May, 1982

高能极化粒子、反粒子总截面的对称性

(中国科学院高能物理研究所)

摘要

本文把关于非极化粒子、反粒子对固定靶散射的 И. Я. Померанчук 定理 推广到极化粒子、反粒子的情况,而得到在高能下一系列极化粒子、反粒子总截 面的对称关系.

前 言

早在 1958 年, И. Я. Померанчук[1] 证明了在高能下非极化粒子和反粒子对固定 靶 总截面趋于一致,即1+2和1+2'的总截面在高能下相等。 通常的证明是从研究过程 (i), (ii) 的散射振幅入手的.

$$\begin{array}{l}
(i) \ 1 + 2 \rightarrow 1' + 2' \quad s \stackrel{?}{\text{ii}} \\
(ii) \ 1 + 2 \rightarrow 1' + 2 \quad u \stackrel{?}{\text{ii}}
\end{array} \tag{1}$$

这里 1 和 1′是同一种粒子, 2 和 2′是另一种粒子, 2 表示 2 的反粒子, 60 年代初四月 有不少人在理论上论证过这个定理,理论预言和实验数据的比较[3,9],是符合的.

随着极化靶和极化束的建立,人们对极化物理的兴趣日益增长,因而在理论上对极化 粒子的行为作出预言,就更感必要,所以,我们把 И. Я. Померанчук 定理推广到极化粒 子的情形中去,

一、螺旋性振幅的交叉对称性

我们重新研究过程 I, II. 不过假定各粒子都有自旋: $1 \times 1'$ 自旋为 σ_1 , $2 \times 1'$ 自旋为 σ_{2} . 但螺旋性和参考系有关,于过程 I 中,在 σ_{2} 道粒子 σ_{3} 1、 2 质心系上计算, σ_{2} 1、 2 四 个粒子的螺旋件分别记为 $\lambda_1, \lambda_2', \lambda_3, \lambda_4'$ 如果在过程 II 中,则在 $1, \overline{2}'$ 质心系上计算,这 四个粒子螺旋性分别记为 μ_1 , μ_1' , μ_2 , μ_2' , 这四个粒子四维动量以 ρ_1 , ρ_1' , ρ_2 , ρ_2' 表之。反 粒子 $\bar{2}$ 、 $\bar{2}$ ' 四维动量各为 $-p_2$, $-p_2$. Mandelstam 变数 s, u, t 为:

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad u = -(p_1 - p_2)^2, t = -(p_1 - p_1)^2, \quad s + u + t = 2m_1^2 + 2m_2^2.$$
 (2)

三个 Mandelstam 变数中,只有两个是独立的,这里 m_1, m_2 分别为 1, 1' 和 2, 2' 粒子

静止质量, 假定它们都不为 0. 在过程 I 中的物理区是

$$s \geqslant \left(\sqrt{m_1^2 + \frac{|t|}{4}} + \sqrt{m_2^2 + \frac{|t|}{4}}\right)^2, \quad t_0 < t \leqslant 0$$
 (3)

 \sqrt{s} 为质心系总能量.

在过程 II 中的物理区是

$$u \geqslant \left(\sqrt{m_1^2 + \frac{|t|}{4}} + \sqrt{m_2^2 + \frac{|t|}{4}}\right)^2, \ t_0 < t \leqslant 0$$
 (4)

 \sqrt{u} 为质心系总能量.

若以5,1作独立变数,过程II中5变化范围是

$$-\infty < s < 2m_1^2 + 2m_2^2 - t - \left(\sqrt{m_1^2 + \frac{|t|}{4}} + \sqrt{m_2^2 + \frac{|t|}{4}}\right)^2. \tag{5}$$

当 t 固定,在 s 复平面上,过程 I、过程 II 的 物理区如图 1 所示。

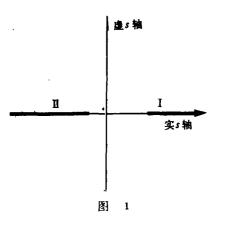
我们把过程 I 散射振幅记为

$$\langle \lambda'_1, \lambda'_2 | A^s(s, u, t) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle.$$
 (6)

把过程 II 散射振幅记为

$$\langle \mu_1', \ \mu_2' | A^u(s, u, t) | \mu_1, \ \mu_2 \rangle. \tag{7}$$

Trueman 和 Wiek^[4] 在 1964 年找到振幅(6) 和(7)的联系. 他们利用一定的复路径,从过程 I 物理区复数邻域一点(s+ie,u-ie)开始,把散射振幅解析延拓到过程 II 物理区 复数 邻域的一点(s-ie, u+ie)。 这样就得到两个振幅间关系



$$\langle \mu_1', \mu_2' | A^s(s, u, t) | \mu_1, \mu_2 \rangle = \langle \mu_1', \mu_2 | A^u(s, u, t) | \mu_1, \mu_2' \rangle$$
 (8)

这里 μ_i , μ_i' 是 1、 $\overline{2}'$ 粒子质心系上计算的螺旋性。 但振幅 (6) 始态 $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$,末态 $\langle \lambda_1', \lambda_2' |$ 是 1、2 粒子质心系上计算的螺旋性本征态。 可以通过旋转变换把这两组本征态 联系起来。据文献^[5] 我们得到

$$\langle \lambda'_{1}, \lambda'_{2} | A^{s}(s, u, t) | \lambda_{1}, \lambda_{2} \rangle$$

$$= \sum_{\mu_{i}, \mu'_{i}} d^{\sigma_{1}}_{\mu_{1}, \lambda_{1}} (X_{1}) d^{\sigma_{2}}_{\mu_{2}, \lambda_{2}} (X_{2}) d^{\sigma_{3}}_{\mu_{2}, \lambda'_{2}} (X'_{2})$$

$$\cdot d^{\sigma_{1}}_{\mu_{1}, \lambda'_{1}} (X'_{1}) \langle \mu'_{1}, \mu'_{2} | A^{s}(s, u, t) | \mu_{1} \mu_{2} \rangle$$

$$= \sum_{\mu_{i} \mu'_{i}} d^{\sigma_{1}}_{\mu_{1}, \lambda_{1}} (X_{1}) d^{\sigma_{2}}_{\mu_{2}, \lambda_{2}} (X_{2}) d^{\sigma_{3}}_{\mu_{2}, \lambda'_{2}} (X'_{2}) d^{\sigma_{1}}_{\mu_{1}, \lambda'_{1}} (X'_{1})$$

$$\cdot \langle \mu'_{1}, \mu_{2} | A^{u}(s, u, t) | \mu_{1}, \mu'_{2} \rangle$$
(9)

 $\chi_1, \chi_2, \chi_1', \chi_2'$ 分别为粒子 1, 2, 1', 2' (反粒子动量为负)在过程 I 质心系中运动方向与它在过程 II 质心系中运动方向之夹角. 转动函数定义为

$$d_{\lambda\mu}^{\sigma}(\theta) = \left\langle \sigma, \lambda \middle| \exp\left(i\frac{\theta}{\hbar} \cdot I_{y}\right) \middle| \sigma, \mu \right\rangle. \tag{10}$$

可参阅文献 [6]。

 $\chi_1, \chi_2, \chi_1', \chi_2'$ 可表示为

$$\cos \chi_{1} = \cos \chi'_{1} = \frac{-(s + m_{1}^{2} - m_{2}^{2})(u + m_{1}^{2} - m_{2}^{2})}{[\lambda(s, m_{1}, m_{2})\lambda(u, m_{1}, m_{2})]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \chi_{2} = \cos \chi'_{2} = \frac{(s + m_{2}^{2} - m_{1}^{2})(u + m_{2}^{2} - m_{1}^{2})}{[\lambda(s, m_{1}, m_{2})\lambda(u, m_{1}, m_{2})]^{\frac{1}{2}}}$$
(11)

其中 $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

注意到 s, u, t 三个变数中,只有两个是独立的,我们令 t = const, 取高能极限,即 $s \rightarrow \pm \infty$

$$\lim_{\substack{f \to \pm \infty \\ f \to \pm \infty}} \cos \chi_1 = \lim_{\substack{f \to \pm \infty \\ f \to \pm \infty}} \cos \chi_1' = 1$$

$$\lim_{\substack{f \to \pm \infty \\ f \to \pm \infty}} \cos \chi_2 = \lim_{\substack{f \to \pm \infty \\ f \to \pm \infty}} \cos \chi_2' = -1$$
(12)

所以

$$\lim_{t \to \pm \infty} \chi_1 = \lim_{t \to \pm \infty} \chi_1' = 0$$

$$\lim_{t \to \pm \infty} \chi_2 = \lim_{t \to \pm \infty} \chi_2' = \pi$$
(13)

在高能极限下,这些转动函数为

$$d_{\mu_{1},\lambda_{1}}^{\sigma_{1}}(X_{1}) = d_{\mu_{1},\lambda_{1}}^{\sigma_{1}}(0) = \delta_{\mu_{1},\lambda_{1}},$$

$$d_{\mu_{1},\lambda_{1}'}^{\sigma_{1}}(X'_{1}) = d_{\mu_{1},\lambda_{1}'}^{\sigma_{1}}(0) = \delta_{\mu_{1}',\lambda_{1}'},$$

$$d_{\mu_{2},\lambda_{2}}^{\sigma_{2}}(X_{2}) = d_{\mu_{1},\lambda_{2}}^{\sigma_{2}}(\pi) = (-1)^{\sigma_{2}+\mu_{2}}\delta_{\mu_{2},-\lambda_{2}},$$

$$d_{\mu_{2},\lambda_{2}'}^{\sigma_{2}}(X'_{2}) = d_{\mu_{1},\lambda_{2}'}^{\sigma_{2}}(\pi) = (-1)^{\sigma_{2}+\mu_{2}'}\delta_{\mu_{2},-\lambda_{2}'}$$

$$(14)$$

把(14)式代人(9)式之中,得到

$$\lim_{\substack{|s|\to\infty\\s=\text{const}}} \langle \lambda'_1, \ \lambda'_2 | A^s(s,u,t) | \lambda_1, \ \lambda_2 \rangle$$

$$= \lim_{\substack{|s|\to\infty\\s=\text{const}}} (-1)^{\frac{2\sigma_2-\lambda_2-\lambda'_2}{2}} \langle \lambda'_1, -\lambda_2 | A^u(s,u,t) | \lambda_1, -\lambda'_2 \rangle. \tag{15}$$

在 t = const 条件下,(15)的两边都唯一决定于 s (s 充分大). 由 (15)式可看到,在下述情况中,因子 $(-1)^{2\sigma_2-\lambda_2-\lambda_2'}=1$.

(i) 2, 2' 是玻色子
$$\lambda_2 + \lambda_2' = \pm 2n$$
, $n = 0, 1, \dots, \sigma_2$
(ii) 2, 2' 是费米子 $\lambda_2 + \lambda_2' = \pm (2n + 1)$, $n = 0, 1, \dots, \left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\right)$ (16)

属于这些情况的具体例子,我们后面还要讨论。由(15)可知,可以找到一个。的解析函数(1不变)把过程 I 及过程 II 振幅统一表示出来:

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_{\lambda'_{1}\lambda'_{2},\lambda_{1}\lambda_{2}}(s+i\epsilon, t) = \langle \lambda'_{1}, \lambda'_{2} | A^{s}(s, u, t) | \lambda_{1}, \lambda_{2} \rangle,$$

$$s > \left(\sqrt{m_{1}^{2} + \frac{|t|}{4}} + \sqrt{m_{2}^{2} + \frac{|t|}{4}}\right)^{2}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_{\lambda'_{1}\lambda'_{2},\lambda_{1}\lambda_{2}}(s-i\epsilon, t) = \langle \lambda'_{1}, -\lambda_{2} | A^{u}(s, u, t) | \lambda_{1}, -\lambda'_{2} \rangle,$$

$$s < 2m_{1}^{2} + 2m_{2}^{2} - t - \left(\sqrt{m_{1}^{2} + \frac{|t|}{4}} + \sqrt{m_{2}^{2} + \frac{|t|}{4}}\right)^{2}$$
(17)

上式就是在高能下极化粒子、反粒子散射振幅间的交叉对称关系。

二、高能下极化粒子反粒子总截面对称关系

根据 Schwarz 反射原则,散射振幅(作为 s 的函数)满足下列关系

$$F^*(s) = F(s^*) \tag{18}$$

根据这个性质,由极化情况下光学定理[10]我们得到

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{Im} F_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1 \lambda_2} (s + i\epsilon, 0) = \frac{g}{4\pi} \sigma_{\lambda_1, \lambda_2} (s),$$

$$s > (m_1 + m_2)^2$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{Im} F_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1 \lambda_2} (s - i\epsilon, 0) = -\frac{g}{4\pi} \bar{\sigma}_{\lambda_1, -\lambda_2} (|s|),$$

$$s < (m_1 - m_2)^2$$
(19)

g 为实验室系入射粒子动量。 $\sigma_{\lambda_1,\lambda_2}(s)$ 为过程 I 总截面、初态中粒子 1、2 螺旋性为 λ_1 , λ_2 。 末态包括 1 + 2 产生的一切反应道,已对动量求积分,自旋求和。 $\sigma_{\lambda_1,-\lambda_2}(|s|)$ 则是粒子 1 及反粒子 $\overline{2}'$ 产生的总截面,1, $\overline{2}'$ 螺旋性为 λ_1 , $-\lambda_2$.

参考 A. Martin^[7] 的方法,我们现在把 И. Я. Померанчук 定理推广到极化粒子、反粒子的情况。

假定: 当s为实数时, $F_{\lambda_1\lambda_2;\lambda_1\lambda_2}(s)$ 满足下列条件:

(i)
$$F_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1 \lambda_2}(s) < C \exp(|s|^{\beta}); \quad \beta < 1$$

(ii) $\lim_{s \to \pm \infty} \frac{|F_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1 \lambda_2}(s)|}{|s| \ln |s|} = 0;$
(iii) $\sigma_{\lambda_1 \lambda_2}(s) - \bar{\sigma}_{\lambda_1, -\lambda_2}(|s|), \quad \text{当} s \to \infty \text{ 时极限存在}$
(20)

证明:由(i)、(ii)应用 Phragmèn-Eindelöf 定理[8],可以证明在 s 上半复平面内,s 沿任意方向趋向 ∞ ,都有

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|F_{\lambda_1\lambda_2;\lambda_1\lambda_3}(s)|}{|s|\ln|s|} = 0. \tag{21}$$

我们作一变换: $z=s^2$, $F_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(s,0)=G_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(z)$ 故 $G_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(z)$ 除了在实轴上 $z>(m_1-m_2)^4$ 一割线外,在全平面上解析,它在割线上岸之值,即 $F_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(s)$ 在 $s>(m_1+m_2)^2$ 时之值,它在割线下岸之值,就是 $F_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(s)$ 在 $s<(m_1-m_2)^2$ 时之值.

我们还构造一个函数

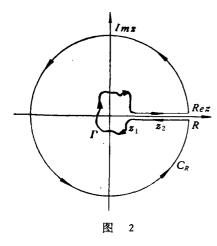
$$\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(z) = 8\pi m_1 \frac{\left[G_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(z) - G_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}^*(z^*)\right]}{\sqrt{z - 4m_1^2m_2^2}}.$$
 (22)

注意 $G_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(z)$ 和 $G^*_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2}(z^*)$ 并不相同,但可以证明

$$\varphi_{k,\lambda}^*(z) = \varphi_{k,\lambda}(z^*), \tag{23}$$

$$\lim_{z \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(z + i\epsilon) = \sigma_{\lambda_1, \lambda_2}(z) - \tilde{\sigma}_{\lambda_1, -\lambda_2}(z). \tag{24}$$

因为 $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{2m_1} \sqrt{z-4m_1^2m_2^2} = g$ 实验室系中人射粒子动量.



由(21)式可证

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|\varphi_{1,\lambda_2}(z)|}{\ln(z)} = 0. \tag{25}$$

这样运用句犀定理于下面迴路中得一次相减色散 关系

$$\varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z) - \varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z_{0})$$

$$= \frac{z - z_{0}}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz' \frac{\varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z')}{(z'-z)(z'-z_{0})}$$

$$+ \frac{z - z_{0}}{2\pi i} \int_{z_{1}}^{R} dz'$$

$$\cdot \frac{[\varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z'+i\varepsilon) - \varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z'-i\varepsilon)]}{(z'-z)(z'-z_{0})}$$

$$+\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_{c_R}dz'\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(z')}{(z'-z)(z'-z_0)}.$$
 (26)

利用条件(25)可证

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} dz' \frac{\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(z')}{(z' - z)(z' - z_0)} = 0$$
 (27)

由(23)式得

$$\frac{1}{2i} \left[\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(z'+i\epsilon) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(z'-i\epsilon) \right] = \operatorname{Im} \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(z'+i\epsilon)$$

这里 z' 是实数. 当 $R \rightarrow \infty$, (26) 式成为

$$\varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z) = \varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z_{0}) + \frac{z-z_{0}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz' \varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z)}{(z'-z)(z'-z_{0})} + \frac{z-z_{0}}{\pi} \int_{z_{1}}^{z_{2}} dz' \frac{\operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z'+i\epsilon)}{(z'-z)(z'-z_{0})} + \frac{z-z_{0}}{\pi} \int_{z_{2}}^{\infty} dz' \frac{\operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{1},\lambda_{2}}(z'+i\epsilon)}{(z'-z)(z'-z_{0})}$$

$$(28)$$

由假定 (20) (iii),知 $\operatorname{Im} \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(z)$ 极限存在,我们把它叫做 C,当 z_2 充分大时,可找到 $\mathfrak{g}(z_2)$,使

$$|\operatorname{Im}\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(z+i\epsilon)| < |C-\epsilon(z_2)|,$$
 (29)

这样,末一积分
$$\leq \frac{1}{\pi} |C - \epsilon(z_2)| \cdot \ln \left| \frac{z_2 - z}{z_2 - z_0} \right|$$
. (30)

若保持 z_2 , z_0 不变,令 $|z| \to \infty$,则在方程 (28) 中,除末项积分外,各项均有界,如果 $C \neq 0$,则末项积分发散,等式不成立,所以 C = 0,我们得到

$$\sigma_{\lambda_1,\lambda_2}(z) = \bar{\sigma}_{\lambda_1,-\lambda_2}(z). \tag{31}$$

三、讨论

1. 当人射粒子为矢量介子 $\rho^{\pm,0}$ 或赝矢介子时, λ_2 可以是 1、0、一1,靶核为质子(或别的粒子)。这三种螺旋态我们称为右旋的 (R),左旋的 (L) 以及纵向的 (0)。以 σ_R 表示人射为右旋粒子(或反粒子)的总截面。 σ_L 表示人射为左旋粒子(或反粒子)总截面。 σ_L 表示人射纵向极化粒子(或反粒子)总截面。由 (31) 得

$$\begin{aligned}
\sigma_R(\rho^+ p) &= \sigma_L(\rho^- p), & \sigma_R(\rho^- p) &= \sigma_L(\rho^+ p), \\
\sigma_0(\rho^+ p) &= \sigma_0(\rho^- p), & \sigma_R(\rho^0 p) &= \sigma_L(\rho^0 p).
\end{aligned} (32)$$

对于 A[‡], 也有类似关系. 简言之,对固定靶而言,右旋粒子总截面和左旋反粒子总截面在高能下相等,左旋粒子总截面和右旋反粒子的总截面在高能下也相等.

- 2. 当人射粒子为费米子时,例如 $\sigma_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \pm \frac{1}{2}$. 具体例子如下
- (i) 极化正、负电子和核子总截面

$$\sigma_L(e^+p) = \sigma_R(e^-p), \ \sigma_R(e^+p) = \sigma_L(e^-p);$$

(ii) 极化 μ[±] 介子和质子总截面

$$\sigma_L(\mu^+p) = \sigma_R(\mu^-p), \ \sigma_R(\mu^+p) = \sigma_L(\mu^-p);$$

(iii) 极化质子、反质子和中子总截面

$$\sigma_L(p, n) = \sigma_R(\bar{p}, n), \ \sigma_R(p, n) = \sigma_L(\bar{p}, n);$$

(iv) 极化质子、反质子和任何原子核 A(包括 P) 总截面

$$\sigma_{I}(p, A) = \sigma_{P}(\bar{p}, A), \ \sigma_{P}(p, A) = \sigma_{I}(\bar{p}, A);$$

(v) 极化 Λ , Λ 和任何原子核总截面

$$\sigma_L(\Lambda, \Lambda) = \sigma_R(\overline{\Lambda}, \Lambda), \ \sigma_R(\Lambda, \Lambda) = \sigma_L(\overline{\Lambda}, \Lambda).$$

这里最有希望做的是 p, \bar{p} 极化束及 e[±] 极化束的实验。 但目前尚未有这些方面的实验数据,随着 p, \bar{p} 及 e[±] 极化束的建立,本文的结论将受到实验的考验。对于光子,中微子等静止质量为 0 粒子,复 s 平面上两割线相连接,因此无法从上半平面解析延拓到下半平面,上述结论不成立。

后 记

在本文研究过程中,理论所何祚庥同志曾给予有益讨论,高能所张肇西同志曾提出宝贵意见,特此致谢.

参考文献

- [1] И, Я. Померанчук, Ж.Э.Т.Ф., 34(1958), 725.
- [2] D. Amati, M. Fierz and V. Glaser, Phys. Rev. Lett., 4(1960), 89; S. Weinberg, Phys. Rev., 124 (1961), 2049.
- [3] 章迺森,物理学报,20(1964),1244.
- [4] T. L. Trueman and G. C. Wick, Ann. Phys., 26(1964), 322.
- [5] P. D. B. Collins, An introduction to Regge Theory and high energy physics, p. 117.
- [6] A. R. Edmondo, Angular momentum in Quantum Mechanics.
- [7] A. Martin, Nuovo Cimento, 39(1965), 704.
- [8] R. P. Boas, Entire Function.
- [9] S. J. Lindenbaum, Phys. Rev. Lett., 7(1961), 352.
- [10] Yu. V. Novozhilov, Introduction to elementary particle theory, § 7. 3.

SYMMETRIES OF THE TOTAL CROSS SECTIONS OF HIGH ENERGY POLARIZED PARTICLES AND ANTI-PARTICLES

Song Yu

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

An extension of \mathcal{U} . A. Homepahuyk theorem for incident unpolarized particles and anti-particles at a fixed target to the case of polarized particles and anti-particles is discussed and a series of symmetry relations between the total cross sections of polarized particles and anti-particles are obtained.