

原子核质量公式的分项检验

曾谨言 林纯镇 杨福家

(北京大学)

(复旦大学)

摘 要

本文提出了对原子核质量公式进行分项检验的概念,并从同位旋多重态的质量关系、同位旋相似态的库仑能差、 β 稳定线位置、远离 β 稳定线的核质量以及原子核可裂变度等方面对常见的几个质量公式进行分项检验。分析了它们的成功之处以及与实验的矛盾,为进一步改进质量公式提供了一些根据。

一、引 言

原子核质量(或结合能)公式,从理论或实用的角度来看,都相当重要。核物理中许多现象都与它有密切关系。从30年代 Weizsäcker 提出的质量半经验公式开始,这个问题一直为人们所关注^[1-4]。据统计^[5-8],先后提出的质量公式不下30余个。其中有不少公式包含有较复杂的函数形式以及过多的参数,应用起来不大方便,而且各项的物理意义并不都很明显,所以在理论上很少有人有兴趣讨论它们。但也有一些公式并不比 Weizsäcker 公式复杂,而与实验符合的程度却有相当改进^[9-11]。

但以往对质量公式好坏的判断,主要是笼统地根据质量的计算值与测量值的方均根偏差的大小。这固然是重要的一个方面。但考虑到质量公式中所含项数较多,这种笼统的比较不容易判断公式中某一项形式的正确程度。如果我们能找到一些在实验上可以(直接或间接)观测的物理量,它们又只与质量公式中的一项(或两项)有关,则可以通过它们对质量公式中的各项进行分项检验。这对于更深入了解各项的物理内容以及进一步改进质量公式都是有益的。目前还没有人在这方面作过系统的工作。

据初步分析,可以从下列几个方面对质量公式进行分项检验:(i) P/P' 比值^[12]——可检验对称能项形式。(ii) Jänecke 比^[12]——可检验对称能项与同位旋 T 的关系。(iii) 巨共振能量的变化规律^[13]——可检验对称能项与质量数 A 的依赖关系。(iv) 同位旋多重态的质量方程 (IMME)^[14-16]——可检验库仑能项形式。(v) 同位旋相似态之间的库仑能差^[22-23]——可检验库仑能项形式。(vi) β 稳定线位置^[5,24]——涉及库仑能与对称能的竞争。(vii) 远离 β 稳定线的原子核质量——与库仑能项及对称能项等的形式有关。(viii) 可裂变度及裂变势垒高度——与库仑能、表面能及壳修正有关。

以上(i)、(ii)与(iii)已有另文讨论。本文着重对(iv)–(viii)几方面来对质量公式

进行分项检验。检验的对象限于常见的几个比较简单质量公式。它们是:

Weizsäcker 公式(修改)^[10,11]

结合能

$$B(A, Z) = ZM_H + (A - Z)M_n - M(A, Z) \\ = a_v A - a_s A^{2/3} - k_c Z^2 / A^{1/3} - a_{sy} T^2 / A^\alpha + B_p + B_\pi, \quad (1)$$

$$a_v = 15.905 \text{ MeV}, \quad a_s = 18.489 \text{ MeV}, \quad k_c = 0.72 \text{ MeV},$$

$$a_{sy} = 89.679 \text{ MeV}, \quad \alpha = 0.99.$$

Myers-Swiatecki 公式^[19,21]

不计及形变影响的 Myers-Swiatecki (1966) 公式为

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - k_c Z^2 / A^{1/3} + C_d Z^2 / A - a_{sy} (N - Z)^2 / A \\ + a_{ssy} (N - Z)^2 / A^{4/3} + B_p + B_\pi, \quad (2)$$

$$a_v = 15.68 \text{ MeV}, \quad a_s = 18.56 \text{ MeV}, \quad k_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} = 0.717 \text{ MeV} \quad (r_0 = 1.2049 \text{ fm.})$$

$$a_{sy} = 28.06 \text{ MeV}, \quad a_{ssy} = 33.22 \text{ MeV}, \quad C_d = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{a_0}{r_0} \right)^2 \frac{e^2}{r_0} = 1.211 \text{ MeV}, \quad (a_0 = 0.546 \text{ fm}).$$

后来他们又在小液滴模型 (droplet model) 的基础上对公式中的体能项、表面能项及库仑能项作了进一步修改, 但所含项数较多, 比较烦琐。例如库仑能项 (1974) 为

$$E_c = c_1 Z^2 A^{-1/3} - c_2 Z^2 A^{1/3} - c_3 Z^2 A^{-1} - c_4 2^{-1/3} Z - c_5 Z^2 \quad (2')$$

$$c_1 = 0.73531, \quad c_2 = 0.00016477, \quad c_3 = 1.30501,$$

$$c_4 = 0.56149, \quad c_5 = 0.00049695, \quad (\text{单位 MeV}).$$

c_1 项及 c_3 项即公式 (2) 的第三、四两项, 是比较重要的。其次是 c_4 项, 它反映质子之间的关联效应(泡利原理)。 c_2 及 c_5 项很小, 可以忽略。

Danos-Gillet 公式^[10,11]

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - k_c Z^2 / A^{1/3} - a_{c2} C2(A, Z) A^\alpha + B_\pi, \quad (3)$$

$$a_v = 15.889 \text{ MeV}, \quad a_s = 17.939 \text{ MeV}, \quad k_c = 0.72 \text{ MeV},$$

$$a_{c2} = 27.802 \text{ MeV}, \quad \alpha = -0.79,$$

$$C2(A, Z) = \begin{cases} (T + 2)^2 - 3/2, & \text{偶偶核} \\ (T + 2)^2, & \text{奇 } A \text{ 核} \\ (T + 2)^2 + 3/2, & \text{奇奇核} \end{cases}$$

作者等提出的质量公式^[11]

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^{5/3} - a_{sy} T(T + 1) / A^\alpha + B'_p + B_\pi, \quad (4)$$

$$a_v = 15.703 \text{ MeV}, \quad a_s = 18.410 \text{ MeV}, \quad a_c = \frac{3e^2}{5r_{0p}} = 0.526 \text{ MeV}, \quad (r_p = 1.64 \text{ fm.})$$

$$a_{sy} = 35.776 \text{ MeV}, \quad \alpha = 0.86.$$

1) 原公式中有误, 已改正 (V. Gillet, 私人通讯)。

二、同位旋多重态的质量关系

历史上最早发现的同位旋多重态是由镜核构成的同位旋二重态 ($T = 1/2$)。当考虑到库仑作用及核力的电荷无关性可能存在的破缺时, 同位旋多重态将发生分裂。Wigner (1957) 在很普遍的两体力假设下, 用微扰论一级近似证明, 同位旋多重态的质量满足下列关系^[14]

$$M(T_x) = a + bT_x + cT_x^2, \quad (\text{IMME}) \quad (5)$$

系数 a 、 b 与 c 依赖于核质量数 A 、同位旋 T 及其它量子数 (例如角动量 J 与宇称 π)。分析实验时, 可把它们作为三个参数看待。此时, 要检验 IMME (5) 式的正确性, 必须 $T \geq 3/2$ 。但在 50 年代, 实验上尚未测出一组完整的同位旋四重态。第一个完整的同位旋四重态 ($A = 9, J^\pi = 3/2^-$) 于 1964 年测出^[17]。第一个完整的同位旋五重态 ($A = 8, J^\pi = 0^+$) 于 1975 年测出^[18]。关于这方面的较完整的最新资料, 见 Benenson & Kashy (1979) 的文章^[15]。

为了判断 IMME (5) 式是否正确, 可以令

$$M(T_x) = a + bT_x + cT_x^2 + dT_x^3, \quad (6)$$

不难求出

$$\begin{cases} a = \frac{1}{8} \left\{ 5 \left[M\left(\frac{1}{2}\right) + M\left(-\frac{1}{2}\right) \right] - \left[M\left(\frac{3}{2}\right) + M\left(-\frac{3}{2}\right) \right] \right\}, \\ b = \frac{1}{48} \left\{ 51 \left[M\left(\frac{1}{2}\right) - M\left(-\frac{1}{2}\right) \right] - \left[M\left(\frac{3}{2}\right) - M\left(-\frac{3}{2}\right) \right] \right\}, \\ c = \frac{1}{4} \left\{ \left[M\left(\frac{3}{2}\right) + M\left(-\frac{3}{2}\right) \right] - \left[M\left(\frac{1}{2}\right) + M\left(-\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \\ d = \frac{1}{6} \left\{ \left[M\left(\frac{3}{2}\right) - M\left(-\frac{3}{2}\right) \right] - 3 \left[M\left(\frac{1}{2}\right) - M\left(-\frac{1}{2}\right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (7)$$

若 $d = 0$, 则 IMME (5) 式就是正确的。根据 Benenson & Kashy 对已测出的 22 组同位旋四重态的分析^[15,16], 可得出下列结论:

(i) 除了 $A = 9 (J^\pi = 3/2^-)$ 一组外, 在实验误差范围内, 不排除 $d = 0$ 的可能性。但平均说来, d 似乎略大于零。

(ii) 对于 $A = 9 (J^\pi = 3/2^-)$ 这一组最先发现的, 也是测量最精确的同位旋四重态, $d = 5.8 \pm 1.6 \text{ KeV}$ 。

关于同位旋五重态, 也有几组已被完整地测出。还有几组五重态, 每组中有四个成员的质量已被测出, 根据这些资料都可以定出参数 d 。见表 1, 可以看出:

(i) 部分情况不排除 $d = 0$, 但多数情况看来, $d > 0$ 。

(ii) 测量最准确的一组五重态 ($A = 8, J^\pi = 0^+$), $d > 0$ 。

对于偏离 IMME (5) 式的现象 ($d \neq 0$), 已有人在壳模型的基础上从不同的考虑来解释。其中主要考虑有两个因素^[15,16]: (a) 库仑作用导致波函数“膨胀”(即 Z 大的原子核的电荷分布大一些)。(b) 库仑力导致不同 T 的多重态的混合。本文将不去讨论这方

表 1

A	J^π	d (KeV)	资料出处
8	0+	5.6±2.2 (取 $e = 0$) ¹⁾ 3.6±2.7 ($e = 2.6 \pm 2.1$)	[15]
12	0+	0±1.1	[15]
16	0+	8±5	[15]
	2+	15±6	[15]
20	0+	2.3±2.0	[15]
		-2.2±2.0 ($e = 0$)	[21]
		5±9 ($e = -7 \pm 9$)	[21]
24	0+	-1.0±1.6 ($e = 0$)	[19]
		-3.2±2.1 ($e = 1.9 \pm 1.2$)	[19]
		-0.9±2.5 ($e = 0$)	[20]
32	0+	0.5±2.5	[15]
36	0+	-1.6±1.8	[15]

1) e 是 T_2^2 项的系数。

面的工作,而只根据上述实验事实来检查一下质量公式中库仑能项形式的正确程度。

首先我们注意到一个有趣的情况。按照 Weizsäcker, Danos-Gillet 及 Myers-Swiatecki 的质量公式所采用的库仑能形式,同位旋多重态质量的展开式中的系数 $d = 0$ (表 2)。只有质量公式 (4) 得出

$$d \simeq 32.5(A/2)^{-4/3} \text{KeV} > 0. \quad (8)$$

例如对于测得最准的两组多重态,

$$A = 8 (T = 2, J^\pi = 0^+), \quad d \simeq 5.1 \text{ KeV};$$

$$A = 9 (T = 3/2, J^\pi = 3/2^-), \quad d \simeq 4.4 \text{ KeV}.$$

与实验值大致接近。但应当注意,由于 $d \propto A^{-4/3}$, 随 A 增大, d 将迅速减小。例如 $A \geq 25$, 则 $d \lesssim 1 \text{ keV}$ 。在目前实验精确度范围内要测定这样小的 d 是困难的。这可能是目前大多数同位旋四重态的实验分析不能排除 $d = 0$ 的原因。当然,按照质量公式 (4) 得出的结论——在不计及壳修正情况下 $d > 0$, 还有待更仔细的实验来检验。至于展开式中 T_2^2 项系数 e , 比 d 还要小一个数量级, 在目前精度范围内, 还不可能得出什么确切的结论。

与系数 d 相似, 对于 IMME 公式中的其它系数 b 与 c , 也可以作一些粗略的估算。例

表 2¹⁾

质量公式	b	c	d	e
Weizsäcker, Danos-Gillet	$\Delta - k_c A^{2/3}$	$k_c A^{-1/3}$	0	0
Myers-Swiatecki (1966)	$\Delta - k_c A^{2/3} + C_d$	$k_c A^{-1/3} - C_d A^{-1}$	0	0
(1974)	$\Delta - c_1 A^{2/3} + c_3 + c_4/2^{1/3}$	$c_1 A^{-1/3} - c_3 A^{-1}$	0	0
质量公式 (4)	$\Delta - \frac{5}{3} a_c \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3}$	$\frac{5}{9} a_c \left(\frac{A}{2}\right)^{-1/3}$	$\frac{5}{81} a_c \left(\frac{A}{2}\right)^{-4/3}$	$\frac{5}{243} a_c \left(\frac{A}{2}\right)^{-7/3}$

1) 未计及壳修正。 $\Delta = M_n - M_H = 0.783 \text{ MeV}$ 是中子与氢原子的质量差。

如对于测量最准的一组四重态, $A = 9(J^\pi = 3/2^-)$, 见表 3.

从以上对 IMME 的分析来看, 质量公式 (4) 及 Myers-Swiatecki 公式似乎优于 Weizsäcker 公式与 Danos-Gillet 公式. 当然, 要求一个简单的普遍的质量公式给出定量上符合

表 3 $A = 9(J^\pi = 3/2^-)$ 同位旋四重态

质量公式	Weizsäcker, Danos-Gillet	Myers-Swiatecki (1974)	公式 (4)	实验分析
$b(\text{MeV})$	-2.34	-0.648	-1.61	-1.33
$c(\text{MeV})$	0.346	0.209	0.177	0.264

实验的结果是不切实际的. 要较准确地算出 IMME 中的系数, 需要知道波函数的细节.

三、库仑能差

库仑能差是从 30 年代就为人们注意的一个问题. 早期的库仑能差 $\Delta E_c = E_c(Z + 1) - E_c(Z)$ 的实验数据来自镜核的 β 衰变, 局限于轻核 ($A \leq 43$). 60 年代通过电荷交换反应、(pp) 反应及重离子的直接反应, 证实同位旋在重核中仍是一个近似的好量子数. 在整个周期表中观测出大量的同位旋相似态. 相邻核的同位旋相似态之间的能量差一般被认为是它们之间的库仑能差. 在这方面已积累了相当可观的实验资料^[22]. 根据这些资料可以进一步检验质量公式中的库仑能项的形式.

按照大多数质量公式(例如 Weizsäcker 公式及 Danos-Gillet 公式)所采用的库仑能项 $E_c = k_c Z^2/A^{1/3}$, 将得出

$$\Delta E_c \cdot A^{1/3}/(Z + 1/2) \approx \text{常数}. \quad (9)$$

根据实验数据 ΔE_c , 画出 $\Delta E_c \cdot A^{1/3}/(Z + 1/2)$, 见图 1(a). 它与常数有系统的偏离. 对于轻核, 其值系统偏小. 这个偏离正好与核电荷半径的 $A^{1/3}$ 律中的常数 r_0 的系统偏离相反^[23], 而与巨共振能量的 $A^{-1/3}$ 律的偏离正好相似^[13].

Myers-Swiatecki (1966) 公式中考虑了核表面的弥散 (diffuseness) 的影响, 库仑能项取为

$$E_c(Z) = k_c Z^2/A^{1/3} - C_d Z^2/A,$$

由此可得出

$$\frac{\Delta E_c A^{1/3}}{(Z + 1/2) \left(1 - \frac{C_d}{k_c A^{2/3}}\right)} = \frac{\Delta E_c A^{1/3}}{(Z + 1/2)(1 - 1.689 A^{-2/3})} \approx \text{常数}, \quad (10)$$

见图 1(b). 与公式 (9) 相比, 情况有较大改善. 若采用 Myers-Swiatecki (1974) 的公式 (2'), 忽略其中很微小的 c_2 项及 c_5 项, 则 ΔE_c 单位 KeV

$$\frac{(\Delta E_c + c_4 2^{-1/3}) A^{1/3}}{(Z + 1/2) (1 - c_3/c_1 A^{2/3})} = \frac{(\Delta E_c + 446) A^{1/3}}{(Z + 1/2)(1 - 1.775 A^{-2/3})} \approx \text{常数}, \quad (11)$$

见图 1(c). 偏离常数情况似乎更厉害.

若采用质量公式 (4) 中所取库仑能项形式 $E_c = a_c Z^{5/3}$, 则

$$\Delta E_c/Z^{2/3} \approx \text{常数}, \quad (12)$$

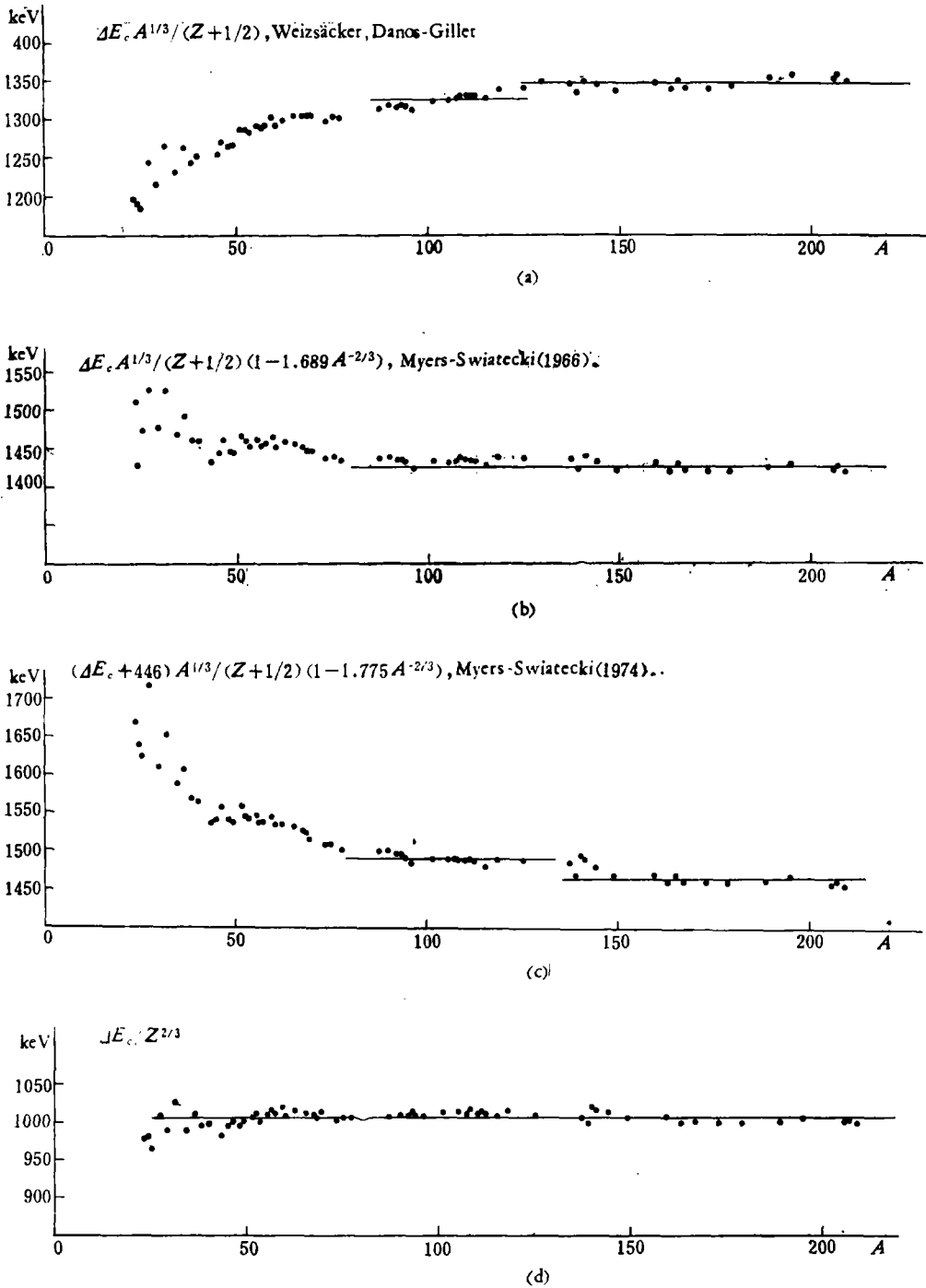


图 1 β 稳定线附近原子核库仑能差的变化

见图 1(d). 可以看出, 从轻核到重核的总的趋势来看, $\Delta E_c / Z^{2/3}$ 的确比较接近于常数. 这与电荷半径的 $Z^{1/3}$ 律 ($R = r_p Z^{1/3}$) 的常数 r_{0p} 较为接近于一常数的情况相似. 以上是对 ΔE_c 的总的变化趋势而言. 至于一个小区域中的 ΔE_c 的变化, 显然不可能用这样一个简

单的公式来很好地概括。首先,壳层效应,特别是形变的影响,没有很好地考虑。小区域中 ΔE_c 的小幅度变化与形变有密切关系。其次,图1中只绘出了最靠近 β 稳定线的原子核的库仑能差。对于远离 β 稳定线的原子核的库仑能差,在理论上以及对实验数据的确切含义,都有待进一步探讨。

四、 β 稳定线

给定 A , β 最稳定的同位素的“质子数” Z_A 由下式给出,

$$\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_A = 0 \quad (13)$$

或

$$\left. \frac{\partial B}{\partial Z} \right|_A = (M_n - M_H) = 0.783 \text{ MeV}. \quad (13')$$

对于奇 A 核 ($B_p = 0$), 如略去壳修正项, 则 β 稳定线位置取决于库仑能与对称能的竞争, 因此从 β 稳定线位置可以对质量公式中的库仑能项及对称能项的形式作出一定的判断。

若不计及壳修正, β 稳定线位置分别由下列各式给出。

Weizsäcker

$$Z_A = \frac{a_{sy} A^{1/3-\alpha} + 0.783 A^{1/3}}{2(a_{sy} A^{1/3-\alpha} + k_c)}, \quad (14)$$

Myers-Swiatecki (1966)

$$Z_A = \frac{(4a_{sy} + 0.783) A^{1/3} - 4a_{s,ssy}}{2[(4a_{sy} - C_d) A^{-2/3} - 4a_{s,ssy} A^{-1} + k_c]}, \quad (15)$$

Danos-Gillet

$$Z_A = \frac{a_{c2}(A+4)A^{\alpha+1/3} + 0.783A^{1/3}}{2(a_{c2}A^{1/3+\alpha} + k_c)}, \quad (16)$$

质量公式 (4),

$$\frac{5}{3} a_c Z_A^{2/3} = a_{sy}(A - 2Z_A + 1)A^{-\alpha} + 0.783. \quad (17)$$

按照上述公式计算出的 Z_A , 可以与实验分析得出的 Z_A 比较^[25]。它们的方均根偏离 χ 分别为

Weizsäcker	$\chi = 0.450,$
Myers-Swiatecki	$\chi = 0.438,$
Danos-Gillet	$\chi = 0.589,$
质量公式 (4)	$\chi = 0.429.$

可以看出: (a) 质量公式 (4) 得出的 Z_A , 与实验偏离最小。 (b) 尽管 Danos-Gillet 公式给出的质量计算值与实验值的偏离比 Weizsäcker 公式要小, 但它给出的 Z_A 与实验值偏离最大。由于 D-G 公式与 Weizsäcker 公式所用库仑能形式相同, 所以这种大的偏离很可能是由于 D-G 公式中对称能项(连同对能项一起)的形式并不合适所造成。因此从 D-G 公式出发去研究远离 β 稳定线的核质量可能不大合适。当然, 要进一步明显改善 Z_A

计算值,壳效应是一定要考虑的。

五、远离 β 稳定线的原子核质量

近年来,通过重离子直接反应已可能测量一些远离 β 稳定线的原子核的质量。这方面的工作已引起很多人注意。这问题与 IMME 有密切关系,但又有所不同。共同点是都研究 A 相同的原子核的质量的变化规律。但前者研究原子核基态的质量关系,即研究 Bohr-Wheeler 抛物线上的核质量的变化。后者只涉及同位旋多重态的内部各成员的质量关系,这些态不一定是基态。

设在 β 稳定线上的核质量记为 $M(A, Z_A)$ 。 A 固定,在 $Z \sim Z_A$ 附近展开。按 Weizsäcker, D-G, M-S 诸质量公式,

$$\frac{\partial^3 M}{\partial Z^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 M}{\partial Z^4} = 0, \dots \quad (18)$$

因此

$$M(A, Z) = M(A, Z_A) + \frac{1}{2} B_A (Z - Z_A)^2 - B_p - B_\pi, \quad (19)$$

其中

$$B_A = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial Z^2} \right) \Big|_{Z=Z_A}. \quad (20)$$

对于奇 A 核,若不计及壳修正,(19)式是一个严格的抛物线。但按照质量公式(4),

$$\frac{\partial^3 M}{\partial Z^3} \neq 0, \quad \frac{\partial^4 M}{\partial Z^4} \neq 0, \dots \quad (21)$$

因此,远离 β 稳定线的核质量并不构成一个严格的抛物线,而是与抛物线有一定偏离的高次曲线。这有待进一步分析实验来判断。分析实验时,若不计及 B_p 与 B_π ,则表为

$$B_A = M(A, Z) + M(A, Z + 2) - 2M(A, Z + 1), \quad (22)$$

而

$$\Delta^3 M = M(A, Z) - 3M(A, Z + 1) + 3M(A, Z + 2) - M(A, Z + 3).$$

按 Weizsäcker、D-G 及 M-S 质量公式, $\Delta^3 M = 0$, 但按质量公式(4), $\Delta^3 M \neq 0$ 。这有待作系统的分析。

六、可裂变度及裂变势垒高度

原子核裂变过程中贯穿着库仑能与表面能的竞争。裂变几率依赖于裂变势垒高度及原子核所处状态。裂变势垒高度 E_b 可从实验上测定。在理论上, E_b 依赖于可裂变度 κ 及壳修正。 κ 是在不可压缩液滴模型中定义的一个量^[26,27]。对于很重的核(例如 $Z \geq 88$),在裂变的鞍点附近,库仑能与表面能的影响几乎相抵消。这时要仔细计算 E_b ,壳修正就很重要。近十年来,这方面的理论和实验都取得相当进展^[26]。例如发现双峰势垒及形状同质异能态。

关于从质量公式去计算可裂变度 x , Myers-Swiatecki (1966) 已有仔细的讨论。众所周知, 质量公式中的对称能项是一种量子效应。Myers 与 Swiatecki 计算 x 时, 把表面对称能项(见(2)式)也考虑进去。他们把(2)式改写成

$$B(A, Z) = C_v A - C_s A^{2/3} - k_c Z^2 / A^{1/3} + C_d Z^2 / A + B_p + B_\pi, \quad (23)$$

其中

$$C_v = a_v \left[1 - \kappa \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right], \quad C_s = a_s \left[1 - \kappa \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right], \quad (24)$$

$$\kappa = a_{sy} / a_v = a_{s, sy} / a_s = 1.79 \quad (25)$$

$$C_v / C_s = a_v / a_s = \text{常数 (与 } A, Z \text{ 无关)}. \quad (26)$$

(23) 式前面三项与不可压缩液滴模型中相应的三项形式上相同。因此他们把可裂变度 x 表为^{19,21}

$$x = \frac{E_c}{2E_s} = \frac{k_c Z^2 A^{-1/3}}{2C_s A^{2/3}} = \frac{k_c Z^2 / A}{2a_s \left[1 - \kappa \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right]}. \quad (27)$$

对于 Weizsäcker 等其它质量公式, 虽然对称能项中没有再明显分出表面对称能项, 但作为一个半经验公式, 表面对称能项的影响已隐含在公式中。我们也可以作类似的处理, 把对称能项分别并入体项及表面能项中去, 写成与(23)式相似的形式, 并保证(26)式成立, 以便与 Myers-Swiatecki 的计算结果比较。

对于 Weizsäcker 公式, 可改写如下

$$B(A, Z) = C_v A - C_s A^{2/3} - k_c Z^2 / A^{1/3} + B_p + B_\pi, \quad (28)$$

其中

$$C_v = a_v \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{sy} T^2 / A^\alpha \right], \quad C_s = a_s \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{sy} T^2 / A^\alpha \right],$$

$$C_v / C_s = a_v / a_s = \text{常数}, \quad x = \frac{k_c Z^2 / A}{2a_s \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{sy} T^2 / A^\alpha \right]}. \quad (29)$$

对于 Danos-Gillet 公式, 可改写为

$$B(A, Z) = C_v A - C_s A^{2/3} - k_c Z^2 / A^{1/3} + B_p, \quad (30)$$

$$C_v = a_v \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{c2} C2(A, Z) A^\alpha \right],$$

$$C_s = a_s \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{c2} C2(A, Z) A^\alpha \right],$$

$$C_v / C_s = a_v / a_s = \text{常数}$$

$$x = \frac{k_c Z^2 / A}{2a_s \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{c2} C2(A, Z) A^\alpha \right]}. \quad (31)$$

质量公式(4)可改写为

$$B(A, Z) = C_v A - C_s A^{2/3} - a_c Z^{5/3} + B'_p + B_\pi, \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 C_v &= a_v \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{sv} T(T+1)/A^\alpha \right], \\
 C_s &= a_s \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{sv} T(T+1)/A^\alpha \right], \\
 C_v/C_s &= a_v/a_s = \text{常数}, \\
 x &= \frac{a_c Z^{5/3} A^{-2/3}}{2a_s \left[1 - \frac{1}{a_v A - a_s A^{2/3}} a_{sv} T(T+1)/A^\alpha \right]}. \tag{33}
 \end{aligned}$$

利用上述各公式计算了一些重核的可裂变度 x 以及不考虑壳修正时的裂变势垒高度 ξ^{LD} (以 E_s 为单位)。见表 4。

表 4 可裂变度 x 及裂变势垒高度 ξ^{LD}

核	x				ξ^{LD} (单位 E_s)			
	M-S	W	D-G	(4)	M-S	W	D-G	(4)
$^{200}_{80}\text{Hg}$	0.6659	0.6730	0.6974	0.6620	0.0307	0.0285	0.0221	0.0319
$^{203}_{81}\text{Ti}$	0.6735	0.6808	0.7055	0.6701	0.0284	0.0263	0.0202	0.0294
$^{207}_{82}\text{Pb}$	0.6800	0.6874	0.7123	0.6777	0.0265	0.0246	0.0187	0.0272
$^{209}_{83}\text{Bi}$	0.6889	0.6963	0.7216	0.6862	0.0242	0.0223	0.0168	0.0249
$^{212}_{84}\text{Po}$	0.6966	0.7041	0.7297	0.6943	0.0223	0.0205	0.0153	0.0228
$^{231}_{90}\text{Th}$	0.7454	0.7531	0.7807	0.7436	0.0126	0.0114	0.00784	0.0129
$^{231}_{91}\text{Pa}$	0.7531	0.7609	0.7888	0.7517	0.0114	0.0103	0.00697	0.0116
$^{234}_{92}\text{U}$	0.7609	0.7687	0.7970	0.7598	0.0103	0.00928	0.00616	0.0105
$^{235}_{93}\text{Np}$	0.7686	0.7765	0.8051	0.7680	0.00929	0.00833	0.00543	0.00937
$^{240}_{94}\text{Pu}$	0.7764	0.7843	0.8133	0.7761	0.00834	0.00745	0.00475	0.00837
$^{243}_{95}\text{Am}$	0.7842	0.7921	0.8215	0.7842	0.00746	0.00664	0.00413	0.00746
$^{246}_{96}\text{Cm}$	0.7930	0.8010	0.8307	0.7927	0.00655	0.00579	0.00351	0.00658
$^{249}_{97}\text{Bk}$	0.7997	0.8078	0.8379	0.8005	0.00591	0.00520	0.00308	0.00583
$^{252}_{98}\text{Cf}$	0.8097	0.8177	0.8482	0.8092	0.00504	0.00441	0.00252	0.00508
$^{254}_{100}\text{Fm}$	0.8274	0.8355	0.8667	0.8262	0.00373	0.00322	0.00169	0.00381

按不可压缩液滴模型计算的裂变势垒高度 $\xi^{LD(1)}$, $\xi^{LD} = 0.725926(1-x)^3 - 0.330239(1-x)^4 + 1.920798 \cdot (1-x)^5 - 0.212537(1-x)^6$.

从计算结果可以看出：(a) 用 D-G 公式计算出的可裂变度 x 值太大，相应的裂变势垒高度太小，与实验值明显不符。考虑壳修正后，矛盾更突出。(b) 对于 β 稳定线附近的原子核，用质量公式 (4) 与 M-S 公式计算出的 x 值几乎相同。

我们还注意到，一个元素的不同同位素的 x 值是不同的。计算表明，当 A 取适当值时， x 取极小值。即相对说来，这个核对于裂变较为稳定。这个核所在的位置姑称为“ f 稳定线”。按照 M-S, W. 及 D-G 公式计算出的 f 稳定线与 β 稳定线的位置相距很远 ($\Delta A \sim 40$)，而按质量公式 (4) 计算出的 f 稳定线与 β 稳定线比较靠近 ($\Delta A \leq 10$)。因此，按照 Weizsäcker, D-G 及 M-S 诸公式，同一元素在 β 稳定线附近的各同位素的裂变势垒 ξ^{LD} ，随 A 增加会有较大幅度的变化。以 Pu 同位素为例 (表 5)， ^{244}Pu 的 ξ^{LD} 比 ^{238}Pu 约大 10% ($\sim 0.6\text{MeV}$)。壳修正的变化很小 (对于 $^{238}\text{Pu} - ^{244}\text{Pu}$ ，壳修正 $\sim 1.8 - 1.7\text{MeV}$)。因此， ξ_{β} 随 A 增大而增大的结论不变。这一点似与实验有矛盾。实验测得，Pu (还有 Am, Cm 等) 的

裂变势垒的内峰高度随 A 增大而略有减少, 外峰高度则基本上不变^[28-29]。按质量公式(4) 计算所得 ξ^{LD} 的变化幅度很小, 计算壳修正后, ξ_{it} 基本上不变。与实验情况较为接近。

表5 Pu 的 x 与 ξ^{LD} 的变化

核	x			ξ^{LD} , (单位 E_t)*		
	M-S	D-G	(4)	M-S	D-G	(4)
²³⁸ Pu	0.7786	0.8155	0.7768	0.00808(5.31)	0.00458(2.88)	0.00829(5.46)
²³⁹ Pu	0.7775	0.8144	0.7764	0.00821(5.39)	0.00466(2.93)	0.00834(5.50)
²⁴⁰ Pu	0.7764	0.8133	0.7761	0.00834(5.48)	0.00475(2.99)	0.00837(5.52)
²⁴¹ Pu	0.7753	0.8122	0.7758	0.00847(5.56)	0.00485(3.05)	0.00841(5.54)
²⁴² Pu	0.7743	0.8112	0.7755	0.00859(5.64)	0.00492(3.10)	0.00844(5.56)
²⁴³ Pu	0.7733	0.8102	0.7752	0.00871(5.72)	0.00500(3.15)	0.00848(5.58)
²⁴⁴ Pu	0.7723	0.8093	0.7750	0.00883(5.80)	0.00507(3.19)	0.00850(5.60)
²⁴⁵ Pu	0.7714	0.8083	0.7748	0.00894(5.87)	0.00515(3.24)	0.00853(5.62)

* 对于 ²³⁸Pu—²⁴⁵Pu, $E_t \approx 656.6$ MeV (M-S. 公式), $E_t \approx 629.5$ MeV (D-G 公式), $E_t \approx 659.0$ MeV (质量公式(4)). 括号中取 MeV 为单位。

参 考 文 献

- [1] C. E. Weizsäcker, *Z. Physik*, **96**(1935), 431.
- [2] H. A. Bethe and R. E. Bacher, *Rev. Mod. Phys.*, **7**(1936), 165.
- [3] E. Fermi, *Nuclear Physics*, (Univ. of Chicago Press, 1950).
- [4] A. E. S. Green, *Nuclear Physics*, (1955), chap. 9.
- [5] J. Wing, and P. Fong, *Phys. Rev.*, **136B**(1964), 923.
- [6] J. Wing, A Comparison of Nucleidic Mass Equations with Experimental Data, Argonne National Laboratory Report, ANL-6814 (1964).
- [7] J. Wing, *Nucl. Phys.*, **A120**(1968), 369.
- [8] J. Wing, Systematic Comparison of Semiepirical Nucleidic Mass Equations, in Proc. 3rd Int. Conf. on Atomic Masses, Winnipeg (1967).
- [9] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys.*, **81**(1966), 1; *Annals of Physics*, **55**(1969), 369; *Annals of Physics*, **84**(1974), 186.
- [10] M. Danos and V. Gillet, Proc. Int. Conf. on Nuclear Structure, Tokyo, (1977), p. 60.
- [11] C. Y. Tseng (曾谨言), T. S. Cheng (程檀生) and F. C. Yang (杨福家), *Nucl. Phys.*, **A334**(1980), 470.
- [12] J. Jänecke, *Nucl. Phys.*, **73**(1965), 57.
- [13] C. Y. Tseng (曾谨言) and F. C. Yang (杨福家), NBI-80-5; 或 Proc. Int. Conf. on Nuclear Physics, Aug. 24—30, 1980, Berkeley, California, p. 753.
- [14] E. P. Wigner, Proc. of the Robert A. Welch Foundation Conference on Chemical Research, ed. by W. D. Milikan, (1957).
- [15] W. Benenson and E. Kashy, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 527.
- [16] W. Benenson and E. Kashy, *Atomic Masses and Fundamental Constants*, Vol. 5, ed. by J. H. Sanders and A. H. Wapstra (1976).
- [17] J. Cerny et al., *Phys. Rev. Lett.*, **13**(1964), 726.
- [18] R. G. H. Robertson, W. S. Chien and D. R. Goosman, *Phys. Rev. Lett.*, **34**(1975), 33.
- [19] A. G. Ledebuhr et al., 私人通讯 (1980).
- [20] J. Aysto et al., *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 43.
- [21] D. M. Moltz et al., *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 43.
- [22] W. J. Courtney and J. D. Fox, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **15**(1975), 141.
- [23] 曾谨言, 物理学报, **24**(1975), 151.
- [24] M. A. Preston and R. K. Bhaduri, *Structure of the Nucleus*, (1975).
- [25] J. W. Dewdney, *Nucl. Phys.*, **43**(1963), 303.

- [26] A. Michaudon, *Advances in Nuclear Physics*, **6**(1973), 1.
 [27] S. Cohen and W. J. Swiatecki, *Annals of Physics*, **19**(1962), 67; **22**(1963), 406.
 [28] B. B. Back et al., in *Physics and Chemistry of Fission* (1973), Vol. 1, p. 3; p. 25.
 [29] R. Vandenbosch and J. R. Huizenga, *Nuclear Fission* (1973), Academic Press.

A CHECK ON INDIVIDUAL TERMS OF THE NUCLEAR MASS FORMULA

ZENG JIN-YAN (C. Y. TSENG) LIN CHUN-ZHEN

(*Peking University*)

YANG FU-JIA (F. C. YANG)

(*Fudan University*)

ABSTRACT

The usual way to check whether a nuclear mass formula is good or not is to compare the calculated mass with experimental value. In this paper some concepts are summarized which check one or two terms in the mass formula separately: (i) P/P' ratio-pairing energy; (ii) Jänecke ratio-symmetry energy; (iii) A -dependence of giant resonance energy-symmetry energy; (iv) IMME (isobaric multiplets mass equation)-Coulomb energy; (v) Difference of Coulomb energies-Coulomb energy; (vi) β -stability line-Coulomb energy and symmetry energy; (vii) Fissibility-Coulomb energy and surface energy. The following nuclear mass formulae are compared with each other: (A) Revised Weizsäcker formula; (B) Danos-Gillet formula; (C) Myers-Swiatecki formula; (D) our formula. The main results are the following: (i) $P/P'=1$ for (A), (B) or (C); $=3/4$ for (D), which is in agreement with the experiment. (ii) From the Jänecke ratio, the form $T(T+1)$ for the symmetry energy is better than $T(T+4)$ or T^2 . (iii) By the symmetry term T^2/A^a , with $a=0.90$, the A -dependence of giant resonance can be explained extremely well. (iv) IMME, $M(A, T_z)=a+bT_z^2+cT_z^3+dT_z^4$. Only for (D), $d \neq 0$. (v) $\Delta E_c = E_c(Z+1) - E_c(Z)$, For (A) and (B), $\Delta E_c A^{1/3}/(Z+1/2) = \text{const.}$; for (C), $\Delta E_c A^{1/3}/(Z+1/2) (1-1.689)/A^{2/3} = \text{const.}$; for (D), $\Delta E_c Z_s^{1/3} = \text{const.}$, which is in good agreement with the experiment. (vi) For the β -stability line, if we compare the calculated Z_A with the experimental value Z_A and calculate the root mean square deviations, then for (A), $\text{RMS} = 0.450$; (B) $= 0.589$; (C) $= 0.438$; (D) $= 0.429$.