

袋的整体运动与核子结构函数

汪醒民 宋孝同 殷鹏程
(杭州大学) (复旦大学)

摘 要

利用具有平移不变性的口袋-夸克波函数以及引入一个洛仑兹不变的有效拉氏函数, 我们计算了核子深度非弹结构函数. 在我们的计算中, 4-动量守恒自动满足, 得到的结构函数正定且在 $\xi > 1$ 时为零. 进一步利用渐近自由假设, 我们获得了显示的 Bjorken 标度性及近似表达式 $F_1(\xi \approx 1) \propto (1 - \xi)^4$, 顺便还得到一个新的计数法则. 上机运算给出的 $F_2(\xi)$ 曲线看来在区间 $0.4 \lesssim \xi \leq 1$ 内与实验数据相符.

袋模型^[1], 特别是最简单的静态模型(球腔近似)在计算强子静态性质方面取得了引人注目的成就^[2,3]. 但在将其用于动态问题上时, 口袋的整体运动就必须加以考虑. 这方面已做了不少的工作^[4-7,9].

Jaffe^[8]曾计算了核子深度非弹结构函数. 其结果具有显示的 Bjorken 标度性, 而且满足如 Adler、动量求和等法则. 但由于没有计及袋的整体运动, 4-动量不守恒. 故当 $\xi \geq 1$ 时, $F_1(\xi) \neq 0$, 且对于某些过程 $F_1(\xi)$ 有时会小于零. 另外, 在 $\xi \approx 0$ 处, $F_1(\xi) \approx 0$, 这也与实验不符.

一、 γ -N(W-N) 有效相互作用拉氏函数及有效流

Barnhill III et al.^[4] 在计算核子电磁形状因子时, 引入具有质心平移不变的口袋-夸克波函数如下:

$$\psi_{\alpha p}(z_1 z_2 z_3) = \psi_{\alpha p}(r_1 r_2 r_3; y) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-i p \cdot y} \psi_{\alpha p}(r_1 r_2 r_3) \quad (1.1)$$

其中 $z_i = r_i + y$, z_i 和 y 分别是夸克和袋心的坐标, r_i 是夸克相对于袋心的坐标, α 表示夸克的内量子态(味道、颜色和自旋). 当核子处于静止基态, 即 $p = (M, \mathbf{0})$ 时, 有

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha i M}(r_1 r_2 r_3) &= q_{\alpha_1 M}(r_1) q_{\alpha_2 M}(r_2) q_{\alpha_3 M}(r_3) \\ q_{\alpha_i M} &= q_{\alpha_i}(r_i) = \frac{N}{\sqrt{4\pi}} \left[\begin{array}{l} i j_0(\epsilon |r_i|/R_0) U_m \\ -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}_i) j_1(\epsilon |r_i|/R_0) U_m \end{array} \right] e^{-i \frac{\epsilon}{R_0} r_i} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\epsilon \equiv \omega_1 - 1 = 2.04, \quad N^2 = e^3 / 2R_0^3 (\epsilon - 1) \sin^2 \epsilon$$

文献[4]利用狄拉克方程

$$\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial r_j} \mu + e_j \gamma_{(j)}^\mu A_\mu(r_j + y) \right] \psi(r_1 r_2 r_3; y) = 0 \quad (1.3)$$

得出一级近似下的 r -N 散射矩阵为:

$$S_{ji} = \delta_{ji} + i(2\pi)^4 \delta^4(p + q - p') A^\mu(q) \sum_j \int d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 e^{-i q \cdot r_j} \\ \times \psi_{\beta p'}^+(r_1 r_2 r_3; y = 0) (e \gamma_0 \gamma_\mu)_{(j)} \psi_{\alpha p}(r_1 r_2 r_3; y = 0) \quad (1.4a)$$

其中 (j) 表示第 j 个夸克的量。由此可得与实验符合得很好的电磁形状因子。

从中我们可以得到如下的启发:

- 袋的整体运动可看作是一个物理客体的运动, 它的自由运动可用平面波表示。
- 作为一级近似, 在 s 矩阵元中取 $t_j = 0$, 即 $y_0 = z_0 = t_0$ 。实际上因(1.1b)中各量都应定义在同一观察系中, 故而只有一个独立时间坐标。
- 有效 r -N 相互作用拉氏函数可看作是 y 的函数。令 \mathbf{R} 代表直积 $\mathbf{r}_1 \otimes \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_3$, 由(1.4)有:

$$s_{ji} = \delta_{ji} + i \int d^4 y \sum_j \int d^3 R A^\mu(r_j + y) \psi_{\beta p'}^+(\mathbf{R}; y) (Q \gamma^0 \gamma_\mu)_{(j)} \psi_{\alpha p}(\mathbf{R}; y) \\ = \delta_{ji} + i \int d^4 y \mathcal{L}_{eff}^j(y) \quad (1.4b)$$

其中用到单色波关系

$$A^\mu(z) = A^\mu(r + y) = e^{-i q \cdot (r+y)} A^\mu(q) \quad (1.4c)$$

现在我们试以量子场论的语言加以讨论。我们引入有效 r -N 拉氏函数为厄米算符:

$$\mathcal{L}_{eff}^j(y) = \sum_{i=1,2,3} \int \frac{d^3 R}{\lambda^3} A_\mu(z_i) \begin{bmatrix} \psi^+(z_3) (\gamma^0 Q \gamma^\mu)_{(i)} \psi(z_1) \\ \psi^+(z_2) \psi(z_2) \\ \psi^+(z^3) \psi(z_3) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

其中 $z_i = r_i + y$, $r_i = (0, \mathbf{r}_i)$, $\lambda^3 \propto R_0^3 \propto V_{bag}$ 。引进 λ^{-3} 有两个目的: 一则使 $\mathcal{L}_{eff}^j(y)$ 具有 L^{-4} 的量纲, 二则使之成为 Lorentz 标量。因在(1.5)中, $A_\mu(z_i) \psi^+(z_i) (\gamma^0 Q \gamma^\mu) \times \psi(z_i)$ 、 $\int_{bag} d^3 r_j \psi^+(z_j) \psi(z_j)$ 均是标量, 而 $d^3 r_i / \lambda^3 \propto dV / V$ 也是 Lorentz 不变的。

现将(1.1)推广为如下的自由度分离假设:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} \begin{bmatrix} \psi(z_1) \\ \psi(z_2) \\ \psi(z_3) \end{bmatrix} = \phi(\mathbf{R}; y) = \int d^3 p \phi_p(y) \phi_p(\mathbf{R}) \quad (1.6a)$$

其中:

$$\phi_p(y) = \sqrt{\frac{M}{(2\pi)^3 E_p}} e^{-i p \cdot y} a_p, [a_p, a_{p'}^+] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (1.6b)$$

$$\phi_p(\mathbf{R}) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} b_{\alpha_1 p} b_{\alpha_2 p} b_{\alpha_3 p} q_{\alpha_1 p}(\mathbf{r}_1) q_{\alpha_2 p}(\mathbf{r}_2) q_{\alpha_3 p}(\mathbf{r}_3) \quad (1.6c)$$

$$\{b_{\alpha_i p}, b_{\beta_j p'}^+\} = \delta_{ij} \delta_{\alpha_i \beta_j} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), [a_p, b_{p'}^+] = [a_p, b_{p'}] = 0$$

当 $p = (M, \mathbf{0})$ 时, $q_{\alpha p}(\mathbf{r})$ 就是 $t_i = 0$ 的(1.2)式, 我们约定此时 $b_{\alpha i p}$ 及 $q_{\alpha i p}$ 的脚标 p 可予省略.

设 \hat{p} 为总动算符, $\hat{p}_\mu = \int d^3p p_\mu a_p^\dagger a_p$, 则易证:

$$e^{i\hat{p}\cdot y} \phi_p(0) e^{-i\hat{p}\cdot y} = \phi_p(y), \quad e^{-i\hat{p}\cdot y} \phi(\mathbf{R}; 0) e^{i\hat{p}\cdot y} = \phi(\mathbf{R}; y) \quad (1.6d)$$

因此(1.5)可改写为:

$$\mathcal{L}_{eff}^I(y) = \sum_{1 \rightarrow 23} \int d^3R \phi^+(\mathbf{R}; y) [Q r^0 \gamma_\mu]_{(1)} A^\mu(r_1 + y) \phi(\mathbf{R}; y). \quad (1.7)$$

我们来求 s 矩阵元. 取协变归一基矢为:

$$|p, \alpha\rangle = [(2\pi)^3 2E]^{1/2} a_p^\dagger b_{\alpha_1}^\dagger b_{\alpha_2}^\dagger b_{\alpha_3}^\dagger |0\rangle.$$

则可求得:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{II} &= \langle p', \beta | p, \alpha \rangle + i \langle p', \beta | \int d^4y \mathcal{L}_{eff}^I(y) | p, \alpha \rangle \\ &= 2E(2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta}^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + i(2\pi)^4 \delta^4(p + q - p') A^\mu(q) \\ &\quad \times \sum_{1 \rightarrow 23} 2M \int d^3R e^{iq \cdot r_1} \phi_{p', \beta}^+(\mathbf{R}) (Q r^0 \gamma_\mu)_{(1)} \phi_{p, \alpha}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

若采用非协变归一基矢, 两边要除 $(2\pi)^3(4EE')^{1/2}$, 考虑到弹性散射中 $E \approx E' \approx M$, 即得(1.4)式.

我们可由(1.5)得到有效流:

$$J_\mu^{em}(y) = \sum_{1 \rightarrow 23} \int \frac{d^3R}{\lambda^3} e^{iq \cdot r_1} \begin{bmatrix} \phi^+(z_1) (Q r^0 \gamma_\mu)_{(1)} \phi(z_1) \\ \phi^+(z_2) \phi(z_2) \\ \phi^+(z_3) \phi(z_3) \end{bmatrix}. \quad (1.9a)$$

$$\mathcal{L}_{I,eff}^{YN}(y) = A^\mu(y) J_\mu^{em}(y) \quad (1.9b)$$

还可自然地推广为 $SU(3)_f$ 流:

$$J_\mu^a(y) = \sum_{1 \rightarrow 23} \int \frac{d^3R}{\lambda^3} e^{iq \cdot r_1} \begin{bmatrix} \phi^+(z_1) (\lambda^a r^0 \gamma_\mu) \phi(z_1) \\ \phi^+(z_2) \phi(z_2) \\ \phi^+(z_3) \phi(z_3) \end{bmatrix}. \quad (1.10a)$$

$$\mathcal{L}_{I,eff}(y) = A^{\mu a}(y) J_\mu^a(y). \quad (1.10b)$$

现对我们得到的有效流作一些讨论:

a. 由于 $\mathcal{L}_{eff}^I(y)$ 是标量, $A_\mu^a(y)$ 是矢量, 故 $J_\mu^a(y)$ 也是矢量, 且由(1.6d)它具有平移不变性:

$$e^{i\hat{p}\cdot y} J_\mu^a(0) e^{-i\hat{p}\cdot y} = J_\mu^a(y) \quad (1.10c)$$

b. 由袋模型或渐近自由 QCD 的基本假设, 我们可视 $\phi(z_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 相互近似独立, 构成一个三重 Hilbert 空间的不同分量, 并可定义运算法则:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \pm \phi'_1 \\ \phi_2 \pm \phi'_2 \\ \phi_3 \pm \phi'_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \phi'_1 \\ \phi_2 \phi'_2 \\ \phi_3 \phi'_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \\ \phi_3^+ \end{bmatrix}. \quad (1.11a)$$

从而:

$$\left[\begin{array}{c} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} [\bar{\phi}_1, \phi'_1] \\ [\bar{\phi}_2, \phi'_2] \\ [\bar{\phi}_3, \phi'_3] \end{array} \right], \left\{ \begin{array}{c} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{\phi}_1, \phi'_1\} \\ \{\bar{\phi}_2, \phi'_2\} \\ \{\bar{\phi}_3, \phi'_3\} \end{array} \right\}. \quad (1.11b)$$

二、核子结构函数表达式

利用(1.10),我们可以计算 1-N 过程的强子部分,即张量 $W_{\mu\nu}^{ab}$:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{ab} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\beta\beta'} \langle \alpha p | J_{\mu}^{a+}(0) | \beta p' \rangle \langle \beta p' | J_{\nu}^b(0) | \alpha p \rangle \delta^4(p + q - p') \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\beta\beta'} \int d^4y e^{iq \cdot y} \langle \alpha p | J_{\mu}^{a+}(y) | \beta p' \rangle \langle \beta p' | J_{\nu}^b(0) | \alpha p \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^4y e^{iq \cdot y} \langle \alpha p | [J_{\mu}^{a+}(y), J_{\nu}^b(0)] | \alpha p \rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

注意其中第一步用到 $J_{\mu}^a(y)$ 的平移特性 (1.10c). Jaffe 的计算是从(2.1)式出发的,但使用了没有平移不变性的袋模型单夸克流,而严格讲(2.1)式不适用于这样单夸克流.

利用(1.10b)和(1.11b),我们有:

$$\begin{aligned} [J_{\mu}^{a+}(y), J_{\nu}^b(0)] &= \sum_{1 \rightarrow 23} \int e^{-iq \cdot (r_1 - r'_1)} \frac{d^3R d^3R'}{\lambda^6} \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c} (\bar{\phi}(z_1) \lambda^a \gamma_{\mu} \phi(z_1)) \\ \phi^+(z_2) \phi(z_2) \\ \phi^+(z_3) \phi(z_3) \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} (\bar{\phi}(z'_1) \lambda^b \gamma_{\nu} \phi(z'_1)) \\ \phi^+(z'_2) \phi(z'_2) \\ \phi^+(z'_3) \phi(z'_3) \end{array} \right] \\ &= \sum_{1 \rightarrow 23} \int e^{-iq \cdot (r_1 - r'_1)} \frac{d^3R d^3R'}{\lambda^6} \cdot \left[\begin{array}{c} (\bar{\phi}_1 \lambda^a \gamma_{\mu} \{\phi_1, \bar{\phi}'_1\} \lambda^b \gamma_{\nu} \phi_1) \\ \bar{\phi}_2 \gamma_0 \{\phi_2, \bar{\phi}'_2\} \gamma_0 \phi_2 \\ \bar{\phi}_3 \gamma_0 \{\phi_3, \bar{\phi}'_3\} \gamma_0 \phi_3 \end{array} \right] \\ &\quad - \left[\begin{array}{c} (\bar{\phi}'_1 \lambda^b \gamma_{\nu} \{\phi'_1, \bar{\phi}_1\} \lambda^a \gamma_{\mu} \phi_1) \\ \bar{\phi}'_2 \gamma_0 \{\phi'_2, \bar{\phi}_2\} \gamma_0 \phi_2 \\ \bar{\phi}'_3 \gamma_0 \{\phi'_3, \bar{\phi}_3\} \gamma_0 \phi_3 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中简写 $\phi(z_i) \equiv \phi_i, \phi(z'_i) \equiv \phi'_i$.

由文献[9],对于 1-N 深度非弹,在光锥附近可用自由夸克的反对易子来代替(2.2)中的反对易子(注意(2.2)中 ϕ 只含负频部分):

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \bar{\phi}(x')\} &= \frac{+1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k} \not{k} e^{-ik \cdot (x-x')} \\ &= \frac{+1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k} \not{k} e^{-ik \cdot y + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \end{aligned} \quad (2.3)$$

将(2.2)、(2.3)代入(2.1),利用(1.6a)式可得:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{ab} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \rightarrow 23} \int d^4y e^{i(q+y) \cdot y} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{2M}{\lambda^3} \frac{d^3k_1}{2k_1} \frac{d^3k_2}{2k_2} \frac{d^3k_3}{2k_3} \\ &\quad \times \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left\{ \left(\int d^3r_1 d^3r'_1 \bar{k}_1^{\alpha_1} \bar{q}_{\alpha_1}(r_1) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} q_{\alpha_1}(r'_1) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{j=2}^3 \left(\int d^3 r_j d^3 r'_j \bar{q}_{\alpha_j}(r_j) \gamma_0 \gamma_\rho \gamma_0 q_{\alpha_j}(r'_j) e^{i\mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j)} \right) \\
& \times \langle T\alpha | b_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_3}^+ (\lambda^a \lambda^b)_{(\alpha)} b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} b_{\alpha_3} | T\alpha \rangle \\
& - \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \rightarrow 23} \int d^4 y e^{i(q-p+\sum_i k_i) \cdot y} \dots \\
& \langle T\alpha | b_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_3}^+ (\lambda^b \lambda^a)_{(\alpha)} b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} b_{\alpha_3} | T\alpha \rangle
\end{aligned} \quad (2.4)$$

其中第一项对 $d^4 y$ 积分的 $(2\pi)^4 \delta^4(q + p - \sum_i k_i)$; 第二项则得 $(2\pi)^4 \delta^4(q - p + \sum_i k_i)$, 它恒为零故可略去。利用

$$\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu = s_{\mu\rho\nu} \gamma^\sigma - i g_{\mu\rho\nu} \gamma^\sigma \gamma_5, \quad s_{\mu\rho\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \quad (2.5)$$

而由文献[8]的讨论, $-g_{\mu\nu}$ 的系数就是 W_1^{ab} 。考虑到

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \langle T\alpha | b_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_3}^+ (\lambda^a \lambda^b)_{(\alpha)} b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} b_{\alpha_3} | T\alpha \rangle = \sum_{\alpha} \langle T\alpha | b_{\alpha_1}^+ (\lambda^a \lambda^b)_{(\alpha)} b_{\alpha_1} | T\alpha \rangle \quad (2.6a)$$

以及(2.5)中的积分对于置换 $1 \rightarrow 23$ 不变, 可从求和号中提出, 故有:

$$\sum_{1 \rightarrow 23} \langle T\alpha | b_{\alpha_1}^+ (\lambda^a \lambda^b)_{(\alpha)} b_{\alpha_1} | T\alpha \rangle = \sum_{\alpha} \langle T | b_{\alpha}^+ (\lambda^a \lambda^b) b_{\alpha} | T \rangle \quad (2.6b)$$

这里 $|T\rangle$ 代表基态核子, 而右边的算符可以对三个夸克都作用。综上所述, 有:

$$\begin{aligned}
W_1^{ab} &= \frac{M}{(2\pi)^6} \frac{1}{\lambda^3} \int \delta^4(p + q - \sum_i k_i) \frac{d^3 k_1}{2k_1} \\
& \times \frac{d^3 k_2}{2k_2} \frac{d^3 k_3}{2k_3} \int d^3 r_1 d^3 r'_1 \bar{q}(r_1) \mathcal{K}_1 q(r'_1) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} \\
& \times \prod_{j=2}^3 \int d^3 r_j d^3 r'_j \bar{q}(r_j) \mathcal{K}_j q(r'_j) e^{i\mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j)} \\
& \times \sum_{\alpha} \langle T | b_{\alpha}^+ (\lambda^a \lambda^b) b_{\alpha} | T \rangle
\end{aligned} \quad (2.7)$$

易证(参见[8])

$$\int d^3 r d^3 r' \bar{q}(r) \mathcal{K} q(r') e^{i\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \frac{N^2}{4\pi} k (2\pi)^{24} R_0^6 |T_{\text{III}}(\alpha, \beta) \hat{k} - T_{\text{II}}(\alpha, \beta) \mathbf{l}|^2 \quad (2.8a)$$

$$\int d^3 r d^3 r' \bar{q}(r) \gamma_0 \mathcal{K} \gamma_0 q(r') e^{i\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \frac{N^2}{4\pi} k (2\pi)^{24} R_0^6 |T_{\text{III}}(\alpha, \beta') + T_{\text{II}}(\alpha, \beta')|^2 \quad (2.8b)$$

其中

$$T_{ij}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^2 dx j_i(\alpha x) j_j(\beta x) \quad (i, j = 0, 1)$$

$$\beta = lR_0 = |\mathbf{l}| R_0, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}/|\mathbf{l}|, \quad \beta' = kR.$$

$$\begin{aligned}
\therefore W_1^{ab} &= \frac{N^2 M R_0^6 (2\pi)^3}{4\pi^2 \lambda^3} \int \delta^4(p + q - \sum_i k_i) \\
& \times d^3 k_1 |T_{\text{III}}(\alpha, \beta) \hat{k}_1 - T_{\text{II}}(\alpha, \beta) \mathbf{l}|^2 \\
& \times \left\{ \frac{1}{(2\pi)^6} \prod_{j=2}^3 \int \frac{d^3 k_j}{2k_j} d^3 r_j d^3 r'_j \bar{q}(r_j) \gamma_0 \mathcal{K}_j \gamma_0 q(r'_j) e^{i\mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_a \langle T | b_a^+(\lambda^a \lambda^b) b_a | T \rangle \quad (2.9a) \\
& = \frac{MN^2 R_0^6}{4\pi^2} \cdot \frac{(2\pi)^3}{\lambda^3} \int \delta^4(p+q) \\
& \quad - \sum_i k_i \int d^3 k_i |T_{00}(\epsilon, \beta) \hat{k}_i - T_{11}(\epsilon, \beta) \hat{l}|^2 \\
& \quad \times \left\{ \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{N^4 (2\pi)^4 R_0^{12}}{4} \prod_{j=2}^3 \int d^3 k_j |T_{00}(\epsilon, \beta_j) \right. \\
& \quad \left. + T_{11}(\epsilon, \beta_j) \right\} \sum_a \langle T | b_a^+(\lambda^a \lambda^b) b_a | T \rangle \quad (2.9b)
\end{aligned}$$

其中已设

$$\beta = |l| R_0 = |k_1 - q| R_0, \quad \beta_j = k_j R_0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

从(2.9)不难看出:

a. W_1^{ab} 是正定的.

b. 当 $\xi > 1$ 时 $W_1^{ab} = 0$. 这是因为在 Bjorken 极限下:

$$|q| = q^0 + \xi M \quad (2.10)$$

而由 4-动量守恒(取 $p = (M, \mathbf{0})$):

$$M + q^0 - \sum_i k_i = 0, \quad q = k_1 + k_2 + k_3 \quad (2.11)$$

$$\therefore q^0 + \xi M = |q| = |k_1 + k_2 + k_3| \leq k_1 + k_2 + k_3 = M + q^0,$$

$$\therefore \xi \leq 1 \quad (2.12)$$

我们可将(2.9)与 Jaffe 的相应结果作一比较. 我们人为地在(2.9)中除去 3-动量守恒, 即除去 $(2\pi)^3 \delta^3(R_0 q - R_0 \sum_i k_i)$ (出现 R_0 是为了保持量纲不变, 同时从(2.9)中可看到 k_i 只以 $R_0 k_i$ 的形式出现). 再视旁观夸克与过程无关, 取它们的能级为: $k_2 = k_3 = \epsilon/R_0 \approx M/3$, 于是

$$\delta \left(M + q^0 - \sum_i k_i \right) = \delta(q^0 + \epsilon/R_0 - k_1),$$

且在(1.10b)中, $\int \phi_2^+ \phi_2 \phi_3^+ \phi_3 d^3 r_2 d^3 r_3 = 1$, 故(2.9a)的大括号内的贡献变为 1, 从而有:

$$\begin{aligned}
W_1^{ab} \Rightarrow & \frac{N^2 M R_0^6}{4\pi^2} \left(c_1 \frac{R_0^3}{\lambda^3} \right) \int d^3 k_1 \delta(q^0 + \epsilon/R_0 - k_1) |T_{00}(\epsilon, \beta) \hat{k}_1 \\
& - T_{11}(\epsilon, \beta) \hat{l}|^2 \sum_a \langle T | b_a^+(\lambda^a \lambda^b) b_a | T \rangle \quad (2.13)
\end{aligned}$$

其中 c_1 是个常数因子, 表示人为改变相空间的影响. 而 Jaffe^[8] 的相应结果有两项, 第一项除去因子 $c_1 R_0^3/\lambda^3$ 就是(2.13); 其第二项是负的, 在我们的推导中不出现, 它对应于导出(2.7)时已略去的(2.5)第二项. 这是 4-动量守恒的结果. 若(2.13)与 Jaffe 的第一项代表同一过程, 我们有 $\lambda^3 = c_1 R_0^3$, 说明我们在讨论(1.5)时引进 $\lambda^3 \text{oc} V_{bag}$ 是合理的. 我们还可以取旁观夸克为自由平面波函数, 代进除去空间动量守恒的(2.9a)式直接计算, 也可得到(2.13), 这说明我们定义的运算法则(1.11a,b)是自洽的.

容易利用 4-动量守恒来积分(2.9b)中的 $d^3 k_2 d^3 k_3$, 结果得:

$$\begin{aligned}
W_1^{qb} &= \frac{MN^6 R_0^{10}}{2\pi} \left(\frac{R_0}{\lambda}\right)^3 \int \frac{\beta_1 d\beta_1}{R|\mathbf{q}|} \cdot \int \beta d\beta \\
&\times \int_{\frac{1}{2}(\beta_0-\beta)}^{\frac{1}{2}(\beta_0+\beta)} \frac{(\beta_0-\beta_2)\beta_2 d\beta_2}{\beta} |T_{00}(\epsilon, \beta)\hat{k}_1 - T_{11}(\epsilon, \beta)l|^2 \\
&\times |T_{00}(\epsilon, \beta_2) + T_{11}(\epsilon, \beta_2)|^2 |T_{00}(\epsilon, \beta_0 - \beta_2) \\
&+ T_{11}(\epsilon, \beta_0 - \beta_2)|^2 \sum_a \langle T|b_a^+(\lambda^2 \lambda^b)b_a|T \rangle \quad (2.14)
\end{aligned}$$

其中已令 $\beta_0 = (k_2 + k_3)R_0 = \beta_2 + \beta_3$; β 和 β_1 的积分限为:

$$\begin{aligned}
&\text{由 } \beta = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|R_0 = |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|R_0, \\
&\therefore |\beta_1 - |\mathbf{q}|R_0| \leq \beta \leq (k_2 + k_3)R_0 = \beta_0 \\
&\text{由 } k_1 = q^0 + M - (k_2 + k_3), \\
&\therefore 0 \leq \beta_1 \leq (q^0 + M)R_0
\end{aligned} \quad (2.15)$$

在 Bjorken 极限(2.10)下, (2.14)没有显示的 Bjorken 标度性.

三、Bjorken 标度性和 $\xi \approx 1$ 的渐近行为 计数法则和若干求和法则的讨论

为了得到显示的 Bjorken 标度性, 我们采用部分子模型的基本假设^[10]: 当 Q^2 足够大时, 相应过程的时间标度 $\tau \sim 1/\sqrt{Q^2}$ 很小, 以至夸克间的相互作用(包括袋变形)在此间隔内可忽略. 因此受作用夸克本身有 4-动量守恒 $p_1 + q \approx k_1$. p_1 是束缚夸克的动量,

$|\mathbf{p}| \sim 1/R_0$; 设 $|\mathbf{p}_{1\max}| = \frac{c_1}{R_0} \ll |\mathbf{q}|$, 则由 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{p}_1$ 有:

$$|\mathbf{q}| - |\mathbf{p}_{1\max}| \leq k_1 \leq |\mathbf{q}| + |\mathbf{p}_{1\max}|, \text{ 或: } |\mathbf{q}|R_0 - c_1 \leq \beta_1 \leq |\mathbf{q}|R_0 + c_1 \quad (3.1)$$

$$(2.14) \text{ 成为: } W_1^{qb} = \frac{MN^6 R_0^{10}}{2\pi} \left(\frac{R_0}{\lambda}\right)^3 \int_{|\mathbf{q}|R_0 - c_1}^{|\mathbf{q}|R_0 + c_1} \frac{\beta_1 d\beta_1}{|\mathbf{q}|R_0} \int_{\beta_1 - |\mathbf{q}|R_0}^{\beta_0} d\beta F(\beta_1, \beta)$$

由于 $c_1 \ll |\mathbf{q}|R_0$, 故可用中值近似, 被积函中 β_1 取值为 $|\mathbf{q}|R_0$ (即 $k_1 = |\mathbf{q}|$), 这时在 Bjorken 条件(2.10)下:

$$\beta_0 = (k_2 + k_3)R_0 = (M + q_0 - k_1)R_0 = (1 - \xi)MR_0 \quad (3.2a)$$

$$\hat{k}_1 \cdot l = \frac{\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})}{k_1 l} = \frac{\frac{1}{2}(k_1^2 - q^2) + \frac{1}{2}(k - q)^2}{k_1 l} = \frac{l}{k_1} \rightarrow 0 \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned}
\text{故有: } W_1^{qb} &= \frac{MN^6 R_0^{10}}{2\pi} c \int_0^{\beta_0} d\beta \int_{\frac{1}{2}(\beta_0-\beta)}^{\frac{1}{2}(\beta_0+\beta)} (\beta_0 - \beta_2)\beta_2 d\beta_2 \\
&\times (T_{00}^2(\epsilon, \beta) + T_{11}^2(\epsilon, \beta))(T_{00}(\epsilon, \beta_2) + T_{11}(\epsilon, \beta_2))^2 \\
&\times (T_{00}(\epsilon, \beta_0 - \beta_2) + T_{11}(\epsilon, \beta_0 - \beta_2))^2 \sum_a \langle T|b_a^+(\lambda^2 \lambda^b)b_a|T \rangle \quad (3.3)
\end{aligned}$$

其中已设 $c = 2c_1 R_0^3 / \lambda^3$.

暂时假定 c 与 Q^2 无关, 从(3.3)直接看出:

a. 有显示的 Bjorken 标度性 $W_1^{qb} = F_1^{qb}(\xi)$.

b. 当 $\xi = 1$ 时, 由 $\beta_0 = 0$ 得 $F_1^{qb}(\xi = 1) = 0$.

我们很容易得到 $\xi \approx 1$ 的渐近式. 因这时 $\beta_0 \approx 0$, 从而由(3.2b) $\beta \approx 0$, (3.3) 可用中值近似得:

$$F_1^{qb}(\xi \approx 1) \approx \frac{MN^6 R_0^{10}}{16\pi} c M^4 R_0^4 (1 - \xi)^4 (T_{00}(e, 0))^6 \sum_a \langle T | b_a^\dagger \lambda^a \lambda^b b_a | T \rangle \quad (3.4)$$

$$\therefore F_1^{qb}(\xi \approx 1) \propto (1 - \xi)^4 \quad (3.5)$$

其中用到 $\beta_0 \rightarrow 0$ 时 $T_{00}(e, \beta_0)$ 有限而 $T_{11}(e, \beta_0) \rightarrow 0$.

注意(3.5)仅仅来自相空间利用 $\delta^4(p + q - \Sigma k_i)$ 积分, 与波函数的具体形式无关. 我们可用同样方法处理介子, 相空间的类似积分给出 $F_1(\xi \approx 1) \propto (1 - \xi)$. 推而广之, 当旁观夸克或反夸克数为 N 时, 我们有新的计数法则:

$$F_1(\xi \approx 1) \propto (1 - \xi)^{3N-2} \quad (3.6)$$

这与通常采用的计数法则 $F_1(\xi \approx 1) \propto (1 - \xi)^{2N-1}$ 很相似. 目前的实验还不能确定 $F_1^{qb}(\xi \approx 1)$ 是 $(1 - \xi)^3$ 还是 $(1 - \xi)^{4.11}$. 但我们得到(3.6)的方法很简单, 除 4-动量守恒外, 只输入了渐近自由假设(3.1).

(3.3)式可上机运算, 取 $R_0 = 5\text{GeV}^{-1}$ 得到 $F_2^{qb}(x) = 2x F_1^{qb}(x)$ 如图 1. 由图可见, 只要选择适当的 c 值, 理论曲线与实验曲线在 $0.4 \lesssim x \leq 1$ 的范围内符合得很好. 看来 c 与 Q^2 有关, 它可能隐含着关系: $c = 2c_1 \left(\frac{R_0}{\lambda}\right)^3 = c(Q^2)$

即 c 代表标度破坏.

理论曲线在范围 $0 \leq x \leq 0.4$ 内与实验不符是在预料之中的. 因为我们引入口袋等阶于考虑了夸克间的长程作用, 但未计及短程作用, 更没有考虑到海夸克的贡献. Close^[11]曾对此作过简洁的说明(见图 2), 我们的计算相当于图 2b 的情形.

下面讨论一下求和法则. 先将(3.3)式简写为:

$$F_1^{qb}(x) = cf(x) \sum_a \langle T | b_a^\dagger (\lambda^a \lambda^b) b_a | T \rangle \quad (3.7)$$

显示计算给出:

$$F_1^{qb}(x) = cf(x), \quad F_1^{qb}(x) = \frac{2}{3} cf(x) \quad (3.8a)$$

$$F_3^{qb}(x) = F_3^{qb} = 0 \quad (3.8b)$$

$$F_1^{qb}(x) = 2cf(x), \quad F_1^{qb}(x) = 4cf(x) \quad (3.8c)$$

$$F_3^{qb}(x) = -4cf(x), \quad F_3^{qb}(x) = -8cf(x) \quad (3.8d)$$

引入价夸克分布函数 $u_v(x)$, $d_v(x)$, 由部分子模型(不考虑海夸克时)有:

$$2F_1^{qb}(x) = \frac{4}{9} u_v + \frac{1}{9} d_v, \quad 2F_1^{qb}(x) = \frac{4}{9} d_v + \frac{1}{9} u_v$$

$$\text{代入(3.8a)可得: } u_v(x) = 4cf(x), \quad d_v(x) = 2cf(x), \quad u_v = 2d_v. \quad (3.9)$$

$$\text{于是由(3.8c)和(3.8d)及(3.9)可得: } F_1^{qb}(x) = d_v(x), \quad F_1^{qb}(x) = u_v(x) \quad (3.10a)$$

$$F_3^{qb}(x) = -2d_v(x), \quad F_3^{qb}(x) = -2u_v(x) \quad (3.10b)$$

$$\frac{18}{5} (F_1^{qb} + F_1^{qb}) = F_1^{qb} + F_1^{qb} \quad (3.10c)$$

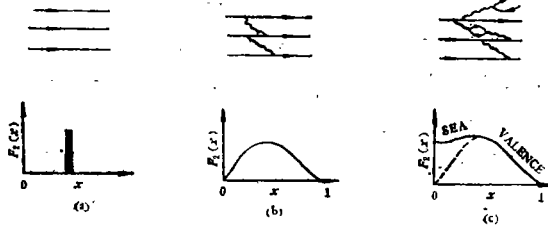
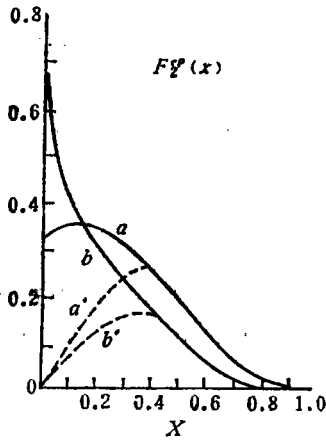


图1 实验曲线 $a(Q^2 = 1.8\text{GeV}^2)$, $b(Q^2 = 22.5\text{GeV}^2)$. 引自
Buras and Gaemers, *Nucl. Phys. B132*, 249 (1979).
理论曲线 $a'(c \approx 8)$, $b'(c \approx 5)$, $R_0 = 5\text{GeV}^{-1}$

图 2

这些都是部分子模型中熟知的公式(不考虑海夸克时)。我们还可按 Jaffe^[8] 的方法证明(即利用 $W_{\mu\nu}^{ab}$ 的张量特性和 W_1 的标度性), Collan-Gross 关系式成立:

$$F_2^p(x) = 2xF_1^p(x) \tag{3.11}$$

值得指出的是按 Jaffe 的计算结果(3.10b)不成立。

现在我们取 c 值(约为 18)使得: $c \int_0^1 f(x) dx = 0.5$. (3.12)

则可得一系列求和法则如下:

a. 价夸克数求和法则: $\int_0^1 u_v(x) dx = 2$, $\int_0^1 d_v(x) dx = 1$ (3.13)

b. Adler 求和法则: $\int_0^1 dx \frac{1}{2} (F_2^p - F_2^n) = c \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ (3.14)

c. Gross-Llewellyn-Smith 求和法则:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 dx \{F_3^p + F_3^n\} = -6c \int_0^1 f(x) dx = -3 \tag{3.15}$$

d. 动量求和法则: $\int_0^1 dx x(u_v + d_v) = 6c \int_0^1 xf(x) dx \approx 0.75$ (3.16)

其中只有动量求和与实验不符。但此时对应的 $F_2^p(x)$ 已不能与图 1 所示的实验曲线吻合。我们发现,这两个困难可以通过引入强作用修正——雷吉项加以克服。我们将在下一篇文章中对此加以讨论^[12]。

四、小结与讨论

我们从有效拉氏函数(1.5)及自由度分离公式(1.6)这两个基本假设出发,得到具有平移不变性的流(1.10),根据运算法则(1.11)并利用渐近自由(3.1),我们得到了核子结构函数表达式(3.3),它具有显示的 Bjorken 标度性,是正定的,在 $\xi \approx 1$ 处有渐近行为 $(1-\xi)^4$;

并且附带给出新的计数法则 (3.6)。上机运算 (取 $R_0 = 5\text{GeV}^{-1}$) 得到的理论曲线在 $0.4 \leq x \leq 1$ 内可与实验符合得较好。最后讨论了各种结构函数的相互关系及一系列求和法则。

看来引入口袋整体运动后的确使我们克服了 Jaffe 的相应计算的两大困难 (W_1 非正定和 ξ 大于 1 时非零), 这为下一步得到在 $0 \leq x \leq 1$ 的全部区间与实验符合较好且能满足一系列求和法则要求的结构函数打下了基础^[12]。

当然, 我们的计算十分粗糙。自由度分离公式 (1.6) 及运算法则 (1.11) 都还缺乏理论基础。我们计算的结果 $u_v = 2d_v$ (见 (3.9) 式) 也与实验不符。这些都还有待于深入的讨论。希望本文能为建立一种新的准自由多体场论提供某些有用的线索。

参 考 文 献

- [1] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.*, D9 (1974), 3471.
- [2] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson and C. B. Thorn. *Phys. Rev.*, D10(1974), 2599.
- [3] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson and J. Kiskis, *Phys. Rev.*, D12(1975), 2060.
- [4] M. V. Barnhill III, W. K. Cheng and A. Halprin, *Phys. Rev.*, D20(1979), 723.
- [5] Y. Gunduc. A. J. G. Hey and P. J. Walter, *Phys. Rev.*, D21(1980), 271.
- [6] J. F. Donoghue and K. Johnson, *Phys. Rev.*, D21(1980), 1975.
- [7] 刘连寿、蔡颢、杨仲禾, 科学通报, 26(1981), 465.
- [8] R. L. Jaffe, *Phys. Rev.*, D11 (1975), 1953.
- [9] R. L. Jaffe and A. Patrasoniu, *Phys. Rev.*, D12 (1975), 1314.
- [10] F. E. Close, *Rep. Prog. Phys.*, V42(1979), 1315.
- [11] F. E. Close, "High Momentum Transfer Physics" in I. M. Barbour & A. T. Davies ed. "Fundamentals of quark Model" Scottish Universitits Summer School in Physics (1977).

THE COLLECTIVE MOTION OF THE BAG AND THE NUCLEON STRUCTURE FUNCTIONS

WANG XING-MIN SONG XIAO-TONG YIN PENG-CHENG
(Hangshou University) (Fudan University)

ABSTRACT

Using the hypothesis of the bag-quarks' wave-function with the property of translation invariance, and introducing a Lorentz-invariant effective Lagrangian, we have calculated the nucleon deep inelastic structure functions. In our calculation the 4-momentum conservation is satisfied automatically, while the resultant structure functions are positive-definite and vanish when $x > 1$. Furthermore, using the assumption of the asymptotic freedom, we obtain explicitly the Bjorken scaling, the approximate expression $F_1(x \sim 1) \propto (1-x)^4$, and by the way, a new counting rule. Computer calculation gives the $F_2(x)$ curve which seems to be consistent with the data in the range of $0.4 < x < 1$.