

谐振腔链的振荡模式和场的分布

陈 森 玉

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文从场的对称特性来解析整腔结束的单周期和双周期谐振腔链的振荡模式,并给出它们的场分布,作为对用等效电路理论研究谐振腔链的振荡模式和场分布的另一校核方法.其中整腔结束的单周期谐振腔链的振荡模式、色散关系以及它们的场分布,经高能所600兆赫模型腔链实验证明结论正确.

G. A. Loew 和 R. B. Neal^[1] 在论述驻波加速器结构的振荡模式和色散关系时,引用了 D. E. Nagle^[2] 采用等效电路理论研究所的结论.

对于半腔结束的单周期谐振腔链,其色散曲线为:

$$\omega_q^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + k \cos \frac{\pi q}{N}} \quad (1)$$

q 为模式数, $q = 0, 1, 2, \dots, N$

N 为总腔数

k 为耦合系数

知共能激发 $(N + 1)$ 个振荡模式(包括 $0, \pi$ 模式),相邻模式间隔为 $\frac{\pi}{N}$.

对于整腔结束的单周期谐振腔链,其色散曲线为:

$$\omega_q^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + k \cos \frac{\pi q}{N + 1}} \quad (2)$$

$$q = 1, 2, 3, \dots, N$$

知共能激发 N 个振荡模式,不能激发 0 和 π 模式,相邻模式间隔为 $\frac{\pi}{N + 1}$. 只有当

$N =$ 奇数时才能激发 $\frac{\pi}{2}$ 模式,且 m 为偶数腔内场等于零.

质子直线加速器恰好为整腔结束的类型(准)周期结构,高能所的质子直线加速器600兆赫模型腔链($N = 8$)实验证明,整腔结束的单周期谐振腔链可激发 0 模式,但不存在 π

模式,而且 $\frac{\pi}{2}$ 模式 F_m 为偶数腔内场不等于零. 与(2)式给出的结论不符.

由 Floquet 原理和 Helmholtz 方程得知,在终端短路(金属短路板位于结构的对称面上,并忽略损耗)的谐振腔链中,不管是整腔结束的或是半腔结束的,存在四种解^[3](波):

$$\begin{aligned}
 E^+(Z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{j(\omega t - \beta_n Z)} = |E^+(Z)| e^{-j\psi(Z)} \\
 E^+(-Z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{j(\omega t + \beta_n Z)} = |E^+(-Z)| e^{j\psi(Z)} \\
 E^-(Z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_{-n} e^{j(\omega t + \beta_n Z)} = |E^-(Z)| e^{j\psi(Z)} \\
 [E^+(Z)]^* &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^* e^{-j(\omega t - \beta_n Z)} = |[E^+(Z)]^*| e^{j\psi(Z)} \\
 \beta_n &= \beta_0 + \frac{2\pi n}{L}, \quad n = -\infty \rightarrow \infty
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

$\theta = \beta_0 L = \psi(L) - \psi(0)$ 为结构的周期相移
 $|E(Z)|$ 为轴向电场 $E(Z)$ 之模,其为周期函数,周期为 L .
 $\psi(Z)$ 为轴向电场 $E(Z)$ 之相位.

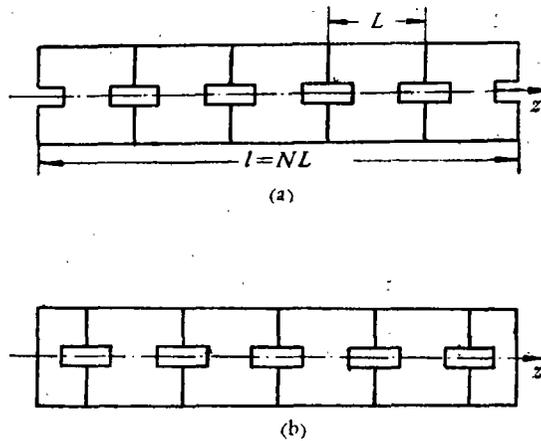


图 1 (a) 整腔结束的谐振腔链示意图
 (b) 半腔结束的谐振腔链示意图

因 Helmholtz 方程和边界的解仅有两组是线性无关解,所以 $E^+(-Z)$, $E^-(Z)$, $[E^+(Z)]^*$ 之间仅相差一个常数,为线性相关.

$$\begin{aligned}
 \therefore E^+(-Z) &= A[E^+(Z)]^* \\
 E^-(Z) &= B[E^+(Z)]^*
 \end{aligned}$$

设 $Z = 0$ 为对称面,且忽略损耗不计,所以有:

$$\begin{aligned}
 E^+(0) &= [E^+(0)]^* & Z = 0 \text{ 为对称面} \\
 E^-(0) &= E^+(0) & \text{全反射}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad A &= \frac{E^+(-Z)}{[E^+(Z)]^*} = \frac{E^+(0)}{[E^+(0)]^*} = e^{-2j\psi(0)} = 1, \\ B &= \frac{E^-(Z)}{[E^+(Z)]^*} = \frac{E^-(0)}{[E^+(0)]^*} = \frac{E^+(0)}{[E^+(0)]^*} = e^{-2j\psi(0)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{令:} \quad \psi(0) = 0$$

谐振腔链(不管是整腔或半腔结束)产生驻波的条件为:

$$\begin{aligned} \therefore Z = 0, \quad E^+(0) &= E^-(0) \\ Z = NL \quad E^+(NL) &= E^-(NL) \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad e^{-jN\theta} = e^{jN\theta}, \quad \text{或} \quad \theta = \beta_0 L = \frac{\pi}{N} q. \quad (4)$$

$$\text{其中} \quad q = 0, 1, 2, \dots, N.$$

不管是整腔或半腔结束的腔链,其可能激发的相邻模式间隔均为 $\frac{\pi}{N}$, 只有 N 为偶数时才能激发 $\frac{\pi}{2}$ 模式.

谐振腔链激发的驻波解为 $E^+(Z)$ 和 $E^-(Z)$, $E^+(-Z)$, $[E^+(Z)]^*$ 之间的任一个组合,则

$$\begin{aligned} E_{s.w}(Z) &= E^+(Z) + [E^+(Z)]^* \\ &= \sum a_n e^{j(\omega t - \beta_n Z)} + \sum a_n^* e^{j(\omega t + \beta_n Z)} \stackrel{(a_n = a_n^*)}{=} 2 e^{j\omega t} \sum a_n \cos \beta_n Z \end{aligned} \quad (5)$$

引进新的坐标 ξ , 其为腔 (cell) 内任意点相对于 cell 中心面的位置,因而在单周期谐振腔链内,

对于整腔结束情形 A 有:

$$\begin{aligned} \xi &= z - \frac{L}{2}, \quad 0 \leq z \leq L, \quad -\frac{L}{2} \leq \xi \leq \frac{L}{2} \\ \varphi(\xi) &= \psi\left(\xi + \frac{L}{2}\right) - \psi\left(\frac{L}{2}\right) = \psi(z) - \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于半腔结束情形 B 有:

$$\begin{aligned} \xi &= z, \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad -\frac{L}{2} \leq \xi \leq \frac{L}{2} \\ \varphi(\xi) &= \psi(\xi) - \psi(0) = \psi(z). \end{aligned} \quad (7)$$

则单周期谐振腔链中第 m 个腔内任意点坐标为:

$$\begin{aligned} \text{A.} \quad Z &= \left(m - \frac{1}{2}\right)L + \xi \\ \varphi(Z) &= \left(m - \frac{1}{2}\right)\theta + \varphi(\xi). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{B.} \quad Z &= mL + \xi \\ \varphi(Z) &= m\theta + \varphi(\xi). \\ m &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

上式中:

$$-\frac{L}{2} \leq \xi \leq \frac{L}{2},$$

$$-\frac{\theta}{2} \leq \varphi(\xi) \leq \frac{\theta}{2}$$

所以第 m 个腔内任意点之驻波场为:

A.
$$E_{s.w}(Z) = 2e^{j\omega t} \sum a_n \cos \beta_n \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) L + \xi \right]$$

$$= e^{-j(m-\frac{1}{2})\theta} \cdot E(\xi) + e^{j(m-\frac{1}{2})\theta} [E(\xi)]^* \quad (10)$$

B.
$$E_{s.w}(Z) = 2e^{j\omega t} \sum a_n \cos \beta_n [mL + \xi]$$

$$= e^{-jm\theta} E(\xi) + e^{jm\theta} [E(\xi)]^* \quad (11)$$

$E(\xi)$ 为单个谐振腔内之场分布 (见图 2), 而二维谐振腔内 TM_{0n} 型波的场分布可由数值计算方法^[4]给出, $E(\xi) = |E(\xi)| e^{j\varphi(\xi)}$.

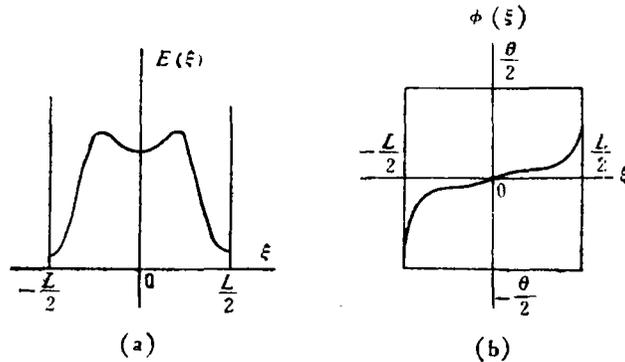


图 2 单个谐振腔内(a)场分布(b)相移

由(10)、(11) 可以分别得到整腔和半腔结束之单周期谐振腔链中任意处之驻波场分布,为讨论方便起见取基波 $n = 0$, 即有:

A.
$$E(Z) = 2e^{j\omega t} a_0 \cos \beta_0 \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) L + \xi \right]$$

$$= e^{-j(m-\frac{1}{2})\theta} E(\xi) + e^{j(m-\frac{1}{2})\theta} [E(\xi)]^* \quad (12)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N$$

B.
$$E(Z) = 2e^{j\omega t} a_0 \cos \beta_0 [mL + \xi]$$

$$= e^{-jm\theta} E(\xi) + e^{jm\theta} [E(\xi)]^* \quad (13)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N$$

因此只要单个腔内之 TM_{0n} 型波场分布 $E(\xi)$ 确定后,那么腔链内任意第 m 个腔内之场分布可由(12)、(13)式给出. 取各腔中心位置上 ($\xi = 0$) 的场来讨论,

$$\xi = 0, \varphi(\xi) = 0, \text{ 并设 } |E(\xi = 0)| = |E(0)| = \frac{1}{2} E_c.$$

则第 m 个腔中心位置上之场为:

A.
$$E^m = E_c \cos \left(m - \frac{1}{2} \right) \theta \tag{14}$$

B.
$$E^m = E_c \cos m\theta \tag{15}$$

对于半腔结束之单周期谐振腔场分布为:

(a) $\theta = \pi$ 模式
$$E^m = (-1)^m E_c$$

(b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 模式
$$E^m = E_c \cos \frac{m}{2} \pi \quad m = 0, 1, 2, \dots -N$$

(c) $\theta = 0$ 模式
$$E^m = E_c$$

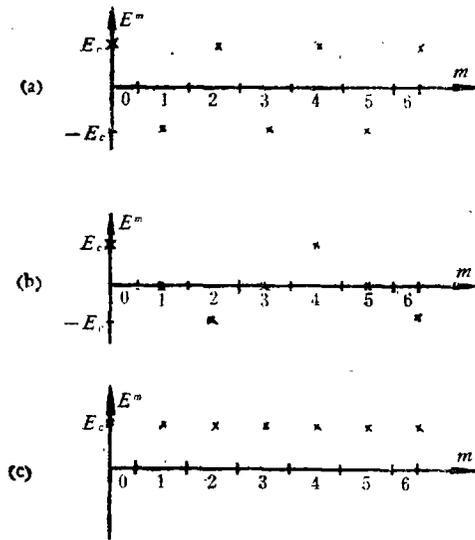


图3 半腔结束的单周期谐振腔场分布

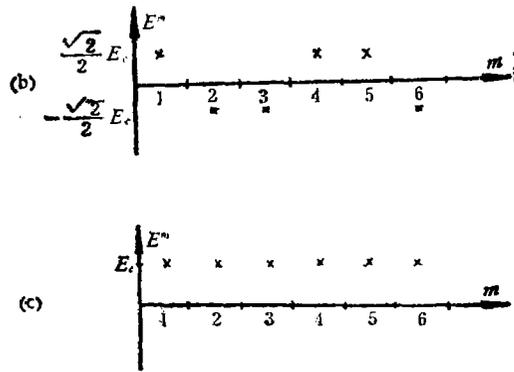


图4 整腔结束的单周期谐振腔场分布

对于整腔结束之单周期谐振腔场分布为:

(a) $\theta = \pi$ 模式
$$E^m = 0$$

(b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 模式
$$E^m = E_c \cos \left[(2m - 1) \frac{\pi}{4} \right] \quad m = 1, 2, 3, \dots -N$$

(c) $\theta = 0$ 模式
$$E^m = E_c$$

知对于整腔结束之单周期谐振腔链,仅能激发 N 个模式,不存在 π 模式。在 $\frac{\pi}{2}$ 模式下, m 为奇数(或偶数)腔内场不等于零,其所激发之最大场强仅为 0 模式最大场强的 $\cos \pi/4(0.707)$ 倍。上述结果已经高能所600兆赫模型腔链实验验证。

由于整腔结束和半腔结束之腔链所激发的振荡模式间隔皆为 $\frac{\pi}{N}$,半腔结束腔链仅多 π 模式,而且两者之耦合系数相同,由此可知两者的色散曲线相同。Bevens^[5]和Nishikawa^[6]分别给出了单周期及双周期情形下由场分析理论所得到的色散关系。由于篇幅限制,本文不加引述。

对于双周期谐振腔链:

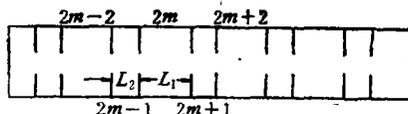


图 5 双周期谐振腔链示意图

周期为 $L = L_1 + L_2$, 总腔长 $l = N(L_1 + L_2)$

单腔相移为 θ , 所以产生驻波条件为:

$$\psi = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi q}{N} \quad (16)$$

$$\theta_1 = \beta_0 L_1$$

$$\theta_2 = \beta_0 L_2$$

如果两者单腔相移相同 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, 即有¹⁾

$$2\theta = \frac{q\pi}{N} \quad (17)$$

所以激发 $\frac{\pi}{2}$ 模式要求总腔数 $2N$ 为偶数。

双周期 F , 对于整腔结束和半腔结束的腔链, 作如 F 定义:

端腔为 L_1 的腔链:

A. $\xi_1 = z_1 - \frac{1}{2} L_1,$

$$\varphi(\xi_1) = \psi(z_1) - \frac{1}{2} \theta_1 \quad \text{相应整腔结束}$$

B. $\xi_1 = z_1$

$$\varphi(\xi_1) = \psi(z_1) \quad \text{相应半腔结束}$$

端腔为 L_2 的腔链:

A. $\xi_2 = z_2 - \frac{1}{2} L_2$

$$\varphi(\xi_2) = \psi(z_2) - \frac{1}{2} \theta_2 \quad \text{相应整腔结束}$$

B. $\xi_2 = z_2$

$$\varphi(\xi_2) = \psi(z_2) \quad \text{相应半腔结束}$$

讨论端腔为 L_1 的腔链(端腔为 L_2 的腔链结果相同, 只须用 L_2 替换 L_1 即可), 知第 $2m$ 腔 (L_1) 内任意点坐标为:

A. $Z = mL + \frac{1}{2} L_1 + \xi_1$

$$\psi(Z) = 2m\theta + \frac{1}{2} \theta_1 + \varphi(\xi_1). \quad (18)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N$$

B. $Z = mL + \xi_1$

1) 当 $\theta_1 \neq \theta_2$ 时, 双周期腔链中所有公式之 2θ 均用 $\theta_1 + \theta_2$ 代替。

$$\phi(Z) = 2m\theta + \varphi(\xi_1). \quad (19)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N$$

第 $(2m-1)$ 腔 (L_2) 内任意点坐标为:

$$A. \quad Z = \left(m - \frac{1}{2}\right)L + \frac{L_1}{2} + \xi_2$$

$$\phi(Z) = \left(m - \frac{1}{2}\right)2\theta + \frac{1}{2}\theta_1 + \varphi(\xi_2). \quad (20)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$B. \quad Z = \left(m - \frac{1}{2}\right)L + \xi_2$$

$$\phi(Z) = \left(m - \frac{1}{2}\right)2\theta + \varphi(\xi_2). \quad (21)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N$$

将上述(18)、(19)、(20)、(21)各式分别代入(5)式并取基波讨论,可知半腔结束之双周期谐振腔链任意处之场分布为:

第 $2m$ 腔内

$$\begin{aligned} E^{2m}(Z) &= 2e^{i\omega t} a_0 \cos \beta_0 [mL + \xi_1] \\ &= e^{-i2m\theta} E(\xi_1) + e^{i2m\theta} [E(\xi_1)]^*. \end{aligned} \quad (22)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N$$

第 $(2m-1)$ 腔内

$$\begin{aligned} E^{2m-1}(Z) &= 2e^{i\omega t} a_0 \cos \beta_0 \left[\left(m - \frac{1}{2}\right)L + \xi_2 \right] \\ &= e^{-j(m-\frac{1}{2})2\theta} E(\xi_2) + e^{j(m-\frac{1}{2})2\theta} [E(\xi_2)]^*. \end{aligned} \quad (23)$$

$$m = 1, 2, \dots, N$$

整腔结束之双周期谐振腔链任意处之场分布为:

第 $2m$ 腔内

$$\begin{aligned} E^{2m}(Z) &= 2e^{i\omega t} a_0 \cos \beta_0 \left[mL + \frac{1}{2}L_1 + \xi_1 \right] \\ &= e^{-j(2m\theta + \frac{1}{2}\theta_1)} E(\xi_1) + e^{j(2m\theta + \frac{1}{2}\theta_1)} [E(\xi_1)]^*. \end{aligned} \quad (24)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N$$

第 $(2m-1)$ 腔内

$$\begin{aligned} E^{2m-1}(Z) &= 2e^{i\omega t} a_0 \cos \beta_0 \left[\left(m - \frac{1}{2}\right)L + \frac{L_1}{2} + \xi_2 \right] \\ &= e^{-j(m-\frac{1}{2})2\theta + \frac{1}{2}\theta_1} E(\xi_2) + e^{j(m-\frac{1}{2})2\theta + \frac{1}{2}\theta_1} [E(\xi_2)]^*. \end{aligned} \quad (25)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N$$

所以只要单腔 L_1 及 L_2 内之场分布 $E(\xi_1)$ 和 $E(\xi_2)$ 确定后^[4],那么双周期腔链内任意处之场分布唯一确定。(由 L_1 和 L_2 组成双周期腔链时,在设计时,要求 $E(\xi_1)$ 和 $E(\xi_2)$ 在两腔交界面处连续)。

取各腔中心处之场讨论,

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = 0$$

$$\text{令 } |E(\xi_1 = 0)| = \frac{1}{2} E_{c,1}, |E(\xi_2 = 0)| = \frac{1}{2} E_{c,2}$$

所以对于半腔结束之双周期腔链有

$$E^{2m} = E_{c,1} \cos m2\theta, m = 0, 1, 2, \dots N. \quad (26)$$

$$E^{2m-1} = E_{c,2} \cos \left(m - \frac{1}{2} \right) 2\theta, m = 1, 2, \dots N. \quad (27)$$

对于整腔结束之双周期腔链有

$$E^{2m} = E_{c,1} \cos \left[m2\theta + \frac{1}{2} \theta_1 \right], m = 0, 1, 2, \dots N. \quad (28)$$

$$E^{2m-1} = E_{c,2} \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) 2\theta + \frac{1}{2} \theta_1 \right], m = 1, 2, \dots N. \quad (29)$$

因此双周期谐振腔链和单周期谐振腔链一样,在整腔结束腔链中, $\pi/2$ 模式第 $(2m-1)$ 腔内场不等于零,另外也不能激发 π 模式. 整腔结束和半腔结束的腔链它们的色散曲线也相同,但场的分布不同.

下面给出双周期腔链中各腔中心处的场分布示意图.

$$\text{设 } E_{c,1} \approx E_{c,2}$$

半腔结束之双周期腔链

(a) $\theta = 0$ 模式

$$E^{2m} = E_{c,1}, m = 0, 1, 2, \dots N$$

$$E^{2m-1} = E_{c,2}, m = 1, 2, 3, \dots N$$

(b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 模式

$$E^{2m} = (-1)^m E_{c,1}, m = 0, 1, 2, \dots N$$

$$E^{2m-1} = 0, m = 1, 2, 3, \dots N$$

(c) $\theta = \pi$ 模式

$$E^{2m} = E_{c,1}, m = 0, 1, 2, \dots N$$

$$E^{2m-1} = -E_{c,2}, m = 1, 2, 3, \dots N$$

整腔结束之双周期腔链

(d) $\theta = 0$ 模式

$$E^{2m} = E_{c,1}, m = 0, 1, 2, \dots N$$

$$E^{2m-1} = E_{c,2}, m = 1, 2, 3, \dots N$$

(e) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 模式

$$E^{2m} = (-1)^m \frac{\sqrt{2}}{2} E_{c,1}, m = 0, 1, 2, \dots N$$

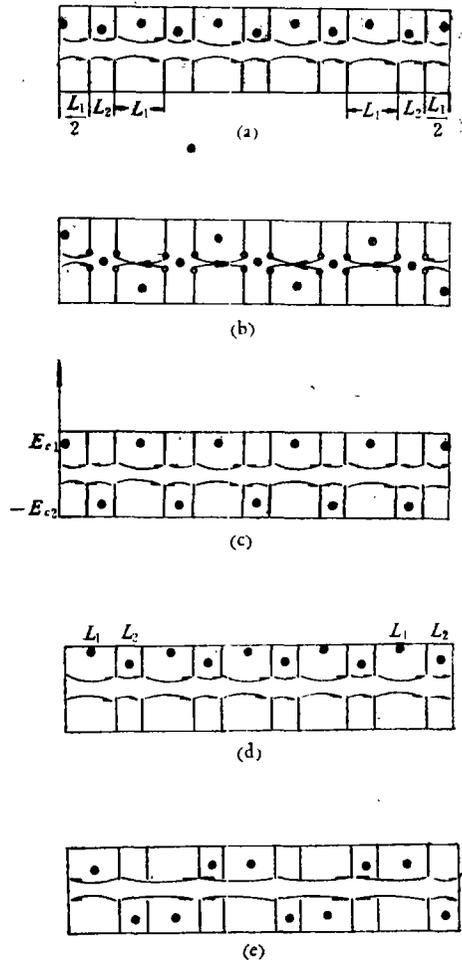


图 6 双周期腔链中各腔中心处的场分布

$$E^{2m-1} = (-1)^m \frac{\sqrt{2}}{2} E_{c,2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N$$

参 考 文 献

- [1] G. A. Loes and R. B. Neal, "Accelerating Structures", Linear Accelerators, 1970.
- [2] D. E. Nagle et al., "A coupled resonator model for standing wave accelerator tanks" *Rev. Sci. Instr.*, Vol. 38, No. 11, 1967.
- [3] G. Dôme, "Review and survey of accelerating structures" Linear Accelerators, 1970.
- [4] A. Katz, "Numerical computation of field distributions" Linear Accelerators, 1970.
- [5] R. M. Bevensee, Electromagnetic slow wave systems, 1964.
- [6] T. S. Nishikawa et al., "Dispersion relation and Frequency characteristics of alternating periodic structure for linear accelerators" *Rev. Sci. Instr.*, Vol. 37, No. 5, 1966.

THE COUPLED RESONATOR MODEL AND THE DISTRIBUTION OF THE ELECTRIC FIELD ON THE AXIS IN THE PERIODIC CAVITY CHAIN

CHEN SEN-YU

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The Coupled resonator model and the distribution of the electric Field on the axis in the singly periodic cavity chain and biperiodic chain with full-cavity terminations are analysed by Helmholtz Equation using the symmetry properties of the structure. It is another method to check coupled circuit theory. The results given in this paper for the singly periodic cavity chain with full-cavity terminations was verified by a 600 MHZ linac model of IHEP.