpha_{1n} - n,\ \lambda_2 + \alpha_{2n} - n,\ \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - n)\right]. \tag{3.11}$$

式中

$$\alpha_{1n} = (n - \mu_1)y(\mu_1 - n) + \mu_1, \alpha_{2n} = (n - \mu_2)y(\mu_2 - n) + \mu_2. \tag{3.12}$$

这样做后,(3.7)、(3.8)两式同时化为

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - n - 2\Delta z,\ \mu = \mu_1 + \mu_2 - n + \Delta z. \tag{3.13}$$

(3.11)、(3.13)就是我们要决定的 $R(\lambda\mu)$. 上述对称化手续,不仅使 $\lambda\mu$ 的表式具有明显的对称性,而且使我们当计算重数时,不论采用哪一种做法,都可以得到完全对称的结果.

要注意的是,这样决定的 $R(\lambda\mu)$, 其重数仍可能为零.

2. $R(\lambda\mu)$ 的重数的确定　现在来决定 $R(\lambda\mu)$ 的重数. 我们暂且将 $R(\lambda_2\mu_2)$ 的所有权加在 $R(\lambda_1\mu_1)$ 的最高权上来做到这一点. 已经指出,用这样得来的权 $W=W(\nu\varepsilon)$ 作 $R(\lambda\mu)$ 的最高权, W 必须落在权图的如图 1 所示的区域 (I) 中, 包括 i, l 两条反射线. 现在我们将整个权图往右上角无旋转地移动一段距离, 使 ε 增加 3, ν 增加 1/2. 之所以这样做, 是因为 Racah-Speier 定理中要求考虑 $\Lambda' + W + \delta$ 经外尔超平面的反射, 这里 δ 是 SU_3 群正根和的一半. $\Lambda' + W + \delta$ 是权 $\Lambda' + W$ 移动 δ 后得到的权. 权的这种移动, 如采用本文的关于最高权的定义, 就是使 ε 增加 3, ν 增加 1/2. 这样做的结果是, 构成 $R(\lambda\mu)$ 的权将全部落在区域 (I) 里面, 不包括 i, l 两条反射线, 就是说, i, l 线成了截止线. 将权图这样移动后, 权 W 的坐标可以表成

$$\varepsilon = \lambda_1 + \lambda_2 + 2(\mu_1 + \mu_2) - 3(n - 1),\quad \nu = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - n + 1) - \Delta z. \tag{3.14}$$

这里已令 $n = n_2$, $\Delta z = \Delta z_2$.

如果 W 全部落在区域 (I) 中, 则 W 的重数就是由它确定的不可约表示 $R(\lambda\mu)$ 的重

数,而W的重数等于构成W的 $R(\lambda_2,\mu_2)$中那个权的重数. 利用(2.11)式,可以得到构成W的 $R(\lambda_2\mu_2)$ 中那个权的重数,即W的重数和 $R(\lambda\mu)$ 的重数为

$$N_a=(\Delta z+\alpha_{2n}+1)y(\beta_{2n}-1-n-\Delta z)+(\alpha_{2n}+\beta_{2n}+1-n)y(\Delta z+n-\beta_{2n})$$
$$-(\Delta z-\lambda_2+\beta_{2n})y(\Delta z-\lambda_2+\beta_{2n}). \tag{3.15}$$

式中 $n=n_2$, $\Delta z=\Delta z_2$ 是满足条件 (3.11) 的正整数和整数, α_{2n}, β_{2n} 是满足 $\alpha_{2n}\leqslant n,\mu_2$; $\beta_{2n}\leqslant n,\lambda_2$ 的最大整数.

如果权W一部分落在区域(I)中,另一部分落在(II)中,情况要复杂点. 这时,只有区域(I)中的权才是构成 $R(\lambda\mu)$ 所需要的权,区域(II)中的权将为条件(3.11)截去.但(II)中的权是(I)中某些权的"像". 这样,(I)中权的重数并不是由它构成的 $R(\lambda\mu)$ 的重数,只有将它的重数减去它在(II)中"像"的重数才是 $R(\lambda\mu)$ 的重数. 根据(3.1),(I)中权同它在(II)中的"像"的坐标之间的关系为

$$n'=n,\ \Delta z'=\lambda_1+\lambda_2-n+1-\Delta z. \tag{3.16}$$

利用(2.11),并注意到 $R(\lambda_2\mu_2)$ 的第一折点以右的权不会落到区域(II)中这一事实,可求得(II)中坐标为 n', $\Delta z'$ 的权 W' 的重数为

$$N_b=y(\lambda_2+\alpha_{2n'}-n'-\Delta z')\times\{(\alpha_{2n'}+\beta_{2n'}-n'+1)y(\Delta z'+n'-\beta_{2n'})$$
$$-(\Delta z'-\lambda_2+\beta_{2n'})y(\Delta z'-\lambda_2+\beta_{2n'})\}. \tag{3.17}$$

因子 $y(\lambda_2+\alpha_{2n'}-n'-\Delta z')$ 的引入是为了保证当 $\Delta z'>\lambda_2+\alpha_{2n'}-n'$ 时, $N_b=0$. 这样, $R(\lambda\mu)$ 的重数为

$$N=N_a-N_b.$$

如果权W全部落在区域(I)、(II)、(III)中,根据同样的道理,必须将(I)中权的重数减去它在(II)、(III)中"像"的重数才能得到 $R(\lambda\mu)$ 的重数. W在(III)中"像"的坐标,按(3.1)式为

$$n''=\Delta z+\mu_1+\mu_2+1,\ \Delta z''=n-\mu_1-\mu_2-1, \tag{3.18}$$

而这个"像"的重数根据(2.11)式为

$$N_c=y(\lambda_2+\mu_2-n'')y(\Delta z''+\alpha_{2n''})\times\{(\Delta z''+\alpha_{2n''}+1)y(\beta_{2n''}-1-n''-\Delta z'')$$
$$+(\alpha_{2n''}+\beta_{2n''}+1-n'')y(\Delta z''+n''-\beta_{2n''})$$
$$-(\Delta z''-\lambda_2+\beta_{2n''})y(\Delta z''-\lambda_2+\beta_{2n''})\}. \tag{3.19}$$

此式与(3.15)同,只是以 n'', $\Delta z''$ 代 n, Δz; 因子 $y(\lambda_2+\mu_2-n'')y(\Delta z''+\alpha_{2n''})$ 的引入是为了保证当 $n''>\lambda_2+\mu_2$, $\Delta z''<-\alpha_{2n''}$ 时, $N_c=0$. 这样, $R(\lambda\mu)$ 的重数为

$$N=N_a-N_b-N_c. \tag{3.20}$$

如果在区域(IV)中也有权 W,情况将怎样? 可以证明,区域(IV)中的权对 $R(\lambda\mu)$ 的重数无任何贡献. 事实上,根据(3.1),将(I)中的权经 i 轴, k 轴实行联合反射变换到(IV)中,得到的权 W''' 的坐标为

$$n'''=\Delta z+\mu_1+\mu_2+1=n'',\ \Delta z'''=\lambda_1+\lambda_2+1-n-\Delta z. \tag{3.21}$$

因为 $\Delta z'''\leqslant\lambda_2+\alpha_{2n'''}-n'''$, 由(3.21)有

$$n=\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2+2-n'''-\Delta z'''\geqslant\lambda_1+\mu_1+\mu_2-\alpha_{2n'''}+2\geqslant\lambda_1+\mu_1+2,$$

这是不可能的,因为 n 已受条件(3.11)的限制,不能大于 $\lambda_1+\mu_1$. 也就是说,在(I)中与

W''' 等价的权已为条件(3.11)截去. 这样,计算 $R(\lambda\mu)$ 的重数时,不必考虑区域(IV)中权的影响.

同样,可以论证,如有权落在区域(V)、(VI)中,它对 $R(\lambda\mu)$ 的重数也无贡献,因而也不必考虑.

可以运用(3.15)、(3.17)、(3.19)、(3.20)来计算 $R(\lambda\mu)$ 的重数,但式子形式上繁杂,用起来不方便,有必要加以变形和简化. 利用附录A中指出的阶梯函数的某些性质,可以将(3.15)、(3.17)、(3.19)化为

$$\begin{aligned} N_a = \mu_2 + 1 + \Delta z - \Delta z y(\Delta z) - (\mu_2 - n)y(\mu_2 - n) - (\Delta z \\ + n - \lambda_2)y(\Delta z + n - \lambda_2) \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} N_b = y(\mu_2 - n)(\Delta z + n - \lambda_1)y(\Delta z + n - \lambda_1) \\ + [1 - y(\mu_2 - n)](\Delta z - \lambda_1 + \mu_2)y(\Delta z - \lambda_1 + \mu_2), \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} N_c = y(n - \mu_1 - 1)[n - \mu_1 - (n - \mu_1 - \mu_2 - 1)y(n - \mu_1 - \mu_2 - 1)] \\ + y(n - \mu_1 - 1)(\Delta z - \lambda_2 + \mu_1)y(\Delta z - \lambda_2 + \mu_1) \\ - y(n - \mu_1 - 1)(\Delta z + n - \lambda_2)y(\Delta z + n - \lambda_2). \end{aligned} \tag{3.24}$$

我们将冗长的计算过程全部略去,只指出演化 N_b 时,略去了包含有 $y(\Delta z - \lambda_1 - 2)$ 和 $y(\Delta z + n - \lambda_1 - \lambda_2 - 1)$ 作为因子的项,因为根据条件(ε.11),不可能有 $\Delta z \geqslant \lambda_1 + 2$, 和 $\Delta z > \lambda_1 + \lambda_2 + 1 - n$. 在演化 N_c 时,略去了 $y(n - \mu_1 - \mu_2 - 1)y(\Delta z - \lambda_2 + \mu_1)$ 这种类型的项,项中这两个因子非零的要求是相互矛盾的.

将(3.22)—(3.24)代入(3.20),并作些必要的整理,便得

$$\begin{aligned} N = n + 1 - (n - \mu_1)y(n - \mu_1 - 1) - (n - \mu_2)y(n - \mu_2 - 1) \\ + (n - \mu_1 - \mu_2 - 1)y(n - \mu_1 - \mu_2 - 1) + \Delta z[1 - y(\Delta z)] \\ - y(\mu_2 - n)(\Delta z + n - \lambda_1)y(\Delta z + n - \lambda_1) \\ - y(\mu_1 - n)(\Delta z + n - \lambda_2)y(\Delta z + n - \lambda_2) \\ - y(n - \mu_2 - 1)(\Delta z - \lambda_1 + \mu_2)y(\Delta z - \lambda_1 + \mu_2) \\ - y(n - \mu_1 - 1)(\Delta z - \lambda_2 + \mu_1)y(\Delta z - \lambda_2 + \mu_1). \end{aligned} \tag{3.25}$$

式中 n, Δz 可由(3.13)解得为

$$n = \frac{1}{3}[(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda) + 2(\mu_1 + \mu_2 - \mu)],$$

$$\Delta z = \frac{1}{3}[(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda) - (\mu_1 + \mu_2 - \mu)]. \tag{3.26}$$

公式(3.25)对指标1,2是明显地对称的,因此,如果将过程反过来,即将 $R(\lambda_1\mu_1)$ 的所有权加在 $R(\lambda_2\mu_2)$ 的最高权上,得到的结果必定完全一样.

我们还要做点简化工作. 由(3.25),不难证明,当 $n - \mu_1 - \mu_2 - 1 \geqslant 0$, $N = 0$. 因此,可以再将 n 限制于

$$n \leqslant \mu_1 + \mu_2, \tag{3.27}$$

而N中项 $(n - \mu_1 - \mu_2 - 1)y(n - \mu_1 - \mu_2 - 1)$ 可以弃去.

最后,我们把本文的工作概括为如下的定理:

定理　在 SU_3 群的 C-G 级数

$$R(\lambda_1\mu_1)\otimes R(\lambda_2\mu_2)=\sum_{(\lambda\mu)}\oplus N(\lambda_1\mu_1;\ \lambda_2\mu_2;\ \lambda\mu)R(\lambda\mu) \tag{3.28}$$

中,不可约表示 $R(\lambda\mu)$ 为

$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2-n-2\Delta z,\quad \mu=\mu_1+\mu_2-n+\Delta z. \tag{3.29}$$

式中正整数 n, 整数 Δz 决定于

$$\begin{cases} 0\leqslant n\leqslant n_{\max}, \\ n_{\max}=\min\left[\lambda_1+\mu_1,\ \lambda_2+\mu_2,\ \mu_1+\mu_2,\ \frac{1}{3}(\lambda_1+2\mu_1+\lambda_2+2\mu_2),\right. \\ \left.\frac{1}{2}(\lambda_1+2\mu_1+\mu_2),\ \frac{1}{2}(\lambda_2+2\mu_2+\mu_1)\right]; \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} \Delta z_{\min}\leqslant\Delta z\leqslant\Delta z_{\max}, \\ \Delta z_{\min}=-\min[\alpha_{1n},\ \alpha_{2n},\ (\mu_1+\mu_2-n)], \\ \Delta z_{\max}=\min\left[\lambda_1+\alpha_{1n}-n,\ \lambda_2+\alpha_{2n}-n,\ \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-n)\right]; \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\alpha_{1n}=(n-\mu_1)y(\mu_1-n)+\mu_1,\alpha_{2n}=(n-\mu_2)y(\mu_2-n)+\mu_2.$$

而 $R(\lambda\mu)$ 的重数为:

表　I

n	α_{1n}	α_{2n}	$\mu_1+\mu_2-n$	$\Delta z_{\min}$	$\lambda_1+\alpha_{1n}-n$	$\lambda_2+\alpha_{2n}-n$	$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-n)$	$\Delta z_{\max}$	Δz	λ	μ	N
0	0	0	11	0	2	1	3/2	1	0	3	11	1
									1	1	12	1
1	1	1	10	−1	2	1	1	1	−1	4	9	1
									0	2	10	2
									1	0	11	1
2	2	2	9	−2	2	1	1/2	0	−2	5	7	1
									−1	3	8	2
									0	1	9	2
3	3	3	8	−3	2	1	0	0	−3	6	5	1
									−2	4	6	2
									−1	2	7	2
									0	0	8	1
4	4	4	7	−4	2	1	−1/2	−1	−4	7	3	1
									−3	5	4	2
									−2	3	5	2
									−1	1	6	1
5	4	5	6	−4	1	1	−1	−1	−4	6	2	1
									−3	4	3	2
									−2	2	4	1
									−1	0	5	0
6	4	6	5	−4	0	1	−3/2	−2	−4	5	1	1
									−3	3	2	1
									−2	1	3	0

$$N = n + 1 - (n - \mu_1)y(n - \mu_1 - 1) - (n - \mu_2)y(n - \mu_2 - 1)$$
$$+ \Delta z[1 - y(\Delta z)] - y(\mu_2 - n)(\Delta z + n - \lambda_1)y(\Delta z + n - \lambda_1)$$
$$- y(\mu_1 - n)(\Delta z + n - \lambda_2)y(\Delta z + n - \lambda_2)$$
$$- y(n - \mu_2 - 1)(\Delta z - \lambda_1 + \mu_2)y(\Delta z - \lambda_1 + \mu_2)$$
$$- y(n - \mu_1 - 1)(\Delta z - \lambda_2 + \mu_1)y(\Delta z - \lambda_2 + \mu_1) \quad (3.32)$$

根据这个定理,确定 SU_3 群 C-G 级的步骤是:

(i) 由条件(3.30),确定所有可能的 n 值; (ii) 由条件(3.31),对于一定的 n 值,确定所有可能的 Δz 值; (iii) 一定的数对 $(n, \Delta z)$ 对应于一定的 $R(\lambda\mu)$, 由(3.29)计算 λ, μ 值; (iv) 将与 $R(\lambda\mu)$ 相应的 $(n, \Delta z)$ 代入(3.32),即可求出 $R(\lambda\mu)$ 的重数.

我们举出 $R^{(60)}(2.4) \otimes R^{(80)}(1.7)$ 作为例子说明方法的正确性. 计算过程全部列在表 (I) 内,结果为(右上角数字表示度数)

$$\begin{aligned} R^{(60)}(2.4)\otimes R^{(80)}(1.7) = {} & R^{(384)}(3.11)\oplus R^{(195)}(1.12)\oplus R^{(375)}(4.9)\oplus 2\times R^{(231)}(2.10)\oplus \\ & R^{(78)}(0.11)\oplus R^{(336)}(5.7)\oplus 2\times R^{(234)}(3.8)\oplus 2\times R^{(120)}(1.9)\oplus \\ & R^{(273)}(6.5)\oplus 2\times R^{(210)}(4.6)\oplus 2\times R^{(132)}(2.7)\oplus R^{(45)}(0.8)\oplus \\ & R^{(192)}(7.3)\oplus 2\times R^{(165)}(5.4)\oplus 2\times R^{(120)}(3.5)\oplus R^{(63)}(1.6)\oplus \\ & R^{(105)}(6.2)\oplus 2\times R^{(90)}(4.3)\oplus R^{(60)}(2.4)\oplus R^{(48)}(5.1)\oplus R^{(42)}(3.2) \end{aligned}$$

根据我们获得的公式很容易证明: 在 $\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2$ 四个整数中, 只要有一个为零, 那么 C-G级数中的 $R(\lambda\mu)$ 便全是一重的. 而这一点已几乎成常识了.

附录 A 自变量为整数的阶梯函数的若干性质

本文运用的阶梯函数其自变量全部取正负整数值,这是首先要强调的.

本文运用了阶梯函数的下述性质

1. $$y(A - x) + y(x - A) = 1 + \delta_{x,A}, \quad (A.1)$$
$$y(A - x) + y(x - A - 1) = 1. \quad (A.2)$$

式中 A 为整常数. 这个性质从阶梯函数的定义看是自明的.

2. $$y(x - x_1)y(x - x_2) = k(x_1x_2)y(x - x_1) + k'(x_1x_2)y(x - x_2), \quad (A.3)$$
$$k(x_1x_2) = y(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}\delta_{x_1,x_2}, \quad k'(x_1x_2) = 1 - k(x_1x_2). \quad (A.4)$$

式中 x_1, x_2 为整常数. (A.3) 可如下证明: 乘积 $y(x - x_1)y(x - x_2)$ 如 $x_1 > x_2$, 等于 $y(x - x_1)$, 如 $x_1 < x_2$, 则等于 $y(x - x_2)$, 这样可将它表成

$$y(x - x_1)y(x - x_2) = \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{x_1x_2}\right)[y(x_1 - x_2)y(x - x_1) + y(x_2 - x_1)y(x - x_2)],$$

再运用 (A.1), 即可得 (A.3).

3. $$y[Ay(B) + C] = y(A + C)y(B) + y(C)[1 - y(B)]. \quad (A.5)$$

式中 A、B、C 为整数. (A.5) 可如下证明: 如 $B \geqslant 0$, 则 $y[Ay(B) + C] = y(A + C)$, 如 $B < 0$, 则 $y[Ay(B) + C] = y(C)$. 这样可将 $y[Ay(B) + C]$ 表成:

$$y[Ay(B) + C] = y(A + C)y(B) + y(C)[y(-B) - \delta_{B,0}],$$

再运用 (A.1), 即可得 (A.5).

参　考　文　献

[1] B. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal and W. Lee, *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 1.
[2] J. J. De. Swart, *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 916.
[3] J. D. Louck, *Ame. J. Phys.*, **38** (1970), 3.
[4] A. J. Macfarlance, L. O'Raifeartaige and P. S. Rao, *J. Math. Phys.*, **8** (1967), 536.
[5] L. C. Biedenharn and J. D. Louck, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1985.

THE IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS AND THEIR OCCUPATION NUMBER IN DIRECT MULTIPLICATION OF IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF SU_3 GROUP

ZENG GAO-JIAN
(*Hunan Teacher's College*)

ABSTRACT

In this paper, the C-G series of SU_3 group is studied using Racah-Speier theorem. A general formula which can be used to calculate irreducible representations and their occupation number in C-G series of SU_3 group is derived. The general formula is very straight forward and effective for actual calculation One can apply the formula to analyse the distribution rule of occupation number in C-G series of SU_3 group and to define the null space of Winger operator of SU_3 group, the latter is important to the calculation of Wigner coefficients when there is a multiplicity.