

粒子束团的纵向传输特性

魏开煜

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文系统地阐述了带电粒子束团的各种纵向传输特性,其中包括散开束团的重新聚束,纵向成像和成腰,纵向腰-腰传输,纵向 π 变换以及动量散度的调节等问题,并给出了有关这些问题的普适性计算公式。

一、引 言

由于历史的原因,人们多注重束流横向传输特性的研究,而对粒子束团或短脉冲束的纵向传输特性研究得很少。其中,对散开束团的重新聚束和束团动量散度的削减,发表过一些论文,但大部分是针对具体加速器进行具体分析和设计,尚缺乏普遍讨论和普适性计算公式;对于束团纵向传输的更普遍的特性,如纵向成像和成腰,纵向腰-腰传输,纵向发散度的旋转和 π 变换等问题,则很少有人论述。这些纵向传输特性与横向传输特性有某些相似之处,但却有着不同的物理意义。它们对于电子束团和高能质子束团的传输是不重要的,但对于低能和中能质子束团,特别是对于重离子束团的传输是比较重要的。本文中,我们对粒子束团的这些纵向传输特性做了普遍的理论分析,并且给出了有关束团的纵向成像和成腰,纵向腰-腰传输,纵向 π 变换,纵向发散度的任意旋转和动量散度调节等问题的普适性计算公式。散开束团的重新聚束和动量散度的削减也自然地包括在这一普遍的理论中。

二、基本关系式

我们以传输系统的中心轨道为纵向坐标轴 Z ,沿束流传输的方向为正向,在线性近似下,认为标准粒子处在束团的中心,其坐标为 Z ,动量为 P ;非标准粒子相对于标准粒子的纵向位置之差和动量之差分别为 z 和 $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)$ 。束团在 $\left(z, \frac{\Delta P}{P}\right)$ 相空间的发散度为一对称相椭圆

$$\left(z, \frac{\Delta P}{P}\right) \sigma^{-1} \begin{pmatrix} z \\ \frac{\Delta P}{P} \end{pmatrix} = 1, \quad (2.1)$$

式中 σ^{-1} 是束团纵向包络矩阵 σ 的逆矩阵. σ 的矩阵元由下列关系确定

$$\sigma_{11} = M_{11}^2 \sigma_{011} + 2M_{11}M_{12} \sigma_{012} + M_{12}^2 \sigma_{022}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = M_{11}M_{21} \sigma_{011} + (1 + 2M_{12}M_{21}) \sigma_{012} + M_{12}M_{22} \sigma_{022}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{22} = M_{21}^2 \sigma_{011} + 2M_{21}M_{22} \sigma_{012} + M_{22}^2 \sigma_{022}. \quad (2.4)$$

这里 $M_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$ 是系统纵向传输矩阵 M 的各元素.

通常,束团的形成过程总是同某种高频电场的调制有关的,假定相应高频电场的波长为 λ ,我们分别以 $\phi_0, \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}$ 及 ϵ_0 表示束团的初始半相宽,动量散度和纵向发散度的大小,那么初始包络矩阵 σ_0 的各元素为

$$\sigma_{011} = z_{0\max}^2 = \frac{\phi_0^2}{Q^2}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{022} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{012} = \pm \frac{1}{Q} \sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2}. \quad (2.7)$$

(2.7)式右端的“+”与“-”分别相应于纵向发散束与会聚束; Q 为

$$Q = \frac{2\pi}{\beta\lambda}. \quad (2.8)$$

$\beta = \frac{v}{c}$, v 是标准粒子的速度, c 是光速. 束团传输到任一点 Z 时,它的半相宽 ϕ , 动量散度 $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\max}$ 以及发散度大小 ϵ 由下式计算

$$\phi = Qz_{\max} = Q\sqrt{\sigma_{11}}, \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\max} = \sqrt{\sigma_{22}}, \quad (2.10)$$

$$\epsilon = \sqrt{|\sigma|} = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

这里 z_{\max} 是束团在实际空间的半长度.

三、束团的纵向漂移

在无纵向传输元件作用的自由空间,束团漂移的传输矩阵为

$$M = R_L, \quad R_L = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

式中 L 是漂移距离, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. 将 M 矩阵的相应元素代入(2.2)–(2.4)并利用(2.5)

—(2.11)诸式可以得到 $\sigma = \sigma_0$ 及 $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\max} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}$, 即束团在自由漂移中纵向发散度与动量散度为常数. 束团在漂移中长度的变化有以下三种情况:

1. 初始束团为纵向发散束, 即 $\sigma_{012} > 0$, 可得到

$$\phi = \phi_0 \left[1 + \frac{2}{\phi_0^2} \left(\frac{2\pi L}{r^2 \beta \lambda} \right) \sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2} + \frac{1}{\phi_0^2} \left(\frac{2\pi L}{r^2 \beta \lambda} \right)^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

在此情况下, 束团长度将随漂移距离很快增长.

2. 初始束团为纵向会聚束(如图1), 即 $\sigma_{012} < 0$, 可得到

$$\phi = \phi_0 \left[1 - \frac{2}{\phi_0^2} \left(\frac{2\pi L}{r^2 \beta \lambda} \right) \sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2} + \frac{1}{\phi_0^2} \left(\frac{2\pi L}{r^2 \beta \lambda} \right)^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

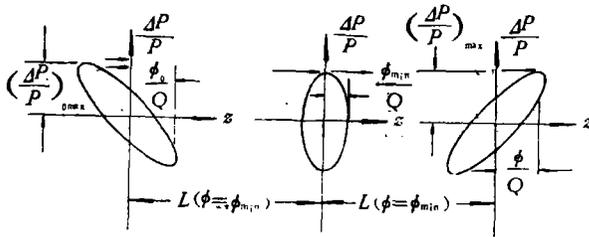


图1 初始会聚束团的纵向漂移

在此情况下, 束团首先变短, 形成一个纵向束腰, 可以求得束腰的大小和位置分别为

$$\phi_{\min} = \frac{Q \sigma_0}{\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}} \quad (3.4)$$

及

$$L_{(\phi=\phi_{\min})} = \frac{\sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2} \left(\frac{r^2 \beta \lambda}{2\pi} \right). \quad (3.5)$$

在达到束腰之后, 束团就变为发散束, 在 $L = 2L_{(\phi=\phi_{\min})}$ 处, 束团的长度恢复到 $\phi = \phi_0$, 以后就变为 $\phi > \phi_0$, 并且越来越长.

3. 初始束团为纵向束腰, 即 $\sigma_{012} = 0$, 在此情况下得到

$$\phi = \phi_0 \left[1 + \frac{1}{\phi_0^2} \left(\frac{2\pi L}{r^2 \beta \lambda} \right)^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

束团的长度单调增长.

四、成像、成腰和腰-腰传输

纵向传输元件是一些单间隙或者多间隙高频腔。这些高频腔在用于聚束时称为聚束器,在用于动量散度调节时叫散束器,在用于发散度旋转时又叫转向器,其实是同一种传输元件。

假定腔的电间隙上所加纵向高频电场是正弦形的,并且正好使标准粒子在电场的零相位通过电间隙中心。再假定电间隙的长度远小于漂移距离 L , 则电间隙的作用可以近似为一个纵向薄透镜,在此条件下,可以求得电间隙的传输矩阵为

$$R_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r^2 Q \chi & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

式中 χ 为

$$\chi = \frac{eV}{m_0 c^2 r^3 \beta^2} \left(\frac{\sin \phi_{in}}{\phi_{in}} \right). \quad (4.2)$$

这里 e 和 m_0 分别是粒子的电荷和静质量。 ϕ_{in} 是束团在间隙入口的半相宽。 V 是间隙上的有效电压幅度,即 $V = V_0 T$, V_0 是电压峰值, T 是渡越因子。通常 $(\sin \phi_{in} / \phi_{in})$ 是漂移距离的函数,但关系很弱,在 ϕ_{in} 比较小的情况下,例如在 $\phi_{in} \leq 45^\circ$ 时,可以近似地认为这个比例因子与漂移距离无关。

为简明起见,我们讨论一个由单间隙腔构成的最简单的纵向传输段。设电间隙前后的漂移距离分别为 L_1 和 L_2 ,则这个传输段的纵向传输矩阵为

$$M = R_{L_2} R_L R_{L_1}. \quad (4.3)$$

利用(3.1)中 R_L 的表示式及(4.1)式可得

$$M_{11} = 1 - Q \chi L_2, \quad (4.4)$$

$$M_{12} = \frac{1}{r^2} (L_1 + L_2 - Q \chi L_1 L_2), \quad (4.5)$$

$$M_{21} = -r^2 Q \chi, \quad (4.6)$$

$$M_{22} = 1 - Q \chi L_1. \quad (4.7)$$

I. 纵向成像 束团的纵向成像可以定义为使束团在像点的长度同初始长度(或物长度)之比与动量散度无关。由(2.2)式可知,达到成像的条件是

$$M_{12} = 0, \quad M_{11} = -\sqrt{\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{011}}} = -\frac{\phi}{\phi_0}, \quad (4.8)$$

“-”表示像与物互倒。利用(4.4)、(4.5)及(4.8)可以解得成像的参数关系为

$$L_2 = \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) L_1, \quad (4.9)$$

$$V = \frac{\left(1 + \frac{\phi}{\phi_0} \right)}{\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)} \left(\frac{\phi_{in}}{\sin \phi_{in}} \right) \left[\frac{m_0 c^2 r^3 \beta^2 \lambda}{2\pi e L_1} \right]. \quad (4.10)$$

这里 ϕ_{in} 可根据初始束团是发散束, 会聚束或是束腰, 分别由公式(3.2), (3.3) 或(3.6)计算, 计算时令 $L = L_1$; 当 $\phi_{in} \leq 45^\circ$ 时, (4.10)可近似为

$$V = \frac{\left(1 + \frac{\phi}{\phi_0}\right) \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^3 \lambda}{2\pi c L_1}\right)}{\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}, \quad (4.11)$$

$|M_{11}|$ 或 $\frac{\phi}{\phi_0}$, 称为像的放大倍数.

II. 纵向成腰 成腰就是要求 $\sigma_{12} = 0$, 设 ϕ 为腰的半相宽, 这时由(2.2)及(2.3)式得

$$M_{11}^2 \sigma_{011} + 2M_{11}M_{12} \sigma_{012} + M_{12}^2 \sigma_{022} = \frac{\phi^2}{Q^2}, \quad (4.12)$$

$$M_{11}M_{21} \sigma_{011} + (1 + 2M_{12}M_{21}) \sigma_{012} + M_{12}M_{22} \sigma_{022} = 0. \quad (4.13)$$

原则上, 在参数 L_1, L_2 和 V 的取值不加限制的情况下, 纵向成腰的解有无限多个. 这里我们只讨论几种特殊解.

1. 像腰重合解

在一般情况下, 像和腰并不重合. 只有在下述特定条件下才重合

$$M_{12} = 0, \quad M_{11} = -\frac{\phi}{\phi_0}, \quad M_{21} = -\frac{\sigma_{012}}{M_{11}\sigma_{011}} \quad (4.14)$$

利用(4.4)–(4.7)和(4.14)可以证明, 只有 $\sigma_{012} < 0$ 时, 亦即初始束团为纵向会聚束时, 才可能得到像腰重合解, 这时系统的参数为

$$L_1 = \frac{r^2 \phi_0^2 \left(1 + \frac{\phi}{\phi_0}\right) \beta \lambda}{2\pi \sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2}}, \quad (4.15)$$

$$L_2 = \frac{r^2 \phi_0 \phi \left(1 + \frac{\phi}{\phi_0}\right) \beta \lambda}{2\pi \sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2}}, \quad (4.16)$$

$$V = \frac{m_0 c^2 \gamma \beta^2}{e \phi_0 \phi} \left(\frac{\phi_{in}}{\sin \phi_{in}}\right) \sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2}. \quad (4.17)$$

式中 ϕ_{in} 由(3.3)式并令 $L = L_1$ 进行计算, L_1 的表示式用(4.15)式. 当 $\phi_{in} \leq 45^\circ$ 时

$$(4.17) \text{ 可近似为: } V = \frac{m_0 c^2 \gamma \beta^2}{e \phi_0 \phi} \sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2}. \quad (4.18)$$

2. 发散束成腰的最简解

当 $L_1 = 0$ 时, 可得到发散束 ($\sigma_{012} > 0$) 成腰的最简解. 这相当于把聚束器或散束器电间隙入口的坐标选为 $Z = 0$. 在此情况下得到

$$L_2 = \frac{\phi}{Q \sigma_0} \sqrt{\phi_0^2 - \phi^2} \left(\frac{r^2 \beta \lambda}{2\pi}\right) \quad (4.19)$$

和
$$V = \left(\frac{Q\epsilon_0\sqrt{\phi_0^2 - \phi^2}}{\phi\phi_0 \sin \phi_0} + \frac{\sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2 - Q^2\epsilon_0^2}}{\phi_0 \sin \phi_0} \right) \left(\frac{m_0 c^2 \gamma \beta^2}{e} \right). \quad (4.20)$$

束团纵向发散度的变化如图 2 所示。

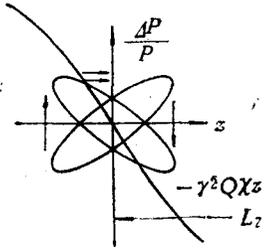


图 2 发散束成腰

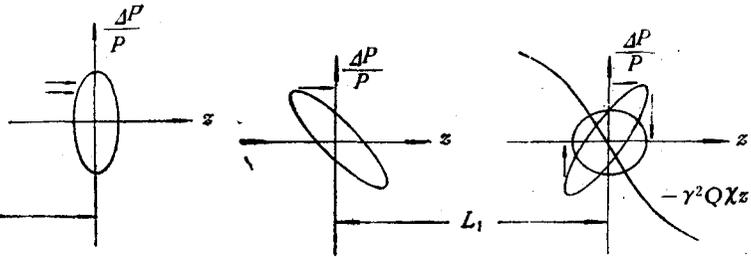


图 3 会聚束成腰

3. 会聚束成腰的最简解

当 $L_2 = 0$ 时, 可得到会聚束 ($\sigma_{012} < 0$) 成腰的最简解。如图 3 所示, 在此情况下, 系统的参数关系为

$$L_1 = \left[\frac{\sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2 - Q^2\epsilon_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}} \pm \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2 - Q^2\epsilon_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}} \right] \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi} \right). \quad (4.21)$$

$$V = \pm \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2 - Q^2\epsilon_0^2}}{\gamma^2 \phi \sin \phi} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e} \right). \quad (4.22)$$

(4.22) 中的“+”号与(4.21)中的“+”号相对应。

III. 腰-腰传输 当 $\sigma_{012} = 0$ 时, 可由方程(4.12)和(4.13)得到纵向腰-腰传输的一般条件

$$\frac{M_{11}}{M_{22}} = \frac{\phi^2}{\phi_0^2}, \quad \frac{M_{12}}{M_{21}} = -\frac{\phi^2}{Q^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2} \quad (4.23)$$

对于单腔传输段, 将(4.4)–(4.7)代入(4.23)式得

$$\frac{1}{\gamma^4 Q X} (L_1 + L_2 - Q X L_1 L_2) = \frac{\phi^2}{Q^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2}, \quad (4.24)$$

$$\frac{1 - Q X L_2}{1 - Q X L_1} = \frac{\phi^2}{\phi_0^2}. \quad (4.25)$$

在 L_1, L_2 和 V 三个参数不加限制的情况下, 腰-腰传输解亦有无无限多组。其中两组最简单的解如下:

1. 腰放大解(如图 4), 即 $\phi > \phi_0$, 有

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{\sqrt{\phi^2 - \phi_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}} \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi}\right), & L_2 &= 0 \\ V &= \frac{\sqrt{\phi^2 - \phi_0^2}}{\gamma^2 \phi \sin \phi} \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

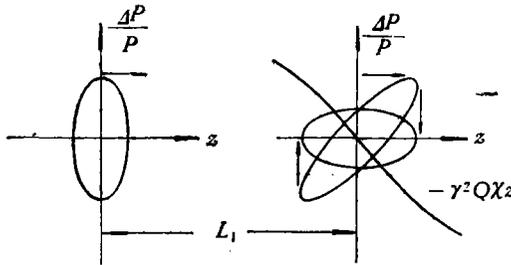


图4 腰放大示意图

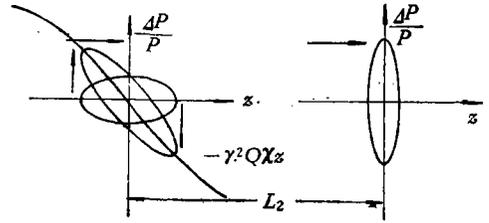


图5 腰缩小示意图

2. 腰缩小解(如图5), 即 $\phi < \phi_0$, 有

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 0, & L_2 &= \frac{\sqrt{\phi_0^2 - \phi^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}} \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi}\right) \\ V &= \frac{\sqrt{\phi_0^2 - \phi^2}}{\phi \sin \phi_0} \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max} \right] \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

五、纵向 π 变换

纵向 π 变换, 就是从单个粒子来看, z 变为 $-z$, $\frac{\Delta P}{P}$ 变为 $-\frac{\Delta P}{P}$, 但从束团整体来看, 发散度旋转 180° 又回到其初始形状. 令 $\sigma_{11} = \sigma_{011}$ 及 $\sigma_{12} = \sigma_{012}$, 就可由(2.2)与(2.3)式得到 π 变换的一般方程

$$(M_{11}^2 - 1)\sigma_{011} + 2M_{11}M_{17}\sigma_{012} + M_{12}^2\sigma_{022} = 0, \quad (5.1)$$

$$M_{11}M_{21}\sigma_{011} + 2M_{12}M_{21}\sigma_{012} + M_{12}M_{22}\sigma_{022} = 0. \quad (5.2)$$

再利用 M 矩阵元的表示式(4.4)–(4.7), 就可以求得纵向 π 变换的几种最简解如下:

I. 发散束 π 变换的最简解:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 0, & L_2 &= \frac{2\sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}} \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi}\right), \\ V &= \frac{2\sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max}^2 - Q^2 \sigma_0^2}}{\gamma^2 \phi_0 \sin \phi_0} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

在此情况下纵向发散度的变换如图6, 点的变换顺序是 $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$.

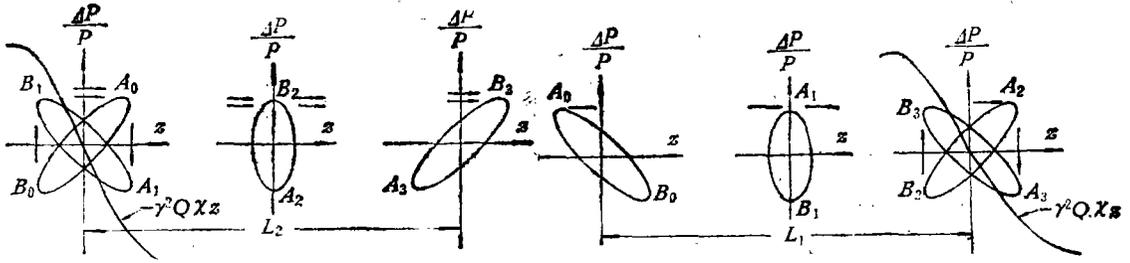


图 6 发散束的最简 π 变换

图 7 会聚束的最简 π 变换

II. 会聚束 π 变换的最简解

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{2\sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2 - Q^2 \sigma_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}} \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi}\right), \quad L_2 = 0 \\ V &= \frac{2\sqrt{\phi_0^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}}^2 - Q^2 \sigma_0^2}}{\gamma^2 \phi_0 \sin \phi_0} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

变换图形如图 7 所示。

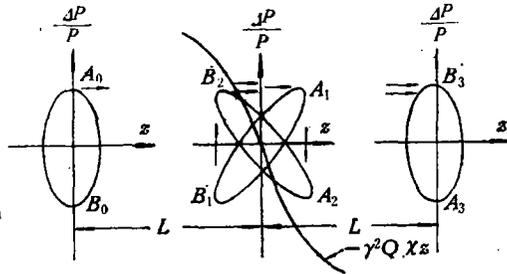


图 8 腰-腰 π 变换

III. 腰-腰 π 变换 当 $\sigma_{012} = 0$ 时，无论从公式(4.23)或是从公式(5.1)(5.2)都可以得到一种腰-腰传输与 π 变换的联合变换，我们称它为腰-腰 π 变换。满足这种变换的参数为

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_2 = L, \\ V &= \frac{2QL \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}} \right]^2}{\phi \sin \phi} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e}\right), \\ \phi &= \sqrt{\phi_0^2 + Q^2 L^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{omax}} \right]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

发散度形状的变换如图 8 所示。

六、发散度的任意旋转与动量散度的调节

在实现发散度的任意旋转和动量散度的调节时，可选择 $L_2 = 0, L_1 = L$ ，这时得到

$$\sigma_{11} = \sigma_{011} + 2 \left(\frac{L}{\gamma^2} \right) \sigma_{012} + \left(\frac{L}{\gamma^2} \right)^2 \sigma_{022}, \quad (6.1)$$

$$\sigma_{12} = -\gamma^2 Q \chi \sigma_{011} + (1 - 2Q\chi L) \sigma_{012} + (1 - Q\chi L) \left(\frac{L}{\gamma^2} \right) \sigma_{022}, \quad (6.2)$$

$$\sigma_{22} = \gamma^4 Q^2 \chi \sigma_{011} - 2\gamma^2 Q \chi (1 - Q\chi L) \sigma_{012} + (1 - Q\chi L)^2 \sigma_{022}. \quad (6.3)$$

无论将(6.1)与(6.2)或是(6.1)与(6.3)联合求解,都可以得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{\gamma^2} &= \frac{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{022} - \epsilon_0^2} - \sigma_{012}}{\sigma_{022}}, \\ V &= \frac{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{022} - \epsilon_0^2} - \sigma_{12}}{\gamma^2 Q \sigma_{11}} \left(\frac{\phi}{\sin \phi} \right) \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

发散度的旋转与动量散度的调节实质上是同一类型的变换,可以分为以下几种情况:

I. 旋转为发散束,亦即要求 $\sigma_{12} > 0$, 在此情况下参数关系为

$$V = \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2} - \sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2}}{\gamma^2 \phi \sin \phi} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e} \right), \quad (6.5)$$

$$L = \begin{cases} \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2} + \sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2} \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi} \right), & \text{当 } \sigma_{012} < 0, \\ \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2} - \sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2} \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi} \right), & \text{当 } \sigma_{012} > 0, \\ \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2}}{\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2} \left(\frac{\gamma^2 \beta \lambda}{2\pi} \right), & \text{当 } \sigma_{012} = 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

II. 旋转为会聚束,亦即要求 $\sigma_{12} < 0$, 这种情况下有

$$V = \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2} + \sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2}}{\gamma^2 \phi \sin \phi} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e} \right), \quad (6.7)$$

参数 L 的表示式与(6.6)式相同.

III. 旋转为束腰,亦即要求 $\sigma_{12} = 0$, 这种情况下有

$$V = \frac{\sqrt{\phi^2 \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}^2 - Q^2 \epsilon_0^2}}{\gamma^2 \phi \sin \phi} \left(\frac{m_0 c^2 \gamma^3 \beta^2}{e} \right), \quad (6.8)$$

参数 L 的表示式仍与(6.6)式相同.

以上三种旋转均可看做将束流的动量散度由 $\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max}$ 调节为 $\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}$. 这种调节

既包括削减,也包括增加,比一般文献中所讨论的动量散度(或能散度)削减有更广泛的意义。

对于动量散度削减,由 σ_{12} 为实数可得到一个关系式:

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\max} \geq \frac{Q\epsilon_0}{\phi}, \quad (6.9)$$

这个关系式表明了可达到的最小动量散度为:

$$\left[\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\max}\right]_{\min} = \frac{Q\epsilon_0}{\phi}. \quad (6.10)$$

当束团的初始状态为束腰时,(6.10)式简化为:

$$\left[\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\max}\right]_{\min} = \frac{\phi_0}{\phi} \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{0\max} \quad (6.11)$$

七、结 束 语

1. 上面所讨论的都是最基本的纵向变换,一切复杂的纵向传输都可由这些基本变换去组合。

2. 对于多间隙腔,假如间隙的数目 n 不大,且 $n\beta\lambda \ll L$, 则仍可将腔看做薄透镜。在此情况下每个间隙上的有效电压为:

$$V_s \doteq \frac{V}{n} \quad (7.1)$$

3. 假如一个系统要求在初始发散度可变的情况下保持匹配,或者满足可变的匹配条件。那么至少需要用两个电压独立可调的单间隙或多间隙腔来构成纵向传输段,这种传输段可分解为两个最基本的发散度旋转变换。亦可以另做直接匹配讨论。

THE LONGITUDINAL TRANSPORT CHARACTERISTICS OF BEAM BUNCH

WEI KAI-YU

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the various longitudinal transport characteristics of the beam bunch are described. For example, the bunching of the spread bunch, the forming of the longitudinal image and waist, the longitudinal waist to waist transfer, the longitudinal π -transition and the modulation of momentum spread, etc., are systematically discussed. The corresponding universal calculation formula are also presented.