第7卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 7, No. 4
1983年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1983

d-玻色子体系波函数的 $SU_2 \otimes SU_2$ 基、物理基与无迹玻色子算符(III)

杨泽森
(北京大学物理系)

摘要

本文把前文(I)及(II)发展的方法和获得的结果应用于原子核的相互作用玻色子模型(IBM). 我们采用 $SU_6 \supset U_5 \supset O_5 \supset O_3$ 表象,把求IBM哈密顿量矩阵元的问题归结为求 d 玻色子的一些基本矩阵元,并针对 d 玻色子体系的现有几类物理基建立了两种求基本矩阵元的方法,求出了相应的明显表达式.

一、引言

唯象IBM哈密顿量 H_{IBM} 是由 s、d 玻色子的 SU_6 无穷小算子构成的,它可以写成这个 SU_6 群三种含有 O_3 的群链中各子群的不变量之和. 这三种群链对应着求解 H_{IBM} 本征方程的三种自然表象. 除了极限情形之外,无论选取其中哪一种表象,都需要建立有关基矢的表示和运用的完善方法. 基于现有的工具以及前文(I)、(II)中发展的方法和获得的结果[1,2],本文将用 $SU_6 \supset U_5 \supset O_5 \supset O_3$ 表象(简称 U_5 表象),把 H_{IBM} 的矩阵元表示为明显公式.

U_5 表象的基矢是 s 玻色子部分与 d 玻色子部分的积. 第一部分比较简单,也不携带角动量,第二部分就是按 $U_5 \supset O_5 \supset O_3$ 链构成的"物理"基矢. 我们用 $|np\alpha LM\rangle$ 代表 d 玻色子的正交归一的物理基矢,其中 n 为 d 玻色子总数,p 为未配对的玻色子数,LM 代表通常的角动量及投影,α 是流动指标. 现有的用明显公式表达的物理基矢不是正交归一的,流动指标不是正交指标[3-5],为了标明这样的基矢,我们把它们的流动指标写在圆括号内. 按照前文(I)及(II),$n=p$ 的正交或非正交物理基矢将称为基本的,并简记为 $|ppO_3\rangle$. 在正交的 U_5 表象中,H_{IBM} 的 $\Delta n=0$ 部分是完全对角的,本征值与流动指标无关. $\Delta n=\pm 2$ 的非零矩阵元也与流动指标无关,而且非常简单. 需要特别处理的只有 $\Delta n=\pm 1$ 的矩阵元,我们将把求这种矩阵元的问题归结为求 d 玻色子的只涉及 $|ppO_3\rangle$ 基矢的一些"基本"矩阵元(见第二节). 至于这些基本矩阵元,本文将提两种处理方法. 第一种方法是针对(II)中所说的第一类 $|ppO_3\rangle$ 基矢建立的,实质之点是证明,这时的基本矩阵元可归结为内积 $\langle pp(x)LL|pp\alpha LL\rangle$. 这种内积的表达式可借助适当的中间表象求

本文1982年3月18日收到.

出．第二种方法是借助特定的中间表象作变换而求出所需要的基本矩阵元．在这两种方法中都可考虑用 (n_μ) 表象或 $SU_2\otimes SU_2$ 表象作为中间表象，但 (n_μ) 表象的基矢（由五种 d 玻色子的数目 $n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2$ 描写）只保存着物理基中的两个量子数，即 $n=\sum_\mu n_\mu$ 及 $M=\sum_\mu \mu n_\mu$，而 L 及 p 都被破坏了．$SU_2\otimes SU_2$ 表象是按照群链 $U_5\supset O_5\supset SU_2\otimes SU_2$ 建立的[4]，其基矢具有物理基的三个量子数 npM，因而有明显的优点．而且，我们已在[1,2]中针对现有的三类 $|ppO_3\rangle$ 基矢[3,5,6]求出了内积 $\langle ppSU_2\otimes SU_2|ppO_3\rangle$ 的明显公式，所以对于本文的两种方法来说，都宜于用 $SU_2\otimes SU_2$ 表象作为中间表象（$|ppSU_2\otimes SU_2\rangle$ 是 $n=p$ 的 $SU_2\otimes SU_2$ 基矢）．

二、IBM 哈密顿量在 U_5 表象的矩阵和基本矩阵元

包含 s 玻色子及 d 玻色子单体和两体项的 IBM 哈密顿量的普遍形式如下：

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{IBM}} = {} & \epsilon_s s^+s + \epsilon_d\hat{n} + \frac{1}{2}v_1\{s^+s^+(\tilde{d}\tilde{d})_0 + (d^+d^+)_0 ss\} \\
& + v_2\sqrt{\frac{5}{2}}\{s^+[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0 + [(d^+d^+)_2\tilde{d}]_0 s\} \\
& + \frac{1}{2}v_3 s^+s^+ss + v_4 s^+s\hat{n} \\
& + \frac{1}{2}\sum_l C_l\sqrt{2l+1}[(d^+d^+)_l(\tilde{d}\tilde{d})_l]_0.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中 s^+、d_μ^+、s、d_ν 是 s 玻色子的产生、湮灭算符，遵守如下的对易关系：

$$[s,\ s^+]=1, \tag{2.2}$$

$$[d_\mu,\ d_\nu^+]=\delta_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

$$[d_\mu,\ d_\nu]=0, \tag{2.4}$$

$$[d_\mu,\ s]=[d_\mu,\ s^+]=0. \tag{2.5}$$

$\hat{n}$ 是 d 玻色子数算符，$\tilde{d}_\mu$ 是 d_μ 的时间反演：

$$\hat{n}=\sum_\mu d_\mu^+ d_\mu, \tag{2.6}$$

$$\tilde{d}_\mu=(-1)^\mu d_{-\mu}. \tag{2.7}$$

(2.1) 式含有 9 个参量，其中 ϵ_s、ϵ_d 分别为 s 及 d 玻色子的能量，v_1—v_4 及 C_l 是相互作用参量．要记住，s 玻色子及 d 玻色子的自旋宇称分别为 0^+ 及 2^+．

由于总玻色子数和总角动量是守恒的，只需要在确定的总玻色数 N 和角动量 LM 下求 H_{IBM} 的矩阵．U_5 表象的基矢如下：

$$|N-n,\ np\alpha LM\rangle=\frac{1}{\sqrt{(N-n)!}}(s^+)^{N-n}|np\alpha LM\rangle. \tag{2.8}$$

$$(n=0,1,2,\cdots,N.)$$

其中 n 为 d 玻色子的数目，因此 $(N-n)$ 就是 s 玻色子的数目，p 为未配对的 d 玻色子数，α 为流动指标．$|np\alpha LM\rangle$ 即是 d 玻色子的物理基矢，这里假定它们已经正交归一：

$$\langle np\alpha LM\,|\,np\alpha' LM\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}. \tag{2.9}$$

基矢 $|np\alpha LM\rangle$ 可借助基本基矢 $|pp\alpha LM\rangle$ 以及配对算符表示为:

$$|np\alpha LM\rangle = [\sqrt{5}\,(d^+d^+)_0]^{\frac{n-p}{2}}\,|pp\alpha LM\rangle\sqrt{\frac{\left(\frac{n+p}{2}+1\right)!\,(2p+3)!}{\left(\frac{n-p}{2}\right)!\,(n+p+3)!\,(p+1)!}}. \tag{2.10}$$

$H_{\rm IBM}$ 的矩阵元可按 n 的选择定则分成 5 类(其他为 0):

$$n'=n:\quad \langle N-n, np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n, np'\alpha' LL\rangle\delta_{pp'}\delta_{\alpha\alpha'}, \tag{2.11}$$

$$n'=n+2:\quad \langle N-n, np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n-2, n+2, p'\alpha' LL\rangle\delta_{pp'}\delta_{\alpha\alpha'}, \tag{2.12}$$

$$n'=n+1:\quad \langle N-n, np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n-1, n+1, p'\alpha' LL\rangle, \tag{2.13}$$

$$n'=n-1:\quad \langle N-n, np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n+1, n-1, p'\alpha' LL\rangle, \tag{2.14}$$

$$n'=n-2:\quad \langle N-n, np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n+2, n-2, p'\alpha' LL\rangle\delta_{pp'}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{2.15}$$

(2.14)及(2.15)可由(2.12)及(2.13)作简单的替换而得出,因此只要求出(2.11)—(2.13)就够了. 如果对基矢(2.8)编序时保证 n 值不下降,则可用(2.11)—(2.13)确定 $H_{\rm IBM}$ 的矩阵的上三角部分,然后根据对称性质找出下三角部分. $H_{\rm IBM}$ 中 $\Delta n=0$ 的项在正交的 U_5 表象中是对角化的,其本征值就是(2.11)中的平均值,结果为

$$\begin{aligned}
&\langle N-n,\ np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n,\ np\alpha LL\rangle\\
&\quad=\epsilon_s(N-n)+\epsilon_d n+\frac{1}{2}v_3(N-n)(N-n-1)\\
&\qquad+v_4 n(N-n)+\frac{1}{10}C_0(n-p)(n+p+3)\\
&\qquad+\frac{1}{7}C_2\left\{n(n-2)+p(p+3)-\frac{1}{2}L(L+1)\right\}\\
&\qquad+\frac{4}{7}C_4\left\{\frac{9}{5}n(n-2)-\frac{3}{10}p(p+3)+\frac{1}{2}L(L+1)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.12)只涉及 $H_{\rm IBM}$ 中的 v_1 项,结果也很简单:

$$\begin{aligned}
&\langle N-n,\ np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n-2, n+2,\ p\alpha LL\rangle\\
&\quad=\frac{v_1}{\sqrt{20}}\sqrt{(N-n)(N-n-1)(n+2-p)(n+p+5)}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.13)只涉及 $H_{\rm IBM}$ 中的 v_2 项, 可以写成:

$$\begin{aligned}
&\langle N-n,\ np\alpha LL|H_{\rm IBM}|N-n-1, n+1,\ p'\alpha' LL\rangle\\
&\quad=v_2\sqrt{5(N-n)/2}\,\langle np\alpha LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|n+1, p'\alpha' LL\rangle.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

最后的因子可利用(2.10)改写如下:

$$\begin{aligned}
&\langle np\alpha LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|n+1,\ p'\alpha' LL\rangle\\
&=\delta_{p+3,p'}\langle pp\alpha LL|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+3,\ p+3,\ \alpha' LL\rangle\sqrt{\frac{(n-p)(n+p+5)(n+p+7)}{(2p+5)(2p+7)(2p+9)}}\\
&\quad+\delta_{p+1,p'}\langle pp\alpha LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+1, p+1, \alpha' LL\rangle\frac{(3n-p+7)}{(2p+7)}\sqrt{\frac{(n+p+5)}{(2p+5)}}
\end{aligned}$$

$$+\delta_{p-1,p'}\langle pp\alpha LL|[(d^+d^+)_2\tilde{d}]_0|p-1,p-1,\alpha'LL\rangle\frac{(3n+p+10)}{(2p+5)}\sqrt{\frac{(n-p+2)}{(2p+3)}}$$
$$+\delta_{p-3,p'}\langle pp\alpha LL|[(d^+d^+)_2d^+]_0|p-3,p-3,\alpha'LL\rangle$$
$$\sqrt{\frac{(n+p+3)(n-p+2)(n-p+4)}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)}}. \tag{2.19}$$

基于以上(2.11)—(2.19)式，求 H_{IBM} 在 U_5 表象的矩阵问题归结为求下列基本矩阵元:

$$\langle pp\alpha LL|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+3,p+3,\alpha'LL\rangle,\langle pp\alpha LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+1,p+1,\alpha'LL\rangle, \tag{2.20}$$
$$\langle pp\alpha LL|[(d^+d^+)_2d^+]_0|p-3,p-3,\alpha'LL\rangle,\langle pp\alpha LL|[(d^+d^+)_2\tilde{d}]_0|p-1,p-1,\alpha'LL\rangle. \tag{2.20'}$$

(2.20′)中的矩阵元可由(2.20)作简单的替换而得出，因此只要求出(2.20)中两类矩阵元的表达式就够了.

三、在第一类物理基中的基本矩阵元

本节的内容是针对 Chacón 等人在[3]中引进的 $|ppO_3\rangle$ 基矢，借助我们在前文(II)中为它建立的工具[2]，求出(2.20)中的基本矩阵元的表达式. 在(II)中称这种基矢为第一类 $|ppO_3\rangle$ 基矢，并写成:

$$|pp(x)LL\rangle=[(a^+a^+)_2a^+]_0^x(a_2^+)^{\beta_1}(a^+a^+)_{22}^{\beta_2}[(a^+a^+)_2a^+]_{33}^{\beta_3}|0\rangle F(p,x,L), \tag{3.1}$$

$$F(p,x,L)=\left(\sqrt{\frac{35}{18}}\right)^x\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^{\beta_2}\left(-\sqrt{\frac{14}{3}}\right)^{\beta_3}\Big/\sqrt{\left(x+\frac{L+\beta_3}{2}\right)!}. \tag{3.2}$$

其中，$x\beta_1\beta_2\beta_3$ 都是非负整数，x 是流动指标，$\beta_1\beta_2\beta_3$ 按下列条件决定:

$$\beta_3=\frac{1}{2}\{1-(-1)^L\}, \tag{3.3}$$

$$3x+\beta_1+2\beta_2+3\beta_3=p, \tag{3.4}$$

$$2\beta_1+2\beta_2+3\beta_3=L. \tag{3.5}$$

a_μ^+ 是相应于 d_μ^+ 的无迹玻色子算符:

$$a_\mu^+=d_\mu^+-\sqrt{5}\,(d^+d^+)_0\frac{1}{2\hat{n}+5}\tilde{d}_\mu. \tag{3.6}$$

正交归一的基本基矢 $|pp\alpha LL\rangle$ 可表示为:

$$|pp\alpha LL\rangle=\sum_x|pp(x)LL\rangle W_{x\alpha}^{pL}, \tag{3.7}$$

这里认为 $W_{x\alpha}^{pL}$ 是已知的. 下面我们首先研究(2.20)中的如下成分:

$$\langle pp(x)LL|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+3,p+3,\alpha'LL\rangle, \tag{3.8}$$
$$\langle pp(x)LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+1,p+1,\alpha'LL\rangle. \tag{3.9}$$

当 d_μ^+ 向左或 d_μ 向右作用于无配对玻色子的态矢量时，不会引起配对，所以在(3.8)及(3.9)中，可以把 $[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0$ 及 $[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0$ 的每一个玻色子算符换成相应的无迹算符. 现在选取下面的形式:

$$\langle pp(x)LL|[\hat{d}(\hat{d}\hat{d})_2]_0|p+3,\ p+3,\alpha'LL\rangle$$
$$=\langle pp(x)LL|[\hat{d}(\hat{d}\hat{d})_2]_0|p+3,\ p+3,\ \alpha'LL\rangle, \tag{3.10}$$
$$\langle pp(x)LL|[d^+(\hat{d}\hat{d})_2]_0|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle$$
$$=\langle pp(x)LL|[d^+(\hat{d}\hat{d})_2]_0|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle. \tag{3.11}$$

由(3.1)有

$$[(d^+d^+)_2d^+]_0|pp(x)LL\rangle=|p+3,p+3,\ (x+1)LL\rangle\sqrt{\frac{18}{35}\left(x+1+\frac{L+\beta_3}{2}\right)}, \tag{3.12}$$

因此(3.10)变为

$$\langle pp(x)LL|[\hat{d}(\hat{d}\hat{d})_2]_0|p+3,\ p+3,\ \alpha'LL\rangle$$
$$=\langle p+3,p+3,(x+1)LL|p+3,\ p+3,\ \alpha'LL\rangle\sqrt{\frac{18}{35}\left(x+1+\frac{L+\beta_3}{2}\right)}. \tag{3.13}$$

其次，由 (3.11) 及 (3.1) 有

$$\begin{aligned}
&\langle pp(x)LL|[d^+(\hat{d}\hat{d})_2]_0|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle\\
&=\langle p+1,\ p+1,\ \alpha'LL|[(d^+d^+)_2\hat{d}]_0[(d^+d^+)_2d^+]_0^x(d_2^+)^{\beta_1}\\
&\quad\cdot(d^+d^+)_{22}^{\beta_2}[(d^+d^+)_2d^+]_{33}^{\beta_3}|0\rangle F(p,\ x,\ L)\\
&=\langle p+1,\ p+1,\ \alpha'LL|[(d^+d^+)_2\hat{d}]_0[(d^+d^+)_2d^+]_0^x(d_2^+)^{\beta_1}(d^+d^+)_{22}^{\beta_2}\\
&\quad\cdot[(d^+d^+)_2d^+]_{33}^{\beta_3}|0\rangle F(p,\ x,\ L)-\frac{1}{2p+1}\langle p+1,\ p+1,\ \alpha'LL|\\
&\quad\cdot[(d^+d^+)_2d^+]_0\sqrt{5}(\hat{d}\hat{d})_0[(d^+d^+)_2d^+]_0^x(d_2^+)^{\beta_1}(d^+d^+)_{22}^{\beta_2}\\
&\quad\cdot[(d^+d^+)_2d^+]_{33}^{\beta_3}|0\rangle F(p,\ x,\ L).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

为了化简(3.14)式，要用到以下关系：

$$[(d^+d^+)_2\hat{d}]_0[(d^+d^+)_2d^+]_{33}|0\rangle=0, \tag{3.15}$$
$$[\hat{d}_\mu,[(d^+d^+)_2d^+]_0]=\frac{3}{\sqrt{5}}(d^+d^+)_{2\mu}, \tag{3.16}$$
$$[[(d^+d^+)_2\hat{d}]_0,\ [(d^+d^+)_2d^+]_0]=\frac{6}{7}(d^+d^+)_0^2, \tag{3.17}$$
$$[[(d^+d^+)_2\hat{d}]_0,d_2^+]=\frac{1}{\sqrt{5}}(d^+d^+)_{22}, \tag{3.18}$$
$$[[(d^+d^+)_2\hat{d}]_0,\ (d^+d^+)_{22}]=\frac{4}{7}(d^+d^+)_0d_2^+, \tag{3.19}$$
$$(\hat{d}\hat{d})_0[(d^+d^+)_2d^+]_{33}|0\rangle=0, \tag{3.20}$$
$$[\sqrt{5}(\hat{d}\hat{d})_0,\ d_\mu^+]=2\hat{d}_\mu, \tag{3.21}$$
$$[\sqrt{5}(\hat{d}\hat{d})_0,\ [(d^+d^+)_2d^+]_0]=6[(d^+d^+)_2\hat{d}]_0, \tag{3.22}$$
$$[d_{-2},(d^+d^+)_{22}]=[d_{-2},\ [(d^+d^+)_2d^+]_{33}]=0, \tag{3.23}$$
$$[\sqrt{5}(\hat{d}\hat{d})_0,\ (d^+d^+)_{22}]=4(d^+\hat{d})_{22}, \tag{3.24}$$
$$[(d^+\hat{d})_{22},\ (d^+d^+)_{22}]=\frac{4}{7}(d_2^+)^2, \tag{3.25}$$
$$(d^+\hat{d})_{22}[(d^+d^+)_2d^+]_{33}|0\rangle=0. \tag{3.26}$$

由此可把(3.14)式变为:

$$\langle pp(x)LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle$$
$$=\left(1-\frac{6x}{2p+1}\right)\frac{\beta_1}{\sqrt{5}}\langle p+1,p+1,\ \alpha'LL|$$
$$\cdot\ [(d^+d^+)_2d^+]_0^x(d_2^+)^{\beta_1-1}(d^+d^+)_{22}^{\beta_2+1}[(d^+d^+)_2d^+]_{33}^{\beta_3}|0\rangle F(p,\ x,\ L)$$
$$-\frac{8}{7}\frac{\beta_2(\beta_2-1)}{(2p+1)}\langle p+1,p+1,\alpha'LL|[(d^+d^+)_2d^+]_0^{x+1}(d_2^+)^{\beta_1+2}(d^+d^+)_{22}^{\beta_2-2}$$
$$\cdot\ [(d^+d^+)_2d^+]_{33}^{\beta_3}|0\rangle F(p,\ x,\ L). \tag{3.27}$$

由于$|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle$是无配对玻色子的态矢量,在(3.27)的两项中,都可把 d_μ^+ 换成 a_μ^+. 由此,再与(3.1)对比即得:

$$\langle pp(x)LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{8}{35}}\frac{[L-(p-3x)][2(p-3x)+1]}{(2p+1)}$$
$$\cdot\langle p+1,p+1,\ (x)LL|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle$$
$$-\sqrt{\frac{18}{35}}\frac{\left(p-3x-\frac{L+3\beta_3}{2}\right)\left(p-3x-\frac{L+3\beta_3}{2}-1\right)}{(2p+1)}$$
$$\cdot\sqrt{\left(x+1+\frac{L+\beta_3}{2}\right)}\cdot\langle p+1,p+1,(x+1)LL|p+1,p+1,\alpha'LL\rangle. \tag{3.28}$$

根据(3.13)、(3.28)及(3.7),我们得到:

$$\langle pp\alpha LL|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+3,p+3,\ \alpha'LL\rangle=\sum_x\langle p+3,\ p+3,\ (x+1)$$
$$\cdot\ LL|p+3,\ p+3,\ \alpha'LL\rangle W_{x\alpha}^{pL}\sqrt{\frac{18}{35}\left(x+1+\frac{L+\beta_3}{2}\right)}, \tag{3.29}$$

$$\langle pp\alpha LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+1,p+1,\ \alpha'LL\rangle=\sum_x\langle p+1,p+1,(x)LL|p+1,$$
$$p+1,\alpha'LL\rangle W_{x\alpha}^{pL}\sqrt{\frac{8}{35}}\cdot\frac{[L-(p-3x)][2(p-3x)+1]}{(2p+1)}$$
$$-\sum_x\langle p+1,p+1,(x+1)LL|p+1,p+1,\alpha'LL\rangle W_{x\alpha}^{pL}$$
$$\cdot\sqrt{\frac{18}{35}\left(x+1+\frac{L+\beta_3}{2}\right)}\frac{\left(p-3x-\frac{L+3\beta_3}{2}\right)\left(p-3x-\frac{L+3\beta_3}{2}-1\right)}{(2p+1)}. \tag{3.30}$$

以上我们证明了,当我们采用第一类物理基矢时,基本矩阵元可用这些基矢间的内积表示出来. 为了求出这些内积,还需要用适当的表象来表达物理基矢. $SU_2\otimes SU_2$ 表象在这方面有明显的优点,并且我们已在前文(II)中求出了$\left\langle pp\,{}_{\sigma\kappa}^{\Lambda}\middle|\,pp(x)LL\right\rangle$的明显公式. 借助这个中间表象所说的内积,有

$$\langle p_1p_1(x)LL|p_1p_1\alpha LL\rangle=\sum_{\substack{\Lambda\in\kappa\\(3\sigma+\kappa=L)}}\left\langle p_1p_1(x)LL\,\middle|\,p_1p_1\,{}_{\sigma\kappa}^{\Lambda}\right\rangle\left\langle p_1p_1\,{}_{\sigma\kappa}^{\Lambda}\middle|\,p_1p_1\alpha LL\right\rangle. \tag{3.31}$$

关于 $SU_2\otimes SU_2$ 基矢的记法，参看前文或本文第四节.

四、基本矩阵元的另一种表达式

在本节中，我们要用通常的表象变换方法求基本矩阵元的表达式，即首先求出 $[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0$、$[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0$ 在一个中间表象的矩阵元，再变换为 (2.20) 中的量．和第三节求 (3.31) 中的内积的情形相似，在这里，我们也是在前文工作的基础上，把 $SU_2\otimes SU_2$ 表象选为中间表象．

按照(I)与(II)中的记号，用 $\left|np\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\right\rangle$ 代表 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的基矢，其中 np 的意义与第二节相同，即 d 玻色子总数及未配对的 d 玻色子数．$\Lambda\varepsilon\kappa$ 是由 $SU_2\otimes SU_2$ 群的两个"角动量" $\vec{\varepsilon}$、$\vec{\kappa}$ 提供的量子数：

$$\vec{\varepsilon}^2(=\vec{\kappa}^2)\to\Lambda(\Lambda+1),\quad\left(\Lambda=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\cdots,\ \frac{p}{2}\right)\tag{4.1}$$

$$\varepsilon_0\to\varepsilon,\qquad(\varepsilon=-\Lambda,\ -\Lambda+1,\cdots,\ \Lambda)\tag{4.2}$$

$$\kappa_0\to\kappa.\qquad(\kappa=-\Lambda,\ -\Lambda+1,\cdots,\ \Lambda)\tag{4.3}$$

这种基矢也可分出 $n=p$ 的基本基矢，在表达 $|ppO_3\rangle$ 时，只涉及基本基矢：

$$|pp\alpha LL\rangle=\sum_{\Lambda\varepsilon\kappa}\left|pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\right\rangle\left\langle pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\right|pp\alpha LL\Big\rangle.\tag{4.4}$$

相应地，(2.20) 中的矩阵元可表示为

$$\begin{aligned}&\langle pp\alpha LL|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+3,p+3,\alpha'LL\rangle\\&=\sum_{\Lambda\varepsilon\kappa}\sum_{\Lambda'\varepsilon'\kappa'}\left\langle pp\alpha LL\,\middle|\,pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\right\rangle\left\langle pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\middle|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0\middle|p+3,\right.\\&\qquad\left.p+3,{}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}\right\rangle\left\langle p+3,p+3,{}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}\middle|p+3,p+3,\alpha'LL\right\rangle,\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}&\langle pp\alpha LL|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0|p+1,\ p+1,\ \alpha'LL\rangle\\&=\sum_{\Lambda\varepsilon\kappa}\sum_{\Lambda'\varepsilon'\kappa'}\left\langle pp\alpha LL\,\middle|\,pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\right\rangle\left\langle pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\middle|[d^+(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0\middle|p+1,p+1,{}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}\right\rangle\\&\qquad\cdot\left\langle p+1,p+1,{}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}\middle|p+1,p+1,\alpha'LL\right\rangle.\end{aligned}\tag{4.6}$$

通常的角动量投影 L_0 可表示为 $3\varepsilon_0+\kappa_0$，因此在 (4.4)—(4.6) 中的求和受到如下的限制：

$$3\varepsilon+\kappa=3\varepsilon'+\kappa'=L.\tag{4.7}$$

如果 $|pp\alpha LL\rangle$ 是由 (I)、(II) 中讨论过的 $|pp(\alpha)LL\rangle$ 经正交归一而成的，则

$$|pp\alpha LL\rangle=\sum_{\alpha_1}|pp(\alpha_1)LL\rangle W^{pL}_{\alpha_1\alpha},\tag{4.8}$$

$W^{pL}_{\alpha_1\alpha}$ 以及 $\left\langle pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\middle|pp(\alpha_1)LL\right\rangle$ 都是已知的，因此(4.4)—(4.6)中的变换系数是已知的：

$$\left\langle pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\middle|pp\alpha LL\right\rangle=\sum_{\alpha_1}\left\langle pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\middle|pp(\alpha_1)LL\right\rangle W^{pL}_{\alpha_1\alpha}.\tag{4.9}$$

顺便提一下，如果 $|pp\alpha LL\rangle$ 是用其他方法确定的，那么这里就直接把 $\left\langle pp\,{}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\middle|\,pp(\alpha)LL\right\rangle$ 看

作已知的量.

下面让我们写出(4.5)、(4.6)中如下的矩阵元的表达式:

$$\left\langle pp{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\right|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0\left|p+3,p+3,{}^{\Lambda'}_{\epsilon'\kappa'}\right\rangle, \tag{4.10}$$

$$\left\langle pp{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\right|[d^{+}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0\left|p+1,p+1,{}^{\Lambda'}_{\epsilon'\kappa'}\right\rangle. \tag{4.10'}$$

关于(4.10), 可以从[7]中找到. 但要注意,该文中的 $\left|pp{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\right\rangle$ 与我们在前文(I)及(II)中求 $\left\langle pp{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\middle|ppO_3\right\rangle$ 时所用的基矢有不同的相角规定. 这里我们根据(I)中的 $\left|pp{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\right\rangle$ 给出(4.10)及(4.10')的表达式. 最后结果如下:

$$\begin{aligned}
&\left\langle pp{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\right|[\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0\left|p+3,p+3,{}^{\Lambda'}_{\epsilon'\kappa'}\right\rangle = -\delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\kappa\kappa'}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{10}}\right)f_0(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)\\
&\quad-\delta_{\Lambda+\frac{1}{2},\Lambda'}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{1}{2}}(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{1}{2}}(p,\Lambda,-\epsilon,-\kappa)\}\\
&\quad+\delta_{\Lambda-\frac{1}{2},\Lambda'}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{1}{2}}(p,-\Lambda-1,\epsilon,\kappa)\\
&\quad+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{1}{2}}(p,-\Lambda-1,-\epsilon,-\kappa)\}+\delta_{\Lambda+1,\Lambda'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\kappa\kappa'}\frac{9}{\sqrt{70}}f_1(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)\\
&\quad-\delta_{\Lambda-1,\Lambda'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\kappa\kappa'}\frac{9}{\sqrt{70}}f_1(p,-\Lambda-1,\epsilon,\kappa)-\delta_{\Lambda+\frac{3}{2},\Lambda'}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\\
&\quad\cdot\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{3}{2}}(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{3}{2}}(p,-\Lambda-1,-\epsilon,-\kappa)\}\\
&\quad+\delta_{\Lambda-\frac{3}{2},\Lambda'}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{3}{2}}(p,-\Lambda-1,\epsilon,\kappa)\\
&\quad+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}f_{\frac{3}{2}}(p,-\Lambda-1,-\epsilon,-\kappa)\},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle pp{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\right|[d^{+}(\tilde{d}\tilde{d})_2]_0\left|p+1,p+1,{}^{\Lambda'}_{\epsilon'\kappa'}\right\rangle = \delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\kappa\kappa'}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{10}}\right)g_0(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)\\
&\quad+\delta_{\Lambda+\frac{1}{2},\Lambda'}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{1}{2}}(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{1}{2}}(p,\Lambda,-\epsilon,-\kappa)\}\\
&\quad-\delta_{\Lambda-\frac{1}{2},\Lambda'}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{1}{2}}(p,-\Lambda-1,\epsilon,\kappa)\\
&\quad+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{1}{2}}(p,-\Lambda-1,-\epsilon,-\kappa)\}-\delta_{\Lambda+1,\Lambda'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\kappa\kappa'}\frac{3}{\sqrt{70}}g_1(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)\\
&\quad+\delta_{\Lambda-1,\Lambda'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\kappa\kappa'}\frac{3}{\sqrt{70}}g_1(p,-\Lambda-1,\epsilon,\kappa)+\delta_{\Lambda+\frac{3}{2},\Lambda'}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\\
&\quad\cdot\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{3}{2}}(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{3}{2}}(p,\Lambda,-\epsilon,-\kappa)\}\\
&\quad-\delta_{\Lambda-\frac{3}{2},\Lambda'}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{70}}\right)\{\delta_{\epsilon-\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa+\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{3}{2}}(p,-\Lambda-1,\epsilon,\kappa)\\
&\quad+\delta_{\epsilon+\frac{1}{2},\epsilon'}\delta_{\kappa-\frac{3}{2},\kappa'}g_{\frac{3}{2}}(p,-\Lambda-1,-\epsilon,-\kappa)\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中 $f_0(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)$ 及 $g_0(p,\Lambda,\epsilon,\kappa)$ 等的表达式如下:

$$f_0(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) =$$
$$\sqrt{\frac{(p-2\Lambda+1)(p-2\Lambda+2)(p-2\Lambda+3)(p+2\Lambda+3)(p+2\Lambda+4)(p+2\Lambda+5)}{(2p+3)(2p+5)(2p+7)}}$$
$$\left\{1+\frac{9}{7}(1-\delta_{0\Lambda})\frac{\kappa\epsilon}{\Lambda(\Lambda+1)}\right\}, \tag{4.13}$$

$$f_{\frac{1}{2}}(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) =$$
$$\sqrt{\frac{(p-2\Lambda+1)(p-2\Lambda+2)(p+2\Lambda+3)(p+2\Lambda+4)(p+2\Lambda+5)(p+2\Lambda+6)}{(2p+3)(2p+5)(2p+7)}}$$
$$\varphi_{\frac{1}{2}}(\Lambda, \epsilon, \kappa), \tag{4.14}$$

$$f_1(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) =$$
$$\sqrt{\frac{(p-2\Lambda+1)(p+2\Lambda+3)(p+2\Lambda+4)(p+2\Lambda+5)(p+2\Lambda+6)(p+2\Lambda+7)}{(2p+3)(2p+5)(2p+7)}}$$
$$\varphi_1(\Lambda, \epsilon, \kappa), \tag{4.15}$$

$$f_{\frac{3}{2}}(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) =$$
$$\sqrt{\frac{(p+2\Lambda+3)(p+2\Lambda+4)(p+2\Lambda+5)(p+2\Lambda+6)(p+2\Lambda+7)(p+2\Lambda+8)}{(2p+3)(2p+5)(2p+7)}}$$
$$\varphi_{\frac{3}{2}}(\Lambda, \epsilon, \kappa), \tag{4.16}$$

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) = \frac{(\Lambda+3\epsilon)}{(2\Lambda)(2\Lambda+3)}\sqrt{\frac{(\Lambda-\epsilon+1)(\Lambda+\kappa+1)(\Lambda+\kappa+2)(\Lambda-\kappa)}{(2\Lambda+1)(2\Lambda+2)}}, \tag{4.17}$$

$$\varphi_1(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) = \frac{1}{(2\Lambda+2)}\sqrt{\frac{(\Lambda+1-\epsilon)(\Lambda+1+\epsilon)(\Lambda+1-\kappa)(\Lambda+1+\kappa)}{(2\Lambda+1)(2\Lambda+3)}}, \tag{4.18}$$

$$\varphi_{\frac{3}{2}}(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) = \frac{1}{(2\Lambda+2)(2\Lambda+3)}$$
$$\sqrt{\frac{(\Lambda+\epsilon+1)(\Lambda-\epsilon+1)(\Lambda-\epsilon+2)(\Lambda+\kappa+1)(\Lambda+\kappa+2)(\Lambda+\kappa+3)}{(2\Lambda+1)(2\Lambda+4)}}, \tag{4.19}$$

$$g_0(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) = \sqrt{\frac{(p-2\Lambda+1)(p+2\Lambda+3)}{(2p+3)}}\left\{\frac{2}{7}p - \frac{(p-2\Lambda)(p+2\Lambda+2)}{(2p+1)}\right.$$
$$\left. + \frac{3}{7}(1-\delta_{0\Lambda})\frac{\epsilon\kappa}{\Lambda(\Lambda+1)}\frac{(p+2)^2+6\Lambda(2\Lambda+2)}{(2p+1)}\right\}, \tag{4.20}$$

$$g_{\frac{1}{2}}(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) = \left\{\frac{(p+2\Lambda+1)(p+2\Lambda+2)+2(p-2\Lambda-1)(p-2\Lambda)+4(2p+1)}{(2p+1)}\right\}$$
$$\cdot\sqrt{\frac{(p+2\Lambda+3)(p+2\Lambda+4)}{(2p+3)}}\varphi_{\frac{1}{2}}(\Lambda, \epsilon, \kappa), \tag{4.21}$$

$$g_1(p, \Lambda, \epsilon, \kappa) = \left(\frac{p-6\Lambda-4}{2p+1}\right)$$

$$\cdot\sqrt{\frac{(p-2\Lambda)(p+2\Lambda+3)(p+2\Lambda+4)(p+2\Lambda+5)}{(2p+3)}}\,\varphi_1(\Lambda,\sigma,\kappa), \quad (4.22)$$

$$g_{\frac{3}{2}}(p,\Lambda,\sigma,\kappa)=\left(\frac{1}{2p+1}\right)$$

$$\cdot\sqrt{\frac{(p-2\Lambda-1)(p-2\Lambda)(p+2\Lambda+3)(p+2\Lambda+4)(p+2\Lambda+5)(p+2\Lambda+6)}{(2p+3)}}$$

$$\cdot\,\varphi_{\frac{3}{2}}(\Lambda,\sigma,\kappa). \quad (4.23)$$

我们看到，在 $(\Lambda,\Lambda')\to(-\Lambda-1,-\Lambda'-1)$ 的变换下，(4.11)及(4.12)中的 $\delta_{\Lambda\Lambda'}$ 项保持不变，$\delta_{\Lambda+s,\Lambda'}$ 项 $\left(s=\pm\frac{1}{2},\ \pm1,\ \pm\frac{3}{2}\right)$ 则变为 $\delta_{\Lambda-s,\Lambda'}$ 项乘以 (-1).

五、结　语

本文把前文(I)及(II)发展的方法和求得的 $\left\langle pp\begin{smallmatrix}\Lambda\\ \sigma\kappa\end{smallmatrix}\middle| ppO_3\right\rangle$ 的表达式应用于原子核的相互作用玻色子模型．我们采用 U_5 表象把求唯象 IBM 哈密顿量矩阵的问题归结为求(2.20)、(2.20′)中的一些基本矩阵元，并用 $SU_2\otimes SU_2$ 表象作为表达 $|ppO_3\rangle$ 基矢的中间表象，在第三及第五节用不同方法求出了基本矩阵元的明显公式．

第三节的方法是针对用无迹玻色子算符构成的“第一类” $|ppO_3\rangle$ 基矢建立的[3]．第二类 $|ppO_3\rangle$ 基矢，即所谓“粒子-空穴”基矢[5]，已在前文(II)中表示为第一类基矢的迭加，因此也可以用这种方法．

第四节的方法是通常的表象变换方法，它适用于现有的用明显公式表达出来的所有三类 $|ppO_3\rangle$ 基矢[3,5,6]，也适用于用 $SU_2\otimes SU_2$ 表象确定的其他 $|ppO_3\rangle$ 基矢．

参　考　文　献

[1] 杨泽森，高能物理与核物理，本文中称为(I)，**6** (1982)，630.
[2] 杨泽森，高能物理与核物理，本文中称为(II)，7(1983)，245.
[3] E. Chacon, M. Moshinsky and R. T. Sharp, *J. Math. Phys.*, **17**(1976), 668.
[4] E. T. Hecht, *Nucl. Phys.*, **63**(1965), 177.
[5] E. Chacon and M. Moshinsky, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 870.
[6] S. Szpikowski and A. Gozdz, *Nucl. Phys.*, **A 340**(1980), 76.
[7] 孙洪洲，高能物理与核物理，**4**(1980)，478.

THE $SU_2 \otimes SU_2$ BASIS AND THE PHYSICAL BASES FOR THE STATE VECTORS OF d-BOSON SYSTEM AND THE TRACELESS BOSON OPERATORS(III)

YANG ZE-SEN (TSE SEN YANG)
(*Peking University*)

ABSTRACT

The methods and results of papers (I) and (II) are applied to the interacting boson model (IBM) of nuclei. With the use of the $SU_6 \supset U_5 \supset O_5 \supset O_3$ representation the matrix elements of the phenomenological IBM Hamiltonian are expressed in terms of some "elementary matrix elements" of d-bosons. In accordance with the existing physical bases for d-boson systems and taking the $SU_2 \otimes SU_2$ representation as an intermediate representation, two types of formulas are constructed for the elementary matrix elements.