

裂变质量分布的非平衡统计理论

王 正 行

(北京大学技术物理系)

摘 要

本文把 Ayik 等人关于重离子核反应的非平衡统计理论运用于核裂变过程,证明了冯氏裂变统计理论是 Fokker-Planck 方程的稳定解情形,平衡时质量分布的峰值位于位能曲面的极小值处。本文还通过用 Suzuki 标度极限近似法解一个简化的数学模型,表明裂变过程中核子输运趋向平衡的时间约为 10^{-21} 秒的数量级,估计出 $^{235}\text{U}(n, f)$ 从鞍点到断点的时间应大于 1.6×10^{-21} 秒。

一、引 言

Струтинский 的宏观-微观方法使我们对裂变核的位能曲面有了比较满意的了解^[1]。在此基础上,已有可能依据静态位能曲面来进一步探讨裂变核直到断裂时的运动变化。在实验上,目前我们能够获得的是裂变后的碎片质量分布以及电荷、激发能和动能的分布等等。关于裂变过程的一个成功的理论,应该对于这些裂变后的现象作出恰当的解释。我们已经知道,不考虑集体运动能量的耗散的纯动力学理论对于裂变碎片质量分布的解释是不能令人满意的^[2]。这表明核变形的集体运动与单核子运动之间的耦合在裂变过程中是不能忽视的重要因素。所以,在动力学理论的框架中如何处理这种耦合就成了一个关键性的问题^[3]。在唯象性的宏观理论中可以用粘滞性的概念来考虑这种耦合所引起的集体运动能量的耗散,但若希望把理论保持在微观动力学的水平上,这个问题就相当困难。另一方面,如果我们只满足于统计性的描述,在统计概念的基础上来建立裂变过程的理论,这个问题就有可能比较容易解决。在这方面,最有名的就是冯平观的统计理论^[4],它假设裂变核从位能曲面的鞍点到断点的过程进行得足够缓慢,在每一瞬间都处在统计平衡的状态,而减少的位能几乎全部转变为核的内部激发(热)能。鉴于这个理论取得的成功,如何从理论上论证上述统计假设就是一个很有意义的问题^[5]。此外,自然也希望把这个理论推广,以便把与裂变的时间进程有关的信息包括进来,从而为处理集体运动能量的耗散提供一种不同的途径。本文是在非平衡统计理论的框架之内来探讨这两个问题的一个赏试。

对于核系统的非平衡统计过程, Ayik, Schürmann 和 Nörenberg^[6] 已经建立了一个

关于重离子碰撞的微观输运理论,对它稍作推广就可以用到重核的裂变过程^[7].在第二节中我们给出这个理论的概要和相应的 Fokker-Planck 方程,同时证明冯氏统计理论是这个方程在稳定情况下的解.第三节讨论一个简化的模型,给出 Fokker-Planck 方程初值问题的近似解.第四节具体运用到快中子引起的 $^{235}\text{U}(n, f)$ 过程,估计出只要断裂时间大于 1.6×10^{-21} 秒,就可以得到冯氏理论的结果.第五节是简短的讨论.

二、Fokker-Planck 方程

裂变核作为一个多核子体系,可以用少数宏观变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (它们可以是质量数、激发能、电荷等)来统计性地描述.假设 t 时刻体系处于 x 的几率密度 $P(x, t)$ 满足 Master 方程^[8]

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int dx' w(x, x' - x; t) [\rho(x)P(x', t) - \rho(x')P(x, t)], \quad (1)$$

其中 $\rho(x)$ 是体系的量子态密度, $w(x, \xi; t)$ 是体系在 t 时刻单位时间内从 x 跃迁到 $x + \xi$ 的几率.在(1)式中已经假设 $w(x, x' - x; t) = w(x', x - x'; t)$.若再假设 $w(x, \xi; t)$ 只在 $\xi = 0$ 附近才明显地不等于零,以及 $\rho(x)$ 和 $P(x, t)$ 是 x 的比较平滑的函数,有连续的二阶微商,则可把 $\rho(x')$ 和 $P(x', t)$ 在 $x' = x$ 点展开为 $x' - x$ 的幂级数,把 $w(x, \xi; t)$ 在 $(x + x')/2 = x$ 点展开为 $(x' - x)/2$ 的幂级数,只保留到二次项,(1)式就可化成下述 Fokker-Planck 方程^[9]

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} [v_i(x, t)P(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij}(x, t)P(x, t)], \quad (2)$$

其中

$$v_i(x, t) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(x)D_{ij}(x, t)], \quad (3)$$

$$D_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \rho(x) \int d\xi w(x, \xi; t) \xi_i \xi_j. \quad (4)$$

我们采用 Einstein 约定,重复的指标都意味着求和.若把 $P(x, t)$ 看成 x 空间的密度场,则 v_i 就是漂移速度矢量, D_{ij} 就是扩散系数张量, Fokker-Planck 方程(2)描述 $P(x, t)$ 在 x 空间中的扩散过程.我们用 Fokker-Planck 方程来定性分析问题时,这个物理图象是很有用的.

取裂变碎片重块的质量数 A_1 和裂变核在鞍点上的总激发能 ϵ^* 作为宏观变量: $x = (x_1, x_2) = (A_1, \epsilon^*)$. Ayik 等^[6]在单粒子哈密顿量的情况下用统计核谱方法给出

$$D_A = D_{11} = \frac{4\pi^2 \gamma \Delta^{1/2}}{\tau_0} \left[\frac{E^*(A_1)}{2\pi(g_1 + g_2)} \right]^{1/4} \left[\frac{(g_1 g_2)^{1/3}}{g_1^{1/3} + g_2^{1/3}} \right]^2, \quad (5)$$

$$D_E = D_{22} = \frac{\pi^2 \gamma \Delta^{5/2}}{\tau_0} \left[\frac{E^*(A_1)}{2\pi(g_1 + g_2)} \right]^{1/4} (g_1 g_2)^{1/3}, \quad (6)$$

$$D_{A\epsilon} = D_{12} = D_{21} = 0, \quad (7)$$

其中 $\tau_0 = 2\pi\hbar/1\text{MeV} \approx 4 \times 10^{-21}$ 秒; g_i 是碎片 A_i 的单粒子能级密度,近似取 $A_i/12\text{MeV}$;

γ 与 Δ 是单粒子哈密顿量的矩阵元参数, 分别为 $\gamma = 4$, $\Delta = 2\text{McV}$; $E^*(A_1)$ 是与变形 A_1 相应的激发能. 我们进一步假设裂变核从鞍点到断点的过程中位能的减少全部转变为内部激发能, 则有

$$E^*(A_1) = \varepsilon^* - U_A(A_1) + U_0(A_1), \quad (8)$$

其中 $U_A(A_1)$ 是重碎片质量数为 A_1 时的位能, $U_0(A_1)$ 是裂变核在鞍点的结合能, 假设在鞍点的质量分布是对称的, 则 $A_1 = A/2$, A 为裂变核的质量数.

可以看出, D_A 随 A_1 的变化很平滑, 可以近似地略去它对 A_1 的微商; 同样, D_E 随 ε^* 的变化也比较平滑, 可以近似地略去它对 ε^* 的微商. 在这种近似下, Ayik 等人给出了下列 Einstein 关系^[6]

$$\nu_A = \frac{D_A}{T} \frac{\partial E^*}{\partial A_1} = - \frac{D_A}{T} \frac{\partial U_A(A_1)}{\partial A_1}, \quad (9)$$

$$\nu_\varepsilon = \frac{D_\varepsilon}{T}, \quad (10)$$

其中 T 为裂变核的核温度,

$$T = \rho(E^*) \left[\frac{\partial \rho(E^*)}{\partial E^*} \right]^{-1} \approx \sqrt{\frac{E^*}{g_1 + g_2}}. \quad (11)$$

本文只讨论质量分布, 定义 t 时刻重块质量数为 A_1 的几率为

$$P(A_1, t) = \int d\varepsilon^* P(A_1, \varepsilon^*, t),$$

则可从关于 $P(A_1, \varepsilon^*, t)$ 的 Fokker-Planck 方程 (2) 推出关于 $P(A_1, t)$ 的方程

$$\frac{\partial P(A_1, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial A_1} [\nu_A P(A_1, t)] + \frac{\partial^2}{\partial A_1^2} [D_A P(A_1, t)], \quad (12)$$

其中 ν_A 和 D_A 仍用上面的公式 (5), (9), (11), 但应把其中的 ε^* 理解为某一平均值 $\bar{\varepsilon}^*$. (9) 和 (12) 式表明, 在裂变过程中, 质量分布的变化是在 A_1 空间的扩散过程, 漂移速度 ν_A 正比于 A_1 空间中位能曲面的负梯度, 反比于核温度, 所以可称位能 $U_A(A_1)$ 为质量漂移的推动势.

最后, 我们来讨论与冯氏统计理论的关系. 从 (3) 和 (4) 式很容易看出, Fokker-Planck 方程 (2) 在稳定情况下的解为

$$P(x) = C\rho(x), \quad (13)$$

C 为归一化常数. 实际上可以看出, 这也正是 Master 方程 (1) 在稳定情况下的一个解, 而它正是冯氏理论的基本假设. 所以, 冯氏理论已经包含在本理论之中, 作为稳定情况的一个特例.

三、简化模型和初值问题的近似解

在运用上节的理论时, 需要知道推动势 $U_A(A_1)$. 从文献 [9] 的图 7-11, 14 和 15 可以看出, 从鞍点到断点, 随着裂变核颈部的收缩, 推动势也在变化, 所以 $U_A(A_1)$ 应是时间 t 的某种函数. 如果我们知道了颈部收缩的运动学, 相应地也就可以确定 $U_A(A_1)$ 随时

间的变化。这要从裂变动力学的角度来进行研究。我们不在此讨论这个问题，而是唯象地直接假设一个 $U_A(A_1)$ 随时间变化的数学模型。这相当于作了一个部分绝热的假设：假设颈部收缩的运动与内部运动之间没有耦合，可以单独由动力学来确定。同时，还相当于对颈部收缩的复杂过程作了某种平均，而 $U_A(A_1)$ 随时间的变化只能看作是唯象地描述了裂变核颈部收缩过程的“宏观”的特征。

我们具体讨论不对称裂变的情况。从文献 [9] 的图 7-9 可以看出，随着颈部的收缩，位能谷的位置和深度都在变化。设断点处位能谷位于 A_c ，采用约化变量 $x = (A_1 - A_c) / |A_c - A_s| = (A_1 - A_s) / d$ ，则我们可以近似地把这些图中的 $U_A(A_1) = U(x)$ 表达为

$$U(x, t) = \alpha(t) k x^2 \left[\eta^2(x) - \frac{1}{2} x^2 \right] + U_0(t), \quad (14)$$

其中 $U_0(t)$ 表示对称分布 $x = 0$ 处位能随着颈部收缩的变化， $\alpha(t)$ 表示位能谷相对于 $x = 0$ 处的深度的变化， $\eta(t)$ 表示位能谷的位置的变化。这三个函数唯象地描述了裂变颈部收缩过程的运动学。在图 1 中，我们画出了在 ^{236}U 的断点附近的推动势。图中的实线 a 是 Mustafa 等人^[9]用不对称双中心壳模型加上 BCS 配对相互作用采用 Струтинский 方法算得的 ^{236}U 核在 $R = 1\text{fm}$ 的位能曲线；点划线 b 是我们的近似(14)式；中心在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处的两条虚线 c、d 是分别在这两点与(14)式曲线相切的抛物线（相应于下面要讲到的线性近似(20)和(29)式），有关参数由实线位能谷（ $x = 1$ 处）的深度定出。由(9)式可以看出， $U_0(t)$ 项对漂移速度没有贡献，我们在图中已经减去了这一项的值。

在这个简化模型中，Fokker-Planck 方程 (12) 可以经过时间 t 和空间 x 的标度变换 $t \rightarrow \tau$, $x \rightarrow \xi$ 而化成

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \xi} [vP] + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [DP], \quad (15)$$

其中

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t dt \alpha(t) \eta^2(t), \quad \xi = \frac{x}{\eta(t)}, \quad (16)$$

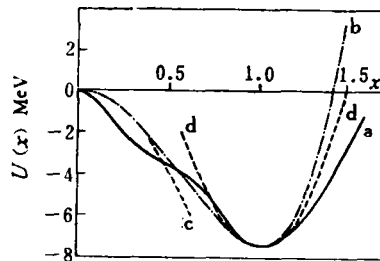


图 1 ^{236}U 的断点附近 ($R = 1\text{fm}$) 的推动势 $U(x)$ 。

- a. Mustafa 等人^[9]的曲线。
- b. 我们的近似曲线: $U = -15x^2(1 - x^2/2)$ 。
- c. 在 $x = 0$ 附近的线性近似: $U = -15x^2$ 。
- d. 在 $x = 1$ 附近的线性近似: $U = -7.5 + 30(x - 1)^2$ 。

$$D = \frac{D_0}{\alpha(t)\eta^4(t)}, \quad D_0 = \frac{D_A}{d^2}, \quad (17)$$

$$v = -\frac{D_0}{T} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[k\xi^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) \right] = \gamma\xi(1 - \xi^2), \quad \gamma = -\frac{2kD_0}{T}. \quad (18)$$

假设 $t = 0$ 时裂变核质量分布是对称的, 则 Fokker-Planck 方程 (15) 的初值可以写成 δ 函数

$$P(\xi, 0) = \delta(\xi). \quad (19)$$

由于 (18) 式的 v 是 ξ 的奇函数, 方程 (15) 在空间反演变换 $\xi \rightarrow -\xi$ 下不变, 所以如果初始分布 $P(\xi, 0)$ 是左右对称的, 则扩散过程不会破坏这种对称性, 在以后任一时刻 t 的分布 $P(\xi, t)$ 也是左右对称的.

方程 (15) 不存在严格的分析解^[10], 我们用 Suzuki 的标度极限方法来求它的近似解^[11,12]:

P 从 $\xi = 0$ 开始, 在推动势 $U(x)$ 和密度梯度 $\partial P/\partial \xi$ 的作用下在 ξ 空间中向两边扩散, 当 t 小时 τ 亦小, P 只局限于 $\xi = 0$ 附近, 可以作线性化近似

$$v(\xi) = \gamma\xi(1 - \xi^2) \approx \gamma\xi, \quad (20)$$

于是 (15) 式成为“线性”Fokker-Planck 方程, 虽然扩散系数 D 依赖于时间 τ , 我们仍可用文献 [13] 中的变换严格解出满足初值 (19) 的归一化解为

$$P(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\xi^2/2\sigma^2}, \quad (21)$$

$$\sigma^2(\tau) = 2e^{2\gamma\tau} \int_0^\tau d\tau D(\tau) e^{-2\gamma\tau}. \quad (22)$$

这是一个宽度 σ 随时间 τ 增加的 Gauss 分布, 当时间增加到某一 τ_1 时, 宽度增加到某一值 $\sigma_1 = \sigma(\tau_1)$, P 不再局限于 $\xi = 0$ 附近, 线性近似 (20) 不能用. 我们选取 σ_1 为漂移速度的拐点的值 $\sigma_1^2 = 1/3$, 在这一点上漂移速度达到极大, 再往两边扩散时漂移速度将逐渐减小. 于是确定时间 τ_1 的条件为

$$\sigma_1^2 = 2e^{2\gamma\tau_1} \int_0^{\tau_1} d\tau D(\tau) e^{-2\gamma\tau}. \quad (23)$$

从时间 τ_1 开始, 我们恢复 $v(\xi)$ 的严格表达式 (18), 略去扩散项, 化成下列初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi} (vP), \\ P(\xi, \tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-\xi^2/2\sigma_1^2}, \end{cases} \quad (24)$$

它的解也可严格求出^[11]为

$$P(\xi, \tau) = \frac{f'(\xi)}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-f^2(\xi)/2\sigma^2}, \quad (25)$$

$$\sigma^2(\tau) = \sigma_1^2 e^{2\gamma(\tau-\tau_1)}, \quad (26)$$

$$f(\xi) = \exp \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\gamma d\xi}{v(\xi)}. \quad (27)$$

其中常数 ξ_0 选择得使 $f(\xi)$ 按 ξ 的幂次展开时线性项的系数为 1. 当 $v(\xi)$ 取 (18) 式时, 取 $\xi_0^2 = 1/2$, 有 $f(\xi) = \xi/\sqrt{1-\xi^2}$. (25) 式也是一个宽度 σ 随时间增加的分布, 当时间 τ 增加到某一 τ_2 时, 宽度增加到 $\sigma_2 = \sigma(\tau_2) = 1$. 由于在 $\xi^2 = 1$ 处的漂移速度为 0, 我们不能再去略去扩散项, 否则 P 将在这一点上“堆集”起来. 确定 τ_2 的条件为

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 e^{2\gamma(\tau_2 - \tau_1)}. \quad (28)$$

从时间 τ_2 开始, 恢复扩散项, 另外, 由于 P 已经扩散到了位能谷 $\xi^2 = 1$ 附近, 又可采用线性化近似

$$v(\xi) = \gamma\xi(1 - \xi^2) \approx 2\gamma(\xi_e - \xi), \quad (29)$$

其中当 ξ 在 $+1$ 附近时 $\xi_e = \xi_+ = 1$, 当 ξ 在 -1 附近时 $\xi_e = \xi_- = -1$. 初值为

$$P(\xi, \tau_2) = \frac{f'(\xi)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-f^2(\xi)/2\sigma_2^2}. \quad (30)$$

与前面 (21) 式类似地, 可以严格求出满足初值 (30) 的归一化解为

$$P(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' P(\xi', \tau_2) e^{-(\xi - \xi_e)^2/2\sigma^2}, \quad (31)$$

$$\sigma^2(\tau) = 2e^{-4\gamma\tau} \int_{\tau_2}^{\tau} d\tau' D(\tau') e^{4\gamma\tau'}, \quad (32)$$

$$\xi_e = \xi_e + (\xi' - \xi_e) e^{-2\gamma(\tau - \tau_2)'}. \quad (33)$$

当时间 τ 足够长时, 可以把积分 (31) 和 (32) 近似算出为

$$P(\xi, \tau) = \begin{cases} P_-(\xi, \tau), & \text{当 } \xi < 0 \text{ 时,} \\ P_+(\xi, \tau), & \text{当 } \xi > 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (34)$$

$$P_e(\xi, \tau) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\xi - \xi_e)^2/2\sigma^2} \left[1 \pm a(\xi - \xi_e) + \frac{\pi}{4} a^2(\xi - \xi_e)^2 - b \right], \quad (35)$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma_2 \sigma^{-2} e^{-2\gamma(\tau - \tau_2)}, \quad b = \frac{1}{2} \sigma_2^2 \sigma^{-2} e^{-4\gamma(\tau - \tau_2)},$$

$$\xi_e = \xi_e [1 - e^{-2\gamma(\tau - \tau_2)}], \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) = & \left[\frac{2D(\tau)}{4\gamma} - \frac{2D'(\tau)}{(4\gamma)^2} + \frac{2D''(\tau)}{(4\gamma)^3} + \dots \right] [1 - e^{-4\gamma(\tau - \tau_2)}] \\ & + \left[\frac{2D'(\tau)}{(4\gamma)^2} - \frac{2D''(\tau)}{(4\gamma)^3} + \dots \right] 4\gamma(\tau - \tau_2) e^{-4\gamma(\tau - \tau_2)} \\ & - \left[\frac{D''(\tau)}{(4\gamma)^3} + \dots \right] [4\gamma(\tau - \tau_2)]^2 e^{-4\gamma(\tau - \tau_2)} + \dots. \end{aligned} \quad (37)$$

(35) 式成立的条件是 τ 足够长, 使得 $a \ll 1$. 这时质量分布 $P(\xi, \tau)$ 近似地为两个分别以 ξ_{\pm} 为中心的 Gauss 分布, 随着时间的增加, 分布的中心 ξ_{\pm} 趋向于位能谷 ξ_{\pm} , 分布的宽度趋向于 $(D_0/2\gamma)^{1/2}$.

四、对 $^{235}\text{U}(n, f)$ 的应用

从文献 [9] 的图 7 可以看出, 若取 $A_c = 140$, 则位能谷的位置基本上在 $x = 1$ 处, 可

以近似地取

$$\eta(\xi) = 1, \quad (38)$$

从而以前的公式中的 ξ 都换成 x . 另外, 当裂变核颈部半径从 5.7fm (相应于内垒处) 收缩到 1fm (相应于断点附近) 时, 位能谷的相对深度约从 -1MeV 增加到 7.5MeV , 于是我们可以取 $k = -15\text{MeV}$ 和

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\tau_0 - \tau)}}, \quad (39)$$

参数值 $\beta\tau_0$ 确定 $\tau = 0$ 时刻位能谷的相对深度, β 确定裂变进行的速率. 条件 $\alpha(t_s) = \alpha_s \approx 1$ 确定断裂的时间 t_s , 我们取 $\alpha_s = 0.999$, 这时的位能谷相对深度为 7.49MeV , 相应的颈部半径在 1fm 附近. 我们取 $\beta\tau_0 = 2$, 这相当于从内垒与外垒之间某一位置处开始计算. 对于这个模型 (38) 和 (39) 式, 可以算出

$$t = \tau + \frac{1}{\beta} e^{\beta\tau_0} (1 - e^{-\beta\tau}), \quad (40)$$

$$\sigma^2(\tau) = \begin{cases} \frac{D_0}{\gamma} (e^{2\gamma\tau} - 1) + \frac{D_0 e^{\beta(\tau_0 - \tau)}}{\gamma + \beta/2} [e^{(2\gamma + \beta)\tau} - 1], & \text{当 } \tau \leq \tau_1 \text{ 时,} \\ \frac{D_0}{2\gamma} \left\{ [1 - e^{-4\gamma(\tau - \tau_2)}] + \frac{4\gamma e^{\beta(\tau_0 - \tau)}}{4\gamma - \beta} [1 - e^{-(4\gamma - \beta)(\tau - \tau_2)}] \right\}, & \text{当 } \tau > \tau_2 \text{ 时,} \end{cases} \quad (41)$$

当 $\tau_1 < \tau \leq \tau_2$ 时用 (26) 式的 $\sigma^2(\tau)$. 由 Ayik 公式 (5) 和 (11) 式, 算得 $D_0 = 3.9E^{*1/4} \times 10^{19} \text{秒}^{-1}$. $\gamma = 5.2E^{*1/4} \times 10^{21} \text{秒}^{-1}$. 设入射中子能量为 2MeV , 于是在 $\tau \leq \tau_1$ 时取 $E^* = 0.5 \text{MeV}$, $\tau \geq \tau_2$ 时取 $E^* = 8\text{MeV}$, 可以由 (41) 式用数值方法算出 $\tau_1 = \tau_1(\tau_0)$. 如图 2, τ_0 和 τ_1 的单位均为 10^{-21} 秒. 由此和 (28) 式即可算出 $\tau_2 = \tau_2(\tau_0)$:

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \tau_1 + 0.178 \times 10^{-21} \text{秒}. \quad (42)$$

根据断裂时的 $\alpha_s = \alpha(\tau_s)$, 可从 (39) 和 (40) 式算出断裂的时刻 τ_s 和 t_s 为

$$\tau_s = \left[1 - \frac{1}{\beta\tau_0} \ln \left(\frac{1}{\alpha_s} - 1 \right) \right] \tau_0 = \kappa\tau_0, \quad (43)$$

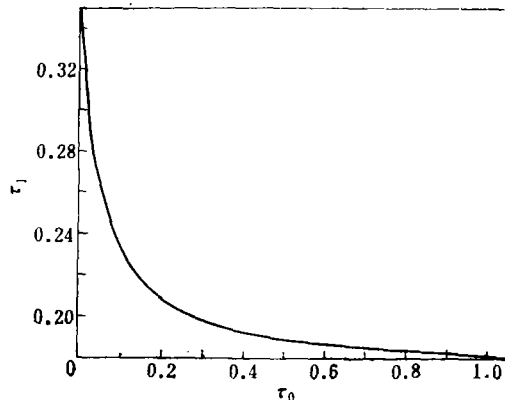


图 2 函数 $\tau_1 = \tau_1(\tau_0)$. τ_0 和 τ_1 的单位均为 10^{-21} 秒.

$$t_s = \left[\kappa + \frac{1}{\beta\tau_0} e^{\beta\tau_0}(1 - e^{-\kappa\beta\tau_0}) \right] \tau_0 = \kappa_s \tau_0. \quad (44)$$

代入 $\beta\tau_0 = 2$ 和 $\alpha_s = 0.999$, 得 $\kappa = 4.45$, $\kappa_s = 8.15$.

在断裂时质量分布已经出现双峰形状的条件是 $\tau_s > \tau_2$, 也就是

$$\kappa\tau_0 > \tau_1 + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}, \quad (45)$$

与 $\tau_1 = \tau_1(\tau_0)$ 联立, 可以解出出现双峰型分布的条件为 $\tau_0 > \tau_{c1} = 0.072 \times 10^{-21}$ 秒, 相应地有

$$t_s > t_{c1} = \kappa_s \tau_{c1} = 0.59 \times 10^{-21} \text{ 秒}. \quad (46)$$

另外, 在断裂时双峰中心位置 A_1 大于 139 的条件是 $\bar{x}_c > x_c = (139 - 118)/22 = 0.95$, 由 (36) 式有 $1 - \exp[-2\gamma(\tau_s - \tau_2)] > x_c$, 这给出

$$\kappa\tau_0 > \tau_1 + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(1 - x_c)}, \quad (47)$$

与前面类似地, 与 $\tau_1 = \tau_1(\tau_0)$ 联立, 可以解出 $\tau_0 > \tau_{c2} = 0.2 \times 10^{-21}$ 秒, 相应地有

$$t_s > t_{c2} = \kappa_s \tau_{c2} = 1.63 \times 10^{-21} \text{ 秒}. \quad (48)$$

实验上测出 $^{235}\text{U}(n, f)$ 的重峰位置在 $x = 1$ 处, 所以断裂的时间应满足 (48) 式. 这与冯氏^[5]的估值 $1 < t_s \times 10^{21} < 9$ 相符, 与 Nix^[3] 从动力学计算估计的 $t_s < 3 \times 10^{-21}$ 秒也不矛盾. 但是比贺泽君、李盘林^[7]的断点输运模型用数值计算得出的输运时间 16×10^{-21} 秒要小一个数量级, 不过由于他们的文章中没有给出“输运时间”的工作定义, 这种比较还是不能肯定的.

图 3 绘出了 ^{236}U 在通过鞍点以后几个不同时刻的质量分布曲线 $P(x, t)$. 纵坐标是 $200P(x, t)/22$ 的值, 其中因子 200 是由于通常把质量分布的实验数据归一到百分之二

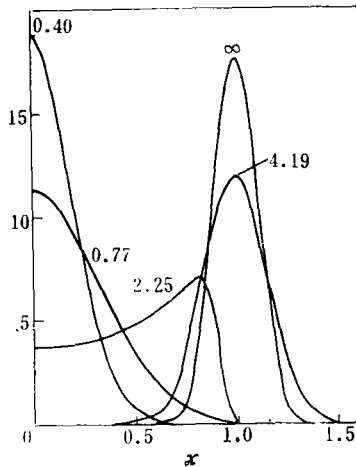


图 3 ^{236}U 在通过鞍点以后几个不同时刻的质量分布曲线 $P(x)$. 纵轴是 $200P(x)/22$, 曲线旁的数字是相应的时刻 t , 单位均为 10^{-21} 秒. $\tau_0 = 1 \times 10^{-21}$ 秒. $t = 2.25$ 的曲线相应于 $\tau = \tau_2$ 的情况.

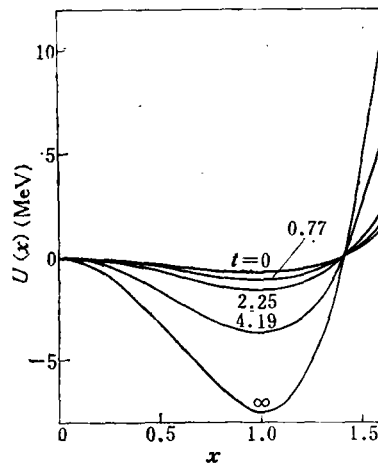


图 4 在几个不同时刻的推动势 $U(x)$. 曲线旁的数字是相应的时刻 t , 单位均为 10^{-21} 秒. $\tau_0 = 1 \times 10^{-21}$ 秒. $t = 2.25$ 的曲线相应于 $\tau = \tau_2$ 的情况.

百, 因子 22 来自宏观变量的变换 $x = (A_1 - A_s)/d$ 中的 $d = 22$. 参数 τ_0 取 1×10^{-21} 秒, 相应的 $t_1 = 1.3 \times 10^{-21}$ 秒, $t_2 = 2.25 \times 10^{-21}$ 秒, $t_s = 8.15 \times 10^{-21}$ 秒. 曲线旁的数字是该曲线相应的时刻 t , 单位均为 10^{-21} 秒. 图 4 给出了相应的几个时刻的推动势 $U(x, t)$, 与图 1 一样, 已经减去了 $U_0(t)$ 项的值. 我们可以看出, 随着时间的增加, 核子由初始时刻在 $x = 0$ 点的 δ 函数分布, 逐渐向两边(分布曲线对纵轴左右对称, 左半部没有画出)扩散. 在 $0 \leq t \leq t_1$ 时区内, 是一个逐渐加宽的对称 Gauss 分布; 在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 时区内, 分布的峰位逐渐从对称位置 $x = 0$ 移向左右两侧, 当 $t = t_2$ 时已经接近位能谷处; 在 $t_2 < t$ 时区内, 成为有左右两个峰的不对称分布, 峰位逐渐趋向位能谷处; 当 $t \rightarrow \infty$ 时的平衡分布, 是以位能谷为中心的双 Gauss 型不对称分布.

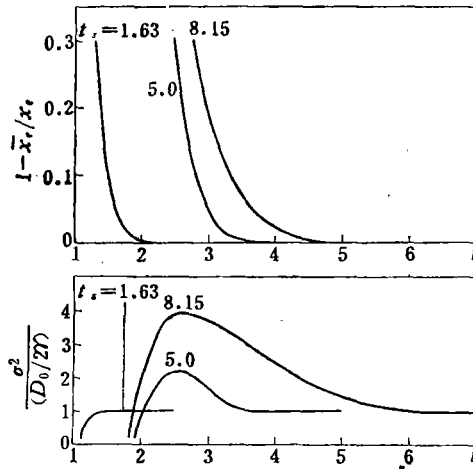


图 5 上图是 $t > t_2$ 时双峰分布的峰位随时间 t 的变化, 下图是峰宽随时间 t 的变化. 曲线旁的数字是相应的断裂时间 t_s . 时间的单位均为 10^{-21} 秒.

图 5 给出了参数 τ_0 取几个不同值时双峰的宽度 $\frac{\sigma^2}{D_0/2r}$ 和峰位 $1 - \frac{\bar{x}_c}{x_c}$ 随时间 t 的变化, 曲线旁的数字是相应的断裂时间 t_s . 时间的单位均为 10^{-21} 秒. 前面讨论过的 $\tau_0 = 1 \times 10^{-21}$ 秒情况相应的断裂时间 $t_s = 8.15 \times 10^{-21}$ 秒, 这比上面给出的 $t_{c2} = 1.63 \times 10^{-21}$ 秒要大得多, 从(图 5 上)可以看出, 双峰的宽度 σ 随着时间的增加很快地趋向平衡态的值 $\sqrt{D_0/2r}$, 在 6.3×10^{-21} 秒以后其差别就 $< 5\%$. 双峰的位置 \bar{x}_c 要比宽度更快地趋向于平衡态的值 x_c , 在 3.7×10^{-21} 秒以后其差别就 $< 5\%$. $\tau_0 = 0.61 \times 10^{-21}$ 秒的情况相应的断裂时间 $t_s = 5.0 \times 10^{-21}$ 秒, 也比 t_{c2} 大得多. 从(图 5 下)可以看出, 在 3.5×10^{-21} 秒以后峰宽 σ 与 $\sqrt{D_0/2r}$ 的差别就 $< 5\%$, 而在 3.0×10^{-21} 秒以后峰位 \bar{x}_c 与 x_c 的差别就 $< 5\%$. $\tau_0 = 0.2 \times 10^{-21}$ 秒的情况相应的断裂时间 $t_s = 1.63 \times 10^{-21}$ 秒, 刚好等于 t_{c2} . 从图上可以看出, 在 1.3×10^{-21} 秒以后峰宽 σ 与 $\sqrt{D_0/2r}$ 的差别就 $< 5\%$, 而刚好在断裂时刻峰位 \bar{x}_c 与 x_c 的差别等于 5% . 所以, 如果断裂时间 $t_s \geq t_{c2}$, 我们就可以认为断裂时的质量分布在 5% 的误差以内是平衡分布.

五、结果的讨论

前面讨论的主要结果是：第一，Fokker-Planck 方程的稳定解所描述的平衡分布就是冯氏统计理论的分布；第二，平衡分布的峰值位于位能曲面的极小值处；第三，重核内单核子输运过程进行得相当快，趋向平衡的弛豫时间约为 10^{-21} 秒数量级，只要从鞍点到断点的动力学过程所经历的断裂时间比这个弛豫时间大，就可以认为重核在断裂时处于统计平衡状态。

根据第一点，我们在前面对一个可以求出近似分析解的简化数学模型所作研究的基础上，就可以来对冯氏理论的基本假设作出一些定性的讨论。我们可以看出，在从鞍点开始的第一个时区中，分布是单峰型对称分布，第二个时区中分布从单峰型对称分布逐渐向双峰型不对称分布过渡，所以从 $t = 0$ 到 $t = t_2$ 的这个过程不能看成是“在每一瞬间都处在统计平衡状态”的准静态过程（因为统计平衡状态的峰位处于位能谷处）。不过，由于我们关于在 $t = 0$ 时质量分布是对称 δ 函数的这一假设本身也还值得进一步研究，所以我们还不能据此作出在从鞍点到断点过程的初始阶段冯氏假设不成立的结论，而只能说有理由对它提出疑问。另外，由于 t_2 值在整个断裂时间 t_s 中所占比例不大（例如： $t_s = 1.63$ 时 $t_2 = 1.11$ ， $t_s = 5.0$ 时 $t_2 = 1.9$ ， $t_s = 8.15$ 时 $t_2 = 2.25 \times 10^{-21}$ 秒），所以，既使在此阶段中冯氏假设不成立，对冯氏理论来说也不引起任何实质性的问题。

关于第二点，我们首先要指出，这是一个相当普遍的结论。实际上，只要从方程 (12) 就可以看出，平衡分布时有

$$\frac{\partial}{\partial A_1} [D_A P(A_1)] = v_A P(A_1), \quad (49)$$

所以，如果扩散系数 D_A 近似地与 A_1 无关，质量分布 $P(A_1)$ 的极大值就位于漂移速度的零值处，这也就是位能 $U_A(A_1)$ 的极小值处。所以，我们可以不局限于简化模型 (14) 式，而在更精确的基础上来讨论。Mustafa 等人^[9]的计算表明，随着 ^{236}U 核颈部半径 R 从 5 fm 附近逐渐减小到 1 fm，位能谷的位置从 $A_1 = 142$ 逐渐移向 $A_1 = 140$ ，在 $R = 2.2$ fm 以后就基本上位于 $A_1 = 140$ 处（见文献 [9] 的图 2）。实验测量到的 ^{236}U 裂变质量分布重峰位置恰好是 $A_1 = 140$ ，所以我们可以说：Mustafa 等人^[9]关于 ^{236}U 核位能曲面的计算结果，支持了冯氏关于裂变核在断点处于统计平衡状态的假设。于是，我们从非平衡统计理论出发，得到了与冯氏基于平衡统计理论的计算而得出的^[10]相同的结论。

关于第三点，由于我们的计算采用了简化的数学模型 (14)、(38) 和 (39) 式，在求解 Fokker-Planck 方程 (15) 时又使用了 Suzuki 标度极限近似，所以结果是初步的。若把 (38) 式换成一个随时间变化的函数，看来更符合实际情况。这将使具体计算复杂化。定性地看，如果位能谷是从比 $x = 1$ 稍大的位置逐渐移向 $x = 1$ ，则从 $x = 0$ 点扩散到位能谷的时间将稍增长，使得向相反方向的漂移开始得稍晚，因而双峰的峰位将较早地到达 $x = 1$ ，这使 (48) 式中的 t_{e2} 值减小一些。

在 Suzuki 近似中， σ_1 和 σ_2 值的选择是个容易引起争论的问题。从 (45) 和 (47) 式可以看出， σ_1 、 σ_2 值的选择将直接影响到 t_{e1} 和 t_{e2} 的估计。我们选取 $\sigma_1^2 = 1/3$ 看起来偏

大了一点, 当 τ 接近 τ_1 时线性近似下的漂移速度 (20) 要比原来的 (18) 式大, 但是考虑到在第二时区中我们略去了扩散项, 使扩散速率比原来的小, 这两者相消的结果, 应该对近似程度有所改善. 如果把 σ_1 取为 $1/3$, 也只是使得 σ_2^2/σ_1^2 增加 3 倍, 比 $1/(1-x_c)$ 项的贡献还是小得多, 所以对估值 (48) 不会有太大的影响.

作为比较, 我们可以指出, Schmidt 与 Wolschin^[12] 对重离子反应 $^{238}\text{U} + ^{238}\text{U}$ 用 Suzuki 近似所作类似计算的结果, 在定性方面与我们的相似 (他们的推动势不含时间), 弛豫时间的数量级也是 10^{-21} 秒. Brosa^[13] 用数值方法重新求解了 Schmidt 与 Wolschin 的 Fokker-Planck 方程, 结果表明由单峰分布过渡到双峰分布的时间比 Suzuki 近似的结果长一些, 但是它在定性的图象上和数量级上是支持 Suzuki 近似的.

总起来说, 我们假设在裂变过程中核子的输运除推动势外与在重离子反应中核子的输运机制相同 (因为我们采用 Ayik 公式 (5) 和在重离子反应中定出的参数来算裂变过程的扩散系数和漂移速度), 从而得到了与重离子反应数量级相同的弛豫时间; 我们根据实验测得的质量分布判断在断裂时已经接近统计平衡状态, 从而断言断裂时间应大于这个弛豫时间. 反之, 如果用别的方法知道了准确的断裂时间 t , 确实大于 t_{c2} , 则我们的理论就表明: 重离子碰撞的实验结果可以用来支持冯氏关于裂变核在断点处于统计平衡状态的假设. 遗憾的是, 无论是根据冯氏^[5]对 t_s 的估计, 还是根据 Nix^[3] 对 t_s 的估计, 我们都还不能作出十分肯定的结论.

最后简短地讨论一下集体运动能量的耗散问题. 我们采用了冯氏的基本假设: 在从鞍点到断点的过程中位能的减少全部转变为内部激发能, 这也就是 (8) 式. 这相当于假设在集体运动与单核子运动之间有很强的耦合, 致使在这两种自由度之间能量交换很快, 因而每一瞬间都处在统计平衡的状态. 从 (9) 和 (11) 式可以看出, 假设 (8) 将通过漂移速度 v 和核温度 T 而影响弛豫时间和分布宽度 σ . 由 (37) 式算出

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \sqrt{D_0/2\tau} = 0.103,$$

是 $^{235}\text{U}(n, f)$ 的测量值 $\sigma_{\text{exp}} = 7/22 = 0.32$ 的 $r = 0.103/0.32 = 0.32$ 倍. 由于 $r \propto k$, 我们若把 (8) 式修改为

$$E^*(A_1) = r^2[\varepsilon^* - U_A(A_1) + U_0(A_1)], \quad 0 \leq r^2 \leq 1; \quad (50)$$

理论算出的 σ 就可与测量值 σ_{exp} 相符. 而 (50) 式相当于假设位能的减少只有一部分转化为内部激发能. 不过这样估计出来的 r^2 值太小了. 我们相信这是由于模型 (14) 式过于简化的原故, 对实验质量分布曲线的较好的拟合, 需要五个 Gauss 分布^[16], 而不是我们这里的两个. 不过我们还是可以认为, 作为本文的第四个结果, 算得的宽度小于实验值这一点使我们有理由对假设 (8) 的合理性提出疑问.

作者感谢与王竹溪教授、胡济民教授和方福康教授所作多次有益的讨论, 以及王竹溪教授、胡济民教授审阅本文初稿和提出许多宝贵意见. 美国 Emory 大学冯平观教授对本工作热情关切和鼓励, 作者谨此致以衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] M. Brack, J. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinsky and C. Y. Wong, *Rev. Mod. Phys.*, 44(1972), 320.

- [2] P. Fong, *Phys. Rev.*, **C13** (1976), 1259.
 [3] J. E. Nix, *Nucl. Phys.*, **A130** (1969), 241.
 [4] P. Fong, *Phys. Rev.*, **102** (1956), 434.
 [5] P. Fong, *Phys. Rev.*, **135** (1964), B1338; **C17** (1978), 1731.
 [6] S. Ayik, B. Schürmann and W. Nörenberg, *Z. Physik*, **A277** (1976), 299; **A279** (1976), 145.
 [7] 贺泽君, 李益林, 高能物理与核物理, **4**(1980), 640.
 [8] W. Pauli, Festschrift zum 60. Geburtstag A. Sommerfelds, Hirzel, Leipzig (1928), p. 30.
 [9] M. G. Mustafa, U. Mosel and H. W. Schmitt, *Phys. Rev.*, **C7** (1973), 1519.
 [10] R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, *J. Stat. Phys.*, **9** (1973), 51.
 [11] M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.*, **56** (1976), 77.
 [12] R. Schmidt and G. Wolschin, *Z. Physik* **A296** (1980), 215.
 [13] 王竹溪, 统计物理学导论, 人民教育出版社, 第二版, 北京, 1978年, 239页.
 [14] P. Fong, *Phys. Rev.*, **C10** (1974), 1122.
 [15] U. Brosa, *Z. Physik*, **A298** (1980), 77.
 [16] 王正行, 于相杰, 黄森, «轴铀中子裂变质量分布的一个经验公式», 北京大学内部报告, 1977.

NON-EQUILIBRIUM STATISTICAL THEORY OF NUCLEAR FISSION MASS DISTRIBUTION

WANG CHENG-SHING

(Department of Technical Physics, Peking University)

ABSTRACT

We consider the fission process from saddle point to scission point as a non-equilibrium transport process obeying the Master equation, which can be reduced into the form of Fokker-Planck equation approximately. Taking the mass asymmetry coordinate x as the macrovariable, the nuclear fission can be considered as a diffusion process in x space, the drift velocity $v(x,t)$, which is a non-linear function of x , is proportional to the gradient of the potential surface of fission nucleus in x space. The kinetics of nuclear deformation from saddle point to scission point is represented by the variation of $v(x,t)$ with time t phenomenologically. Assuming the mass distribution at saddle point is a symmetric one, and to solve the Fokker-Planck equation by means of Suzuki's scaling limit approximation method, we get a solution which becomes a double-Gaussian asymmetric distribution on the potential valley after a time interval long enough, the width of mass distribution is proportional to nuclear temperature and inversely proportional to relative depth of the potential valley. In the case of $^{235}\text{U}(n,f)$, the time interval evaluated from saddle point to scission point would be larger than 1.6×10^{-21} second, while it has arrived at the statistical equilibrium state. The Fong's statistical theory of nuclear fission is proved to be the case of stationary solution of the Fokker-Planck equation exactly.