第 6 卷 第 4 期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 4
1982 年 7 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1982

从 K_L^0 产生 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子

庆承瑞 何祚庥 张肇西
(中国科学院理论物理研究所) (中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文求解了自旋是 $0-\frac{1}{2}$ 的不等质量的库伦原子的 Bethe-Salpeter 方程. 应用所求得的近似的 B-S 波函数以及近年来发展的复合粒子量子场论微扰展开理论计算了由 K_L^0 产生 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子的几率.

一、引 言

近年来，对于双例外原子的研究引起了特殊的兴趣. 其中最受注意的是从 K_L^0 产生 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子的研究. 因为这一原子的寿命较长，并且比其它双例外原子有较大的相对产额，有可能形成束流，便于对这一原子作精细的研究. 从理论研究的角度来看，$(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子中两个粒子都是在 K_L^0 衰变中新产生的粒子，对于它们的研究必然涉及到复合粒子的产生、湮灭等程的复合粒子场论 [1]. 对于 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子的产额，理论上曾有过一些初步计算 [2, 3]. 但在这些计算中大多是利用直观的、非协变的办法. 由于这一过程在理论上比较重要并易于和实验比较，因而有必要重新加以计算，特别是它们的相对论修正. 为此，本文首先求解了自旋是 $0-\frac{1}{2}$ 的不等质量的库伦原子的 Bethe-Salpeter 方程的近似解. 利用所求出的波函数以及前几年发展的复合粒子量子场论微扰展开理论 [1] 较精确地计算了 K_L^0 衰变为 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 和中微子的衰变几率，给出了一些修正项，从而改进了前人的计算结果. 结果表明：$(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子的产额对 K_L^0 介子的两个形状因子的相对比值 $\xi=f_-(0)/f_+(0)$ 较为敏感. 由于目前实验上一直缺乏精确测量 ξ 值的可靠方法，可能测量 $(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子的相对产额是确定 ξ 值的有效途径. 此外，这里得到的不等质量的库仑原子的近似波函数可以用来计算其它不等质量库仑原子的反应过程.

本文第二节将首先给出 $0-\frac{1}{2}$ 自旋体系的不等质量库仑原子的近似波函数. 第三节给出 $K_L^0\to(\pi^{\pm}\mu^{\mp})+\begin{matrix}\bar{\nu}_\mu\\ \nu_\mu\end{matrix}$ 的衰变几率，并和前人的结果作了比较. 最后第四节对所得到的结果进行了讨论.

本文 1980 年 2 月 2 日收到.

二、$(\pi^{\pm}\mu^{\mp})$ 原子的 B-S 波函数

在梯形近似下，一个自旋为 0，质量为 m_1 及一个自旋为 $\frac{1}{2}$，质量为 m_2 的粒子组成的库仑原子满足下列 Bethe-Salpeter 方程：

$$[(\mu_a P+p)^2+m_1^2][i(\mu_b \hat{P}-\hat{p})+m_2]\chi_P(p)$$
$$=\frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int d^4p'\frac{(2\mu_a\hat{P}+\hat{p}+\hat{p}')}{(p-p')^2}\chi_P(p') \tag{1}$$

式中 $\mu_a=\frac{m_1}{m_1+m_2}$, $\mu_b=\frac{m_2}{m_1+m_2}$. P 是原子的四动量，p 是两粒子的相对动量 $p=\mu_b p_1-\mu_a p_2$. 从波函数的协变性质考虑，波函数 $\chi_P(p)$ 的普遍形式是：

$$\chi_P(p)=\left(F_1(p,P)+F_2(p,P)\frac{i\hat{p}}{\mu}\right)u(P) \tag{2}$$

式中 μ 代表复合粒子的折合质量，F_1 和 F_2 是两个四动量 P 和 p 的标量函数. $u(P)$ 是动量为 P，自旋是 $\frac{1}{2}$ 的旋量波函数，满足下列 Dirac 方程：

$$(i\hat{P}+M)u(P)=0. \tag{3}$$

其中 M 是原子的质量.

将方程(2)代入(1)，两边各从右方乘以 $\bar{u}(P)$，取迹；再在等式两边从左方乘 $\hat{p}$，再取迹，可以得到下列两个联立方程：

$$\frac{1}{2}F_1+\frac{P\cdot p}{2M\mu}F_2=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(\mu_a P+p)^2+m_1^2][(\mu_b P-p)^2+m_2^2]}$$
$$\cdot\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}\left\{\left[\mu_a\left(\mu_b+\frac{m_2}{M}\right)P^2+(\mu_b-\mu_a)(p\cdot P)\right.\right.$$
$$\left.+\mu_b(p'\cdot P)-\frac{p^2}{2}-\frac{p\cdot p'}{2}\right]F_1(p')$$
$$+\left[2\mu_a\mu_b P^2(p'\cdot P)+P^2(pp')\frac{3-\mu_a}{2}-\frac{1}{2}p^2(p'P)\right.$$
$$\left.\left.-2\mu_a(pP)(p'P)-\frac{1}{2}(pP)p'^2\right]\frac{F_2(p')}{M\mu}\right\} \tag{4}$$

$$-\frac{(pP)}{2M}F_1+\frac{p^2}{2\mu}F_2=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(\mu_a P+p)^2+m_1^2][(\mu_b P-p)^2+m_2^2]}$$
$$\cdot\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}\left\{\left[\mu_a\left(\mu_b+\frac{m_2}{M}\right)M(pP)+\frac{\mu_a P^2p^2}{M}+\frac{p^2}{2M}(pP)\right.\right.$$
$$\left.+\frac{p^2}{2M}(p'P)-\frac{\mu_b}{M}(pP)^2-\frac{\mu_b}{M}(pP)(p'P)\right]F_1(p')$$
$$+\left[2\mu_a\mu_b(pP)(p'P)+\mu_b(pP)(pp')+\mu_b(pP)p'^2\right.$$
$$\left.\left.-\mu_a(pP)p^2-\frac{1}{2}p^2(pp')-\frac{p^2p'^2}{2}\right]\frac{F_2(p')}{\mu}\right\} \tag{5}$$

注意到在库仑原子情况下，$\frac{p_0}{\mu}\cong\alpha^2$, $\frac{\mathbf{p}^2}{\mu^2}\cong\alpha^2$[10]，因而在精确度达 $0(\alpha)$ 的情况下，上述联立方程可简化为：

$$F_1=I\,\{u\mu_a\mu_b P^2 F_1\} \tag{6}$$

$$F_2=\frac{1}{2}\mu_a F_1 \tag{7}$$

其中 I 是积分算子：

$$I=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(\mu_a P+p)^2+m_1^2][(\mu_b P-p)^2+m_2^2]}\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}. \tag{8}$$

于是波函数(2)式就简化为：

$$\chi_P(p)=F_1\left(1+\frac{i\hat{p}}{2m_2}\right)u(P) \tag{9}$$

还可以求得在弱反演下的共轭波函数[4]：

$$\bar{\chi}_P(p)=-\chi_P^+(p)\gamma_4=-\bar{u}(P)\left(1+\frac{i\hat{p}}{2m_2}\right)F_1 \tag{10}$$

这样，问题就归结为求解 $F_1(p)$ 和相应的本征值，即方程(6)。不难看出，式(6)就是不等质量的 Wick-Cutkosky 方程. 这一方程曾经为 Wick-Cutkosky，Seto 等人所详细研究。Wick-Cutkosky 给出了求解此方程的一般方法[5]，但没有给出解的具体形式. Seto[6] 详细而清楚地介绍了用球面照射法求解不等质量方程的方法和波函数的归一条件，但也没有给出波函数的最终形式，特别是这里要用到的库仑原子波函数的具体形式. 因而我们在这里仍然简要地给出求解不等质量的 Wick-Cutkosky 方程的主要步骤，并给出相应解的具体形式.

将方程(6)写在质心系中，并作 Wick 转动. 同时，将方程无量纲化，即取 $m_1+m_2=2$，$m_1-m_2=2\Delta$，$\eta=\frac{E_0}{2}$，E_0 是质心系中原子的总能量. 这样，方程(6)就变为

$$\begin{aligned}\{[p+i(1+\Delta)\eta]^2+(1+\Delta)^2\}\{[p-i(1-\Delta)\eta]^2+(1-\Delta)^2\}F_1(p)\\=\frac{\lambda}{\pi^2}\int d^4p'\frac{F_1(p')}{(p-p')^2}\end{aligned} \tag{11}$$

而

$$\lambda=-\frac{\mu_a\mu_b P^2}{4\pi^2}e^2=-\frac{\mu_a\mu_b P^2\alpha}{\pi} \tag{12}$$

将这一方程的坐标 p 投影到五维球上，令五维球的半径

$$|\xi|=(1-\Delta^2)^{\frac{1}{2}}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

而 $|\xi|$ 和 $|p|$ 满足下列关系：

$$\tan\frac{\zeta}{2}=\frac{|\xi|}{|p|}. \tag{14}$$

那末对应于四维欧氏空间的每一个矢量 p，在五维球上就有一个径矢量 ξ，ζ 就是 ξ_5 与 ξ 的夹角，即 $\xi_5=|\xi|\cos\zeta$. 这样，和方程(11)左方相对应的算式将是 ξ^2，ξ_4 和 ξ_5 的有关函数. 算式的右方是球对称的. 但如果在 (ξ_4,ξ_5) 的平面上作转动，使转动角 θ 为

$$\delta = \tan^{-1}\frac{i|\xi|\eta}{\Delta(1-\eta^2)}, \tag{15}$$

而球的半径仍保持不变．这样在新的坐标系 ξ 中方程将只依赖 ξ^2 和 ξ_5，即方程对围绕 ξ_5 轴的转动是不变的，即有一四维的转动不变性．这时，如果再回到四维空间，就得到如下的方程式：

$$[\tilde{p}^2 + (1 + i\tilde{\Delta})^2][\tilde{p} + (1 - i\tilde{\Delta})^2]F(\tilde{p}) = \frac{\lambda}{\pi^2(1-\eta^2)}\int d^4\tilde{p}'\frac{F(\tilde{p}')}{(\tilde{p}-\tilde{p}')^2} \tag{16}$$

其中

$$\tilde{\Delta} = \sqrt{\frac{\eta^2 - \Delta^2}{1-\eta^2}} \tag{17}$$

因此，和等质量时的情况一样，方程（16）的解 $F(\tilde{p})$ 总可以写成为某一 $\tilde{p}^2$ 的函数和四维球谐函数的乘积．应用 [5] 中的标准方法，可得到式（16）的解为：

$$F_{knlm}(\tilde{p}) \sim \int_{-1}^{1} dz \frac{g_n(z, \tilde{\Delta})\mathscr{H}_{n-1,l,m}(\tilde{p})}{\left[\frac{1+z}{2}(1-i\tilde{\Delta})\{(1+i\tilde{\Delta})^2+\tilde{p}^2\} + \frac{1-z}{2}(1+i\tilde{\Delta})\{(1-i\tilde{\Delta})^2+\tilde{p}^2\}\right]^{n+2}} \tag{18}$$

其中函数 $g_n(z, \Delta)$ 满足以下方程：

$$g_n(z, \tilde{\Delta}) = \frac{\lambda}{2n(1-\Delta^2)}\int_{-1}^{1} dz \frac{[R(z, z')]^n g_n(z'\tilde{\Delta})}{[1 - \tilde{\Delta}^2(1-z'^2)]} \tag{19}$$

其中

$$R(z, z') = \frac{1 \mp z}{1 \mp z'} \qquad 当\ z \gtrless z'\ 时 \tag{20}$$

而 $\mathscr{H}_{n-1,l,m}(\tilde{p})$ 是四维立体球谐函数．

为求得本征值，只须利用方程（19）．注意在 $\eta^2 \to 1$ 的情况下，同样有 $\tilde{\Delta}^2 \to 1$．因而和 [5] 中等质量波函数的近似一样，方程（19）的右方分母可近似表达为

$$[1 - \tilde{\Delta}^2(1 - z'^2)]^{-1} \simeq \pi(1-\tilde{\Delta}^2)^{-\frac{1}{2}}\delta(z') \tag{21}$$

由此得到不等质量方程的本征值应满足：

$$1 - \eta^2 = \frac{\lambda^2\pi^2}{4n^2(1-\Delta^2)} \tag{22}$$

相应库仑原子的结合能应为：

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mu_a\mu_b\frac{M\alpha^2}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{\mu\alpha^2}{n^2} \tag{23}$$

此外还有 $g_n(z, \tilde{\Delta})$ 的近似表达式：

$$g_n(z, \tilde{\Delta}) \cong (1 - |z|)^n \tag{24}$$

如果再从 $\tilde{p}$ 空间回到原来的空间 p，那末方程式（18）就变为：

$$F_{knlm}(p) \cong \int_{-1}^{1} dz \frac{g_n(z, \tilde{\Delta})\mathscr{H}_{n-1,l,m}(p, x)}{\{(1-\Delta z)p^2 + 2i(1-\Delta^2)zp\eta + (1-\eta^2)(1+\Delta^2)(1+\Delta z)\}^{n+2}}, \tag{25}$$

其中

$$x=\frac{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\Delta^2-\eta^2)^{1/2}}\left[\Delta p_4-\frac{i}{2}\frac{(\xi^2-p^2)}{(1-\eta^2)}\eta\right]. \tag{26}$$

我们注意到(25)式和(26)式形式上和 Seto[6] 的结果不尽相同。这是因为这里的推导完全按照 Cutkosky[5] 的方法。这两者的差别仅在于相对动量的定义的不同。对 Seto 得到的解作 $p\to p-i\eta\Delta$ 的变换，就得到(25)式和(26)式。此外，在(25)中

$$\mathscr{H}_{n-1,l,m}(\boldsymbol{p},x)=R^{n-1}H_{n-1,l,m}(\alpha,\theta,\varphi) \tag{27}$$

而

$$R^2=\boldsymbol{p}^2+x^2,\quad \cos\alpha=\frac{x}{|R|} \tag{28}$$

θ 和 φ 是 $\boldsymbol{p}$ 的方位角.

$$H_{n-1,l,m}=A_{n-1,l}\cdot(\sin\alpha)^l C_{n-l-1}^{l+1}(\cos\alpha)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{29}$$

其中

$$|A_{n-1,l}|^2=2^{2l+1}n(n-l-1)!(l!)^2/\pi(n+l)! \tag{30}$$

C_{n-l-1}^{l+1} 是 Gegenbaner 多项式，$Y_{l,m}$ 是五维球谐函数。利用 $g_n(x,\tilde{\Delta})$ 的近似表达式(24)，代入(25)，对 x 积分后，可得

$$F_{knlm}(p)=[p^2+\mu_a\mu_bP^2+m_1m_2]^{-n}[(\mu_aP+p)^2+m_1^2]^{-1}$$
$$\cdot[(\mu_bP-p)^2+m_2^2]^{-1}R^{n-l-1}A_{n-1,l}C_{n-l-1}^{l+1}\left(\frac{x}{|R|}\right)\mathscr{Y}_{lm}(\theta,\varphi). \tag{31}$$

这里 $\mathscr{Y}_{l,m}$ 是三维立体球谐函数。

最后，在略去 α^2 以上的高次项后，不等质量 $0-\frac{1}{2}$ 复合粒子波函数应满足的归一化条件是：

$$\frac{-2i}{(2\pi)^4}N_{nlm}^2\int d^4pF_{knlm}^2\left[4\mu_a^2\mu_bM\varepsilon+\frac{\mu_a^2+\mu_b^2}{\mu_b}p^2\right.$$
$$\left.-2\mu_a(\mu_a-\mu_b)(pP)-\frac{\mu_a^2\mu_b(pP)^2}{m_2^2}-4\mu_a\frac{(pP)^2}{P^2}\right]=1. \tag{32}$$

当 $n=1,\ l=m=0$ 时，由(32)可定出归一化常数

$$N_{100}=\frac{4\sqrt{2}\,\pi M^{\frac{1}{2}}(\alpha\mu)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\mu_a}} \tag{33}$$

相应的波函数

$$\chi_{100}(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4\sqrt{2}\,\pi M^{\frac{1}{2}}(\alpha\mu)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\mu_a}}f(p)\left(1+\frac{i\hat{p}}{2m_2}\right)u(P) \tag{34}$$

而

$$f(p)=[p^2+\mu_a\mu_bP^2-m_1m_2]^{-3}[(\mu_aP+p)^2+m_1^2]^{-1}[(\mu_bP-p)^2+m_2^2]^{-1}. \tag{35}$$

三、关于 $K_L^0\to(\pi^\pm\mu^\mp)+\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$ 的几率

由复合粒子场论的微扰展开理论可知 $K_L^0\to(\pi^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu$ 过程的跃迁矩阵元是

$$\langle \tilde{v}_\mu(\pi^+\mu^-)|S|K_L^0\rangle = g_W^2\delta^4(P_k - P_f - p_\nu) \cdot \int d^4p \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \bar{\chi}_{P_f}(p)\Gamma_\mu^{(1)}\Delta_{\mu\nu}\Gamma_\nu^{(2)}v(-p_\nu) \tag{36}$$

这里 P_k 和 P_f 分别是 K_L^0 和 $(\pi^+\mu^-)$ 原子的四动量，p_ν 是中微子的四动量，$\bar{\chi}_{P_f}(p)$ 是终态 $(\pi^+\mu^-)$ 原子的波函数，$v(-p_\nu)$ 是中微子的旋量，$\Delta_{\mu\nu}$ 是中间玻色子的传播子．当中间玻色子质量很大时，(36) 就变为：

$$-i\frac{G_F\sin\theta_c}{\sqrt{2}}\delta^4(P_k - P_f - p_\nu)\frac{1}{\sqrt{2E_k}}\int d^4p\bar{\chi}_{P_f}(p)\Gamma_\mu^{(1)}\Gamma_\mu^{(2)}v(-p_\nu) \tag{37}$$

其中 G_F 是费米耦合常数，$\sin\theta_c$ 是 Cabibbo 角，

$$\Gamma_\mu^{(1)} = P_\mu f_+(q^2) + q_\mu f_-(q^2) \tag{38}$$

$$\Gamma_\mu^{(2)} = i\gamma_\mu(1 + \gamma_5) \tag{39}$$

式中

$$P_\mu = P_{k\mu} + \mu_a P_{f\mu} + p_\mu, \tag{40}$$

$$q = P_k - \mu_a P_f - p \tag{41}$$

$f_+(q^2)$ 和 $f_-(q^2)$ 是 K_L^0 介子的两个无量纲的形状因子．当动量传递 q^2 不很大，而且 p 仅在很小时有贡献，这时 $q^2 \approx (P_k - \mu_a P_f)^2$．于是 $f_+(q^2)$ 及 $f_-(q^2)$ 可作为常数提到积分号外．就得到

$$\begin{aligned}\langle \tilde{v}(\pi^+\mu^-)|S|K_L^0\rangle &= (2\pi)^4\delta^4(P_k - P_f - p_\nu)\frac{G_f\sin\theta_c}{2\sqrt{E_k}} \\ &\times\Big\{[(f_+ + f_-)P_{k\mu} + \mu_a(f_+ - f_-)P_{f\mu}]\bar{\chi}_{P_f}(0)\gamma_\mu(1 + \gamma_5)V(-p_\nu) \\ &+ (f_+ - f_-)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\bar{\chi}_{P_f}(p)\hat{p}(1 + \gamma_5)V(-p_\nu)\Big\}\end{aligned} \tag{42}$$

式 (42) 中的第一项就是通常计算中所用的矩阵元 [2, 3]，所不同的是这里应取 $\bar{\chi}_{P_f}(0)$，即 B–S 波函数的零点值，而不是通常薛定谔波函数的零点值．第二项却是这里用协变方法所特有的相对论修正．由式 (34) 易给出式 (42) 中波函数的零点值是：

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{P_f}(0) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4\sqrt{2}\pi M^{\frac{1}{2}}(\alpha\mu)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\mu_a}}f(p)u(P) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{\pi}}\frac{(\alpha\mu)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M\mu_a}}\Big[1 - \frac{\alpha}{\pi}\Big(1 - \ln\alpha - \ln\mu_a - \mu_b\ln\frac{m_1}{m_2}\Big) \\ &\quad - \frac{i\mu_a\alpha}{2\pi M}\ln\frac{m_1}{m_2}\cdot\hat{P}\Big]u(P)\end{aligned} \tag{43}$$

其中第一项即是通常非相对论波函数的零点值，第二项 $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$ 项是 B–S 波函数波函数特有的修正．注意当 $\mu_a = \mu_b = \frac{1}{2}$ 时，这里的零点值和 (e^+e^-)、$(\mu^+\mu^-)$ 原子的波函数零点值的修正相同．

由 (42) 式可以算出第一项所贡献的跃迁几率是：

$$W = \frac{(G_F\sin\theta_c)^2}{2}\frac{(\alpha\mu)^3}{16\pi^2}\frac{M_f(M_k^2 - M_f^2)^2}{M_k^3\mu_a}A^2|f_+|^2(\mu_b\xi + 1 + \mu_a)^2 \tag{44}$$

其中 $\xi = f_-(0)/f_+(0)$,

$$A^2 = \left[1 - \frac{\alpha}{\pi}\left(1 - \ln\alpha - \ln\mu_a - \left(\mu_b + \frac{\mu_a}{2}\right)\ln\frac{m_1}{m_2}\right)\right]^{-2} \tag{45}$$

将式(44)和通常非相对论的计算结果相比较[2, 3]，其差别在于式(45)中 A 多了一正比 $\frac{\alpha}{\pi}$ 的项，因而使 W 减小约 3%. 此外，式(44)仅是跃迁到 $n=1$ 态上的跃迁几率. 如果要估计跃迁到所有其他 s-态的几率，就要计算出所有 $n=2, 3\cdots$ 等态波函数的零点值. 注意零点波函数中有一正比于 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ 的因子，而 $\varepsilon \sim \frac{1}{n^2}$，因而可近似地认为 $W \sim \frac{1}{n^3}$. 对所有不同 n 态的几率就和，因有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.20,$$

这样跃迁到所有 n 态的几率就将在式(44)上乘上因子 1.20.

由(42)还可以看出跃迁几率还将由其中第二项来贡献. 不难看出，这一项是对数发散的. 所以精确计算第二项时就必须考虑 $f_+(q^2)$ 和 $f_-(q^2)$ 随动量传递 q^2 的增加而衰减的行为. 通常，极点近似的理论[7]给出：

$$f_+(q^2) = f_+(0)\frac{m_{K^*}^2}{q^2 + m_{K^*}^2} \tag{46}$$

$$f_-(q^2) = (m_K^2 - m_\pi^2)f_+(0)\left[\frac{1}{q^2 + m_K^2} - \frac{1}{q^2 + m_{K^*}^2}\right] \tag{47}$$

其中 $m_{K^*} \approx 893\text{MeV}$, $m_K \approx 725\text{MeV}$. 将(46)和(47)代入(42)这一积分将是有限的. 考虑到这一项贡献较小，约 1%，因此精确的计算并无必要，因而这里仍将 f_+ 和 f_- 取作常数，而形状因子的贡献近似归结为对数型的截止动量 $K \approx m_{K^*}$. 这时，$K_L^0 \to (\pi^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 的跃迁几率将是

$$W = \left(\frac{G_F \sin\theta_c}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{(\alpha\mu)^3 \cdot 1.20}{16\pi^2 M_K^3} \frac{M_f(M_K^2 - M_f^2)^2}{\mu_a} A^2|f_+|^2$$
$$\cdot \left[\mu_b\xi\left(1 + \frac{\alpha\mu_a h}{\pi\mu_b^2}\right) + (1 + \mu_a)\left(1 - \frac{\alpha\mu_a h}{\pi\mu_b(1 + \mu_a)}\right)\right]^2 \tag{48}$$

其中

$$h = 1 + \mu_a \ln\frac{K}{m_1} + \mu_b \ln\frac{K}{m_2} - \mu_b \ln\frac{m_1}{m_2} \tag{49}$$

如果取 $K = m_{K^*}$，可得 $\frac{2\alpha\mu_a h}{\pi\mu_b(1 + \mu_a)} = 0.011$ 这将使跃迁几率进一步改小 1%.

上面的计算仅是对 $K_L^0 \to (\pi^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 的跃迁. 如果再加上 $K_L^0 \to (\pi^-\mu^+) + \nu_\mu$ 的跃迁几率，则上述几率 W 还要再乘以因子 2.

四、结果与讨论

根据前节计算结果，并将形状因子的明显形式代入后，$K_L^0 \to (\pi\mu) + \nu$ 的衰变几率可表示为：

$$W_{K_L^0\to(\mu\pi)+\nu}=\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\sin\theta_c\right)^2 m_K^5 f_+^2(0)5.04\cdot10^{-12}$$
$$\cdot(1-4.72\lambda_+)^2\{1.55+0.440\xi(0)[1-(\lambda_--\lambda_+)4.72]\}^2.$$

式中 $\xi(0)$ 代表传递动量为零时 ξ 之值，λ_+ 与 λ_- 皆为通常所用 K 介子的形状因子．一般实验的结果指明 $\lambda_-\approx0$．因此在以下我们将略去与 λ_- 有关的项．再利用已知的 $K_L^0\to\pi+\mu+\nu$ 的衰变几率理论值 [2]，可得到 K_L^0 衰变的分支比 R 是：

$$\left.\begin{aligned}R&=\frac{W(K_L^0\to(\pi\mu)+\nu)}{W(K_L^0\to\pi+\mu+\nu)}\\&=\frac{5.99\cdot10^{-8}(1-4.72\lambda_+)^2\{1.55+0.440\xi(0)(1+4.72\lambda_+)\}^2}{0.558Y}\\Y&=0.645+0.124\xi(0)+0.0193\xi^2(0)\\&\quad+3.55\lambda_++5.93\lambda_+^2+0.44\xi(0)\lambda_+\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

分支比 R 的特点是对 ξ 值较为灵敏，而目前实验上一直缺乏灵敏的测定 ξ 值的方法．如果认为现在测定的 λ_+ 是可信的，则由 R 的大小可以定出 $\xi(0)$ 来．例如，取实验测定的 $\lambda_+\approx0.34$，则当 $\xi(0)=-1$ 时，

$$R\cong3.1\cdot10^{-7}\tag{50.a}$$

当 $\xi(0)=0$ 时，

$$R\cong4.5\cdot10^{-7}.\tag{50.b}$$

从最近的初步实验结果看1)，似乎有利于 $\xi(0)=0$ 即有利于矢量流守恒的结论2)．

将本文的数值结果和前人的非相对论的计算结果相比较，分支比 R 值有所减小．在看来是和实验符合较好的区域，即 $\xi(0)\approx0$ 的区域，这里计算的 R 值将比非相对论的结果小约 4～5%．这是因为 B-S 波函数零点值的平方将比薛定格波函数的小约 3%，而 (42) 式第二项的出现又使 (50) 式分子中或 (52) 式中平方号下的常数项减少约 1%，第二项的系数增加 ～1%．计算中我们还略去了 p-波的贡献．这是因为由 p 波贡献的几率和 s 波相比为 $O(\alpha^2)$．

由于这里得到的计算结果是由较严密并且是系统的理论方法所给出，因而在一定程度上将有助于澄清计算方法上的不确定性．此外，这里所求得的 0-$\frac{1}{2}$ 库仑原子 B-S 波函数将有助于计算其它涉及不等质量的库仑原子的其他产生或跃迁过程．

---

1) 本文作者之一何祚庥最近访问美国费米实验室和芝加哥大学物理系，承告知 Sehwartz M. 教授所领导的研究组研究了 $(\pi\mu)$ 原子，记录到约 300 个事例，并测得分枝比 R 为 $(5.0\pm1.5)\cdot10^{-7}$．因其中的系统误差未作校正，这一结果是初步的，尚未正式发表，如对实验的系统误差作校正后，有可能将实验误差减小到 5%．作者们感谢 Sehwartz 教授所领导的实验组告知这一初步结果．

2) 由于现有的实验所确定的形状因子都不精确，并为了和非相对论的结果作比较，我们曾利用 $K_L^0\to\pi+\mu+\nu$ 的衰变几率的实验值

$$W_{K_L^0\to\pi+\mu+\nu}=5.21\cdot10^6\sec^{-1}$$

代入 R 中，对 R 作粗略估计，即取 $\lambda_-\approx0$，$\lambda_+\approx0$，$f_+(0)=\frac{1.04}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta_c=0.209$．由此得到[9]

$$R=0.729\cdot10^{-7}(0.440\xi+1.55)^2.$$

当然这样的估计误差是较大的．

参 考 文 献

[1] 何祚庥、张肇西、黄涛，物理学报，25(1976)，215.
[2] Неменов, Л. Л., Ядерн. физ., [illegible]
[3] Prasad M. K. Prepriut, (1977).
[4] 北京基本粒子理论组，北大学报，12(1966)，113.
[5] Cutkosky R. E., Phys. Rev., 96(1954), 1135; Wick G. C., *Phys. Rev.*, 96(1954), 1124.
[6] Seto K., *Prog. Theor. Phys.*, 39(1968), 453.
[7] R. E. Marshak et al., Theory of Weak Interactions in Particle Physics, Wiley-Interscience.
[8] N. Barash-Shmidt, et al., *Phys. Lett.*, 75B(1078), N1.
[9] 庆承瑞、何祚庥、何矩、张肇西 1980 年广州粒子物理理论会会议录。
[10] 北京大学理论物理研究室基本粒子理论组，北京大学学报，12(1966)，213.

ON THE CREATION OF $(\pi^\pm\,\mu^\mp)$ ATOM IN K_L^0-DECAY

CHING CHENG-RUI　HO TSO-HSIU

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

CHANG CHAO-HSI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

We solve, in this paper, the Bethe-Salpeter equation with spin (0-½) and unequal mass for Coulombic atom. The approximate solution thus obtained as well as the perturbation expansion of composite particle field theory[1] are then applied for calculating the probability of production of $(\pi^\pm\,\mu^\mp)$ atom in K_L^0-decay. The comparison with a preliminary experimental result is also presented.