

负宇称转动态的相互作用玻色子模型

吴 华 川
(江苏师范学院)

摘 要

本文在 $SU(3)$ 极限为转动限的假定下,讨论了 $N-1$ 个 (sd) 玻色子和 1 个 (pf) 玻色子组成的系统的转动;用群论方法给出负宇称转动谱;导出了 ν_0 带 ($K^\pi = 0^-$) 到基带 E_3 跃迁约化矩阵元的解析表达式;用 $(sd)-(sd)$ 相互作用和 $(sd)-(pf)$ 相互作用强度的不同,定性地解释了正负宇称能带参数的不同。

一、引 言

相互作用玻色子模型的 $SU(3)$ 极限在解释偶偶核的正宇称转动谱方面,取得了成功。负宇称转动谱比正宇称谱复杂。用相互作用玻色子模型讨论负宇称转动谱也有人作了尝试。如 Arima^[1] 考虑了 $N-1$ 个 (sd) 玻色子和一个 f 玻色子组成的系统,通过数值计算,在相互作用强度 Z_2 和玻色子个数 N 趋于无穷大的极限情形下,得到了负宇称转动带。然而,从物理上讲,相互作用强度 Z_2 是不可能趋于无穷的。如何在保持相互作用强度和 N 为有限值的前提下,导出负宇称转动带及其有关性质,这便是本文试图解决的问题。

本文假定,在偶偶核中除 s, d, f 玻色子外,还存在角动量 $L = 1$ 的负宇称玻色子 (p 玻色子),在 $SU(3)$ 限下, p, f 玻色子态组成 $(3, 0)$ 表示。在假定 $SU(3)$ 极限即转动限的基础上,讨论了由 (sd) 玻色子和 (pf) 玻色子组成的系统的转动。用群表示外积约化的方法,方便地得到负宇称转动带,并给出了 ν_0 带 ($K^\pi = 0^-$) 和基带间的 E_3 跃迁约化矩阵元的解析表达式。文中还讨论了正负宇称能带的统一描述问题,用 $(sd)-(sd)$ 相互作用比 $(sd)-(pf)$ 相互作用强的假定,定性地解释了正负宇称能谱参数的不同;在两类相互作用强度相近的情形下,给出了正宇称能带和负宇称 ν_0 带能带参数之间的关系。

二、系统的对称性

为讨论方便,正宇称玻色子记为 $v_{lm}(l = 0, 2)$,负宇称玻色子记为 $w_{lm}(l = 1, 3)$;与

它们有关的量,均以足标 ν, ω 相区别. 于是有

$$\begin{array}{ll} \text{正宇称玻色子算符} & \nu_{1m}^+ \quad \tilde{\nu}_{1m} \\ \text{其中} & \nu_{00}^+ = s^+ \quad \tilde{\nu}_{00} = \bar{s} \\ & \nu_{2m}^+ = d_m^+ \quad \tilde{\nu}_{2m} = \bar{d}_m \\ \text{负宇称玻色子算符} & \omega_{1m}^+ \quad \tilde{\omega}_{1m} \\ & \omega_{1m}^+ = p_m^+ \quad \tilde{\omega}_{1m} = \bar{p}_m \\ & \omega_{3m}^+ = f_m^+ \quad \tilde{\omega}_{3m} = \bar{f}_m \end{array}$$

当未发生正负宇称态间的跃迁时, ν, ω 玻色子分别处于各自的子空间 $\Gamma_\nu, \Gamma_\omega$ 内. 如果 ν, ω 玻色子之间无相互作用, 则系统具有 $SU(6) \times SU(10)$ 对称性. 实际上, ν, ω 玻色子与核子对对应, 它们之间必存在相互作用 (ν - ω 相互作用). 考虑了 ν - ω 相互作用后, $SU(6) \times SU(10)$ 对称性不复存在, 而只可能存在某种子群的对称性.

先讨论 ν 玻色子和 ν 玻色子相互作用 (ν - ν 相互作用) 强度与 ν - ω 相互作用强度相同的情形. 在转动限下, 系统具有 $SU(3)$ 对称性, 其 Hamiltonian 可写为

$$H = -k\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} - k'\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_\nu + \mathbf{Q}_\omega \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}_\nu + \mathbf{L}_\omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

这里, $\mathbf{Q}_\nu, \mathbf{Q}_\omega, \mathbf{Q}; \mathbf{L}_\nu, \mathbf{L}_\omega, \mathbf{L}$ 分别为子空间 $\Gamma_\nu, \Gamma_\omega$ 和耦合空间 Γ 中的四极矩算符和角动量算符. 在 $SU(3)$ 群下, ν_{1m}^+ 组成 $(2, 0)$ 表示; ω_{1m}^+ 组成 $(3, 0)$ 表示. 子空间的 $SU(3)$ 生成元由下式给出

$$\begin{aligned} x(11)LM &= B \sum_{L_1 M_1}^{L_2 M_2} T(\lambda_0) L_1 M_1 T(0\lambda) L_2 M_2 \\ &\cdot \langle (\lambda_0) L_1 (0\lambda) L_2 || (11) L \rangle \langle L_1 M_1 L_2 M_2 | LM \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$T(20) L_1 M_1 \text{ 为 } \nu_{L_1 M_1}^+; \quad T(02) L_2 M_2 \text{ 为 } \tilde{\nu}_{L_2 M_2}$$

$$T(30) L_1 M_1 \text{ 为 } \omega_{L_1 M_1}^+; \quad T(03) L_2 M_2 \text{ 为 } \tilde{\omega}_{L_2 M_2}$$

$\langle (\lambda_0) L_1 (0\lambda) L_2 || (11) L \rangle$ 为 $SU(3)$ 群表示偶合系数的标量因子;

$\langle L_1 M_1 L_2 M_2 | LM \rangle$ 为 C. G. 系数; B 为常数.

令 $\lambda = 2$ 或 3 , 分别得到子空间 Γ_ν 或 Γ_ω 中的算符:

$$\lambda = 2 \quad \mathbf{Q}_{\nu M} = x(11)2M \quad \mathbf{L}_{\nu M} = x(11)1M$$

$$\lambda = 3 \quad \mathbf{Q}_{\omega M} = x(11)2M \quad \mathbf{L}_{\omega M} = x(11)1M$$

三、本征态和能谱

1. ν, ω 玻色子数分别守恒

不难证明, (2.1) 式所给出的 Hamiltonian 保证了 ν, ω 玻色子数 N_ν, N_ω 分别守恒. 为此, 只须考察 ω 玻色子粒子数算符 n_ω 与 H 之对易关系. n_ω 与 H 之展开式分别为

$$n_w = \sum_{l,m} (-)^m \omega_{lm}^+ \tilde{\omega}_{l-m}$$

$$H = -k(Q_\nu \cdot Q_\nu + Q_w \cdot Q_w) - k'(L_\nu \cdot L_\nu + L_w \cdot L_w) - 2kQ_\nu \cdot Q_w - 2k'L_\nu \cdot L_w \quad (3.1)$$

显然, n_w 与子空间 Γ_ν 内的一切算符对易, 故只须讨论 n_w 与 L_w, Q_w 之对易关系. 由 (2.3) 式, L_w 与 Q_w 均可用下述一般形式表示

$$x_w = \sum_{\substack{l_1 m_1 \\ l_2 m_2}} a_{l_1 m_1 l_2 m_2} \omega_{l_1 m_1}^+ \tilde{\omega}_{l_2 m_2} \quad (3.2)$$

式中, $a_{l_1 m_1 l_2 m_2}$ 为数字系数. 由 (3.1) 式中 n_w 的表达式及 (3.2) 式, 显然有

$$[n_w, x_w] = 0$$

于是可得

$$[n_w, H] = 0 \text{ 和 } [n_\nu, H] = 0 \quad (3.3)$$

即 ν, w 玻色子数分别守恒.

2. 本征态

ν, w 玻色子数 N_ν, N_w 在能量本征态中均为好量子数, 故系统本征态的波函数一般地为 $|N_\nu\rangle|N_w\rangle$ 型直积的线性组合. 其中

$|N_\nu\rangle$ 为 Γ_ν 中用群链 $SU(6) \supset SU(3) \supset 0^+(3) \supset 0^+(2)$ 所标记的态;

$|N_w\rangle$ 为 Γ_w 中用群链 $SU(10) \supset SU(3) \supset 0^+(3) \supset 0^+(2)$ 所标记的态.

当 $N_w = 0$ 时, 系统的态由群链 $SU(6) \supset SU(3) \supset 0^+(3) \supset 0^+(2)$ 所标记, 宇称为正;

$N_w = 1$ 时, 负宇称态;

$N_w = 2$ 时, 正宇称态;

.....

$N_w = N$ 时, 系统的态由群链 $SU(10) \supset SU(3) \supset 0^+(3) \supset 0^+(2)$ 所标记, 宇称由 N 确定.

N_w 的每一种取值, 对应着一套能谱, 负宇称能谱与 $N_w = 1, 3, 5, \dots$ 对应. 考察偶偶核能谱, 能量最低的负宇称态 1^- 均比基态 0^+ 的能量高, 这说明 w 玻色子能量比 ν 玻色子高. 所以, 在 $N_w + N_\nu$ 不变的前提下, N_w 越小, 系统能量就越低, 因而 $N_w = 1$ 与带首能量最低的一套负宇称能带对应. 在 $N_w = 1$ 情形下, 系统本征态波函数为 $|N_\nu = N - 1\rangle|N_w = 1\rangle$ 型直积的线性组合.

取各子空间中 $SU(3)$ 表示作为基,

在 Γ_ν 中, $|N_\nu = N - 1\rangle$ 对应着下列 $SU(3)$ 表示, $(2N - 2, 0), (2N - 6, 2), (2N - 10, 4), \dots$

在 Γ_w 中, $|N_w = 1\rangle$ 对着下面的 $SU(3)$ 表示 $(3, 0)$

系统的本征态所对应的 $SU(3)$ 表示, 可以通过将子空间基的偶合——群表示外积约化得到:

$$(2N - 2, 0) \otimes (3, 0) = (2N + 1, 0) \oplus (2N - 1, 1) \oplus (2N - 3, 2) \oplus (2N - 5, 3);$$

$$(2N - 6, 2) \otimes (3, 0) = (2N - 3, 2) \oplus (2N - 5, 3) \oplus (2N - 7, 4) \oplus (2N - 9, 5);$$

$$(2N - 10, 4) \otimes (3, 0) = (2N - 7, 4) \oplus (2N - 9, 5) \oplus (2N - 11, 6) \oplus (2N - 13, 7);$$

所以,系统本征态对应的 $SU(3)$ 表示为

$$(2N+1, 0), (2N-1, 1), (2N-3, 2)^2, (2N-5, 3)^2, (2N-7, 4)^2 \\ (2N-9, 5)^2, (2N-11, 6), (2N-13, 7), \dots$$

(圆括号右上角数字表明该表示重复次数)

以上所列 $SU(3)$ 表示可统一写成

$$(\lambda, \mu) = (2N+1-2I, I) \quad I = 0, 1, 2, \dots, 7 \quad (3.4)$$

头两个 $SU(3)$ 表示所对应的态,其波函数为

$$|(\lambda, \mu)LM\rangle = \sum_{\substack{l_1 m_1 \\ l_2 m_2}} \langle (2N-2, 0)l_1(3, 0)l_2 || (\lambda, \mu)L \rangle \\ \cdot \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | LM \rangle | [N-1](2N-2, 0)l_1 m_1 \rangle | [1](3, 0)l_2 m_2 \rangle \quad (3.5)$$

其中 (λ, μ) 为 $(2N+1, 0)$ 或 $(2N-1, 1)$; 在这两种情形下,量子数 l 或 K 均可略去.

3. 能谱

由于 ω 玻色子能量较高,故在(2.1)中应当引入与之相应的补偿项,于是有

$$H = -\kappa \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} - \kappa' \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + N_\omega \varepsilon \quad (2.1a)$$

H 在偶合的 $SU(3)$ 表象中是对角的. 负宇称态能量本征值为

$$E_- = AL(L+1) - BC(\lambda, \mu) + \varepsilon \quad (3.6)$$

其中,

$$A = \frac{3}{4} \kappa - \kappa', \quad B = \kappa; \quad C(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu).$$

由(3.4)式有

$$C(\lambda, \mu) = (2N+1-2I)^2 + I^2 + (2N+1-2I) \cdot I + 3(2N+1-I) \\ = -6(N+1)I \left(1 - \frac{I}{2N+2} \right) + (2N+1)(2N+4) \quad (3.7)$$

代入(3.6)中得

$$E_- = AL(L+1) + \alpha I \left(1 - \frac{I}{2N+2} \right) + \varepsilon' \quad (3.8)$$

其中

$$\alpha = 6(N+1)B, \quad \varepsilon' = \varepsilon - (2N+1)(2N+4)B.$$

转动区中,对于我们所感兴趣的带首较低的能带,总有

$$I \ll 2N+2$$

所以可得

$$E_- \approx AL(L+1) + \alpha I + \varepsilon' \quad (3.8a)$$

Arima^[1] 给出的相应表达式为

$$E = \kappa L(L+1) + \alpha_f K_f^2 + \beta_f$$

两式相似, I 与 K_f 对应; 两者的差别仅在于带首能量随 I 或 K_f 变化的速率不同. 按(3.8a)作出的负宇称能谱见图1. 这里,取 $N=6$. 应当指出, I 与每个 $SU(3)$ 表示所

包括的能带中 K 之极大值相当。

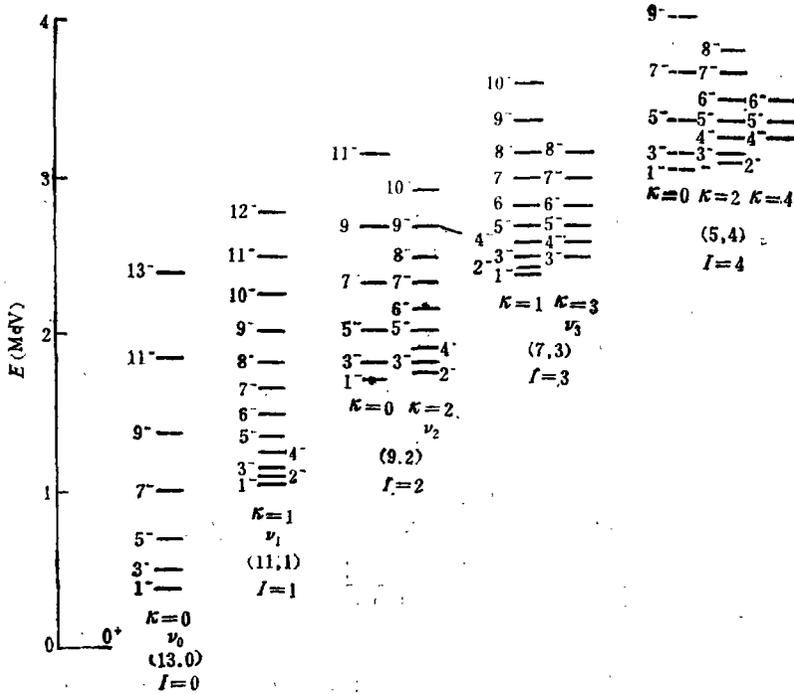


图 1 负宇称转动能谱

图中, ν_0, ν_1, ν_2 和 ν_3 带与 Arima^[3] 和 Bohr^[2] 给出的 $K^\pi = 0^-, 1^-, 2^-, 3^-$ 的八极带相对应。从目前已有的实验数据看, 转动区中相当多的核有 ν_0 带; 而确定有 ν_1 带的核只有 ^{240}Pu ^[3]、 ^{238}Pu ^[4]、 ^{230}Th ^[5]、 ^{152}Sm ^[2]。带首更高的带无明显规律, 因而无从比较这几种理论与实验符合程度的好坏。但是, 与其他两种理论相比, 本文所用的外积约化方法是相当简便的。

鉴于 $N_w = 1$ 的情形所给出的负宇称带已足够丰富, 因而没有必要讨论能量更高的 $N_w = 3, 5, \dots$ 的情形。

四、正宇称态与负宇称态之间的跃迁

正负宇称态之间的跃迁, 主要为 $E3, E1$ 跃迁。 $E3$ 算符的一般形式为

$$T_k^{(E3)} = a_{30}(f^+ \tilde{s} + s^+ \tilde{f})_k^{(3)} + a_{32}(f^+ \tilde{d} + d^+ \tilde{f})_k^{(3)} + a_{12}(p^+ \tilde{d} + d^+ \tilde{p})_k^{(3)} \quad (4.1)$$

由(3.5)式所给的 ν_0 带和 ν_1 带的波函数, 可方便地得到这两个带到基带的 $E3$ 跃迁约化矩阵元的解析表达式。我们对 ν_0 带和基带间 $E3$ 跃迁 ($L+3 \rightarrow L$) 进行了计算:

基带波函数为

$$|\phi_+(LM)\rangle = |[N](2N, 0)LM\rangle |0\rangle \quad (4.2a)$$

ν_0 带波函数为

$$|\phi_-(L+3, M)\rangle = \sum_{\substack{l_1 m_1 \\ lm}} \langle (2N-2, 0)l_1(30)l | \langle (2N+1, 0)L+3 \rangle \\ \cdot \langle l_1 m_1 | m | L+30 \rangle | [N-1](2N-2, 0)l_1 m_1 \rangle | [1](3, 0)lm \rangle \quad (4.2b)$$

约化矩阵元

$$\langle \phi_+(L) || T^{(E3)} || \phi_-(L+3) \rangle = \left\{ -\frac{2N+L+1}{2\sqrt{30}} a_{30} + \frac{8N+L-8}{60} a_{32} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}(2N-L-2)}{10\sqrt{2}} a_n \right\} \cdot \frac{1}{2N-1} \\ \cdot \left[\frac{(2N+L+3)(2N+L+5)(2N-L)(L+1)(L+2)(L+3)}{N(2N+1)(2L+3)(2L+5)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

当 $L=0$ 时,即为实验上颇具意义的 $3^- \rightarrow 0^+$ 跃迁,此时约化矩阵元简化为

$$\langle \phi_+(0) || T^{(E3)} || \phi_-(3) \rangle \\ = \left\{ -\frac{2N+1}{2\sqrt{30}} a_{30} + \frac{2N-2}{15} a_{32} + \frac{\sqrt{3}(2N-2)}{10\sqrt{2}} a_{12} \right\} \\ \cdot \frac{2}{2N-1} \cdot \left[\frac{(2N+3)(2N+5)}{5(2N+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3a)$$

$E1$ 算符的一般形式为

$$T_k^{(E1)} = b_{32}(f^+\vec{d} + d^+\vec{f})_k^{(1)} + b_{10}(p^+\vec{s} + s^+\vec{p})_k^{(1)} + b_{12}(p^+\vec{d} + d^+\vec{p})_k^{(1)} \quad (4.4)$$

用(4.2a),(4.2b)的波函数,亦可进行 $T^{(E1)}$ 约化矩阵元的计算.

五、正、负宇称态能谱的统一描述

从(2.1a)式所给的 Hamiltonian 出发,在 $N_w = 0$ 或 1 时分别得到了正、负宇称带的能量公式

$$E_+ = AL(L+1) - BC(\lambda, \mu) \\ E_- = AL(L+1) - BC(\lambda, \mu) + \epsilon$$

这里,正宇称能带参数 A, B 与负宇称能带的相应参数完全相同.显然,这与实验数据不符.

为解释正、负宇称带参数的差异,假定 $\nu-\nu$ 相互作用与 $\nu-w$ 相互作用强度不同.于是 Hamiltonian 可给出为

$$H = -k(Q_\nu + \eta Q_w) \cdot (Q_\nu + \eta Q_w) \\ - k'(L_\nu + \eta' L_w) \cdot (L_\nu + \eta' L_w) + N_w \epsilon \quad (5.1)$$

其中 η 和 η' 为常数,随核而异.经改写,上式化为

$$H = -k\eta Q \cdot Q - k'\eta' L \cdot L \\ - k(1-\eta)Q_\nu \cdot Q_\nu + k\eta(1-\eta)Q_w \cdot Q_w \\ - k'(1-\eta')L_\nu \cdot L_\nu + k'\eta'(1-\eta')L_w \cdot L_w + N_w \epsilon \quad (5.1a)$$

式中,前两项在 $SU(3)$ 表象中是对角的.第3—6项破坏了系统的 $SU(3)$ 对称性.

但当 η 与 1 的差别较小时, 该四项可作微扰处理. 将 (5.1a) 式改写为

$$\begin{aligned}
 H = & \left(\frac{3}{4} k\eta - k'\eta' \right) L \cdot L + \left[\frac{3}{4} k(1-\eta) - k'(1-\eta') \right] L_v \cdot L_v \\
 & - \left[\frac{3}{4} k\eta(1-\eta) - k'\eta'(1-\eta') \right] L_w \cdot L_w \\
 & + [-k\eta C - k(1-\eta)C_v + k\eta(1-\eta)C_w + N_w \varepsilon] \quad (5.1b)
 \end{aligned}$$

其中 C_v 、 C_w 和 C 分别为子空间 Γ_v 、 Γ_w 和偶合空间 Γ 中的 Casimir 算符. 我们仅限于讨论 ν_0 、 ν_1 带, 将 (3.5) 式所给波函数作为零级波函数. 在由这些波函数构成的基上, C_v 、 C_w 、 C 均为对角的. 当 $\eta = \eta'$ 时, 可得包括一级微扰修正在内的能量本征值为

$$E_- = \eta AL(L+1) + E' - k\eta C(\lambda, \mu) + E_0 \quad (5.2)$$

其中,

$$E_0 = -k(1-\eta)C(2N-2, 0) + k\eta(1-\eta)C(3, 0) + \varepsilon$$

系与 λ 、 μ 及 L 无关的常数;

$$\begin{aligned}
 E' = & \langle (\lambda, \mu) LM | (1-\eta)AL_v \cdot L_v - \eta(1-\eta)AL_w \cdot L_w | (\lambda, \mu) LM \rangle \\
 = & \sum_{l_1 l_2} | \langle (2N-2, 0) l_1(3, 0) l_2 | (\lambda, \mu) L \rangle |^2 \{ (1-\eta)Al_1(l_1+1) \\
 & - \eta(1-\eta)l_2(l_2+1) \}
 \end{aligned}$$

对 ν_0 带可算得

$$E' \approx (1-\eta) \left(1 - \frac{6}{2N+1} \right) AL(L+1) + 6(1-\eta)^2 A$$

由此得 ν_0 带能量公式

$$E_- = A_- L(L+1) - k\eta C(2N+1, 0) + E'_0 \quad (5.3)$$

其中

$$A_- = \left[1 - (1-\eta) \frac{6}{2N+1} \right] A$$

$$E'_0 = E_0 - 6(1-\eta)^2 A$$

显然, 令 $N_w = 0$, 可由 (5.1) 所给 Hamiltonian 得出正宇称能带能量公式

$$E_+ = A_+ L(L+1) - B_+ C(\lambda, \mu)$$

其中

$$A_+ = A, \quad B_+ = B$$

于是, 在微扰论适用的前提下, 对正宇称带和负宇称的 ν_0 带, 求得相应参数比值如下:

$$r_A = \frac{A_-}{A_+} = 1 - (1-\eta) \frac{6}{2N+1} \quad (5.4)$$

考察文献 [6] 中属于转动区的所有具有 ν_0 带的核 (共 21 个) 的基带和 ν_0 带的实验数据, 发现

在转动区 I ($A: 150 \sim 190$) 中

$$r_{A(\text{实验})} < 0.81 \quad (\text{唯一的例外是 } ^{158}\text{Gd}, r_{A(\text{实验})} = 1.05)$$

在转动区 II ($A > 220$) 中

$$0.65 < r_{A(\text{实验})} < 0.87$$

考虑到(5.4)式,上述数据表明 $\eta < 1$, 即 ν - ν 相互作用比 ν - ν 相互作用弱。但是,用(5.4)式,很难用近于1的 η 值拟合 r_A 的实验数据,这是因为(5.4)式是从微扰论导出的。当 η 比1小很多时,微扰论不适用,要通过将 H 对角化来计算能带参数。

作者对周孝谦教授的指导和有益的建议表示感谢。

参 考 文 献

- [1] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys.*, **111** (1978), 201.
- [2] A. Bohr and B. R. Mottelson, "Nuclear Structure", Vol. 2, W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1975.
- [3] M. B. Schmorak, *Nucl. Data sheets*, **20**(1977), 165.
- [4] Y. A. Ellis, *Nucl. Data sheets*, **21** (1977), 549.
- [5] Y. A. Ellis, *Nucl. Data sheets*, **20** (1977), 139.
- [6] M. Sakai, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **15** (1975), 513.

INTERACTING BOSON MODEL FOR ROTATIONAL STATES OF NEGATIVE PARITY

WU HUA-CHUAN

(Jiangsu Teachers College)

ABSTRACT

In this paper, rotation of the system consisting of $N-1$ (sd) bosons and one (pf) boson is discussed on the assumption that the $SU(3)$ limit is just the rotational limit. Using group-theoretical methods, we have given rotational spectra of negative parity, and have derived the analytic expressions of the reduced matrix elements of the $E3$ transition from the ν_0 -band ($K^\pi=0^-$) to the ground band. In terms of the inequality of the intensities of (sd)-(sd) interaction and (sd)-(pf) interaction, the difference between the parameters of positive-parity bands and those of negative-parity bands are explained qualitatively.