第 7 卷 第 4 期 高能物理与核物理 Vol. 7, No. 4
1983 年 7 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1983

生成坐标方法与原子核集体运动

VI 关于"过完全"问题

徐 躬 耦

(兰 州 大 学)

摘 要

从生成坐标方法的普遍情形出发，讨论了所谓的"过完全"问题. 指出等效算子 $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ 本身已排除物理态与非物理态之间的耦合，不再存在所谓的"过完全"问题. 通过 SU(6) 群的玻色子表示的实例，具体说明了上述结论.

Hill-Wheeler 提出的生成坐标方法[1]，经广泛研究，已被证实为研究原子核集体运动的有效途径[2]. 近年来，作者及其同事们致力于研究用生成坐标方法来推导集体运动哈密顿量，探讨集体模型的微观基础和各种集体模型之间的关系，获得了有成效的结果[3].

但是，在生成坐标方法中将任意状态通过算子 P 写成下式

$$|\Psi\rangle = \int dq e^{iqP}|\phi_0\rangle f(q), \tag{1}$$

就引来了所谓的"过完全"问题. 在由函数 $f(q)$ 构成的函数空间中，有一部份 $f_u(q)$ 给出下述结果

$$0 = \int dq e^{iqP}|\phi_0\rangle f_u(q), \tag{2}$$

在 $|\Psi\rangle$ 构成的空间中没有它的对应. 通常称这一部份 $f_u(q)$ 构成的子空间为非物理子空间. 只有在排除非物理态以后，$|\Psi\rangle$ 与 $f(q)$ 才一一对应. 这就是所谓的"过完全"问题. 在本文中我们将详细研究这一问题.

我们用(1)式所示的 $|\Psi\rangle$ 来计算任意物理量 O 的期望值，我们有

$$\frac{\langle\Psi|O|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\iint dq'dq'' f^*(q')\langle\phi_0|e^{-iq'P}Oe^{iq''P}|\phi_0\rangle f(q'')}{\iint dq'dq'' f^*(q')\langle\phi_0|e^{-iq'P}e^{iq''P}|\phi_0\rangle f(q'')}$$

$$= \frac{\int dq f^*(q)\hat{\mathscr{O}}\left(q, -i\frac{\partial}{\partial q}\right)f(q)}{\int dq f^*(q)\hat{\mathscr{N}}\left(q, -i\frac{\partial}{\partial q}\right)f(q)}. \tag{3}$$

本文 1982 年 7 月 23 日收到.

这里

$$\hat{\mathscr{N}}\left(q,-i\frac{\partial}{\partial q}\right)f(q)=\int dq'\langle\phi_0|e^{-iqP}e^{iq'P}|\phi_0\rangle f(q'),\tag{4}$$

$$\hat{\mathscr{O}}\left(q,-i\frac{\partial}{\partial q}\right)f(q)=\int dq'\langle\phi_0|e^{-iqP}Oe^{iq'P}|\phi_0\rangle f(q'),\tag{5}$$

$\hat{\mathscr{N}}\left(q,-i\dfrac{\partial}{\partial q}\right)$ 是厄密的，有非负的本征值．但它可以有等于零的本征值．相应于本征值等于零的本征解属于非物理子空间，而相应于本征值不为零的本征解则属于物理子空间．

任意状态都可以用 $\hat{\mathscr{N}}$ 的本征解来分解．$\hat{\mathscr{N}}f$ 亦可按 $\hat{\mathscr{N}}$ 的本征解来分解．显然可见，对于任意的 f，经 $\hat{\mathscr{N}}$ 作用以后，必属于物理子空间．

对于 $\hat{\mathscr{O}}f$ 亦可按 $\hat{\mathscr{N}}$ 的本征解来分解．从(5)式显然可见，它必属于物理子空间．因为

$$\hat{\mathscr{O}}f=(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})(\hat{\mathscr{N}}f),\tag{6}$$

已知 $\hat{\mathscr{N}}f$ 属于物理子空间，故 $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ 作用于物理子空间中的态时，所得到的仍是物理子空间中的态．

现在将(3)式改写成

$$\frac{\langle\Psi|O|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}=\frac{\int dqf^*(q)(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})(\hat{\mathscr{N}}f)}{\int dqf^*(q)(\hat{\mathscr{N}}f)}.\tag{7}$$

式中 $f(q)$ 是任意的，因而 $\hat{\mathscr{N}}f(q)$ 是任意函数，故 $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ 可取为相应于 O 的等效算子．这个等效算子作用于物理子空间中的态时，所得到的仍是物理子空间中的态．上式中的 $f^*(q)$ 是任意函数，但只是属于物理子空间时，才给出确定的结果．

由于 $\hat{\mathscr{N}}$ 具有等于零的本征值，$\hat{\mathscr{N}}^{-1}$ 不存在．但 $\hat{\mathscr{N}}$ 的本征值为零的本征解，同时也是 $\mathscr{O}$ 的本征值为零的本征解．$(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ 作为一个算子是存在的，它作用于物理子空间中的态时，所得结果具有确切的意义．

因为 $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ 是存在的，所以它可以像参考文献[3c]所指出的那样，求解方程

$$(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})=\hat{\mathscr{O}}_L-\overline{(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})(\hat{\mathscr{N}}^{-1})}\tag{8}$$

而得出(有关符号的定义见参考文献[3c])．另外还可以直接算出由下式定义的 $\hat{\mathscr{O}}_D$，

$$\hat{\mathscr{O}}_D\left(q,-i\frac{\partial}{\partial q}\right)\int dq'\langle\phi_0|e^{-iqP}e^{iq'P}|\phi_0\rangle f(q')$$

$$=\int dq'\langle\phi_0|e^{-iqP}Oe^{iq'P}|\phi_0\rangle f(q'),\tag{9}$$

显然我们有

$$(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})=\hat{\mathscr{O}}_D.\tag{10}$$

上面的讨论是普遍的，只要按所指出的途径求出等效算子 $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$，则就自然地解决了非物理子空间的排除问题，也就不会再出现所谓的“过完全”问题．

这里所求得的相应于厄密算子 O 的等效算子 $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ 不是厄密的，$(\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}})$ 才是厄密的[1)]．因为

1) 或者说，相应于两个相共轭的算子 O 及 O^+，等效算子 $\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1}$ 及 $\hat{\mathscr{O}}^+\hat{\mathscr{N}}^{-1}$ 并不彼此共轭，需作一个相似变换，使变得彼此共轭．

$$\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}} = \hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})\hat{\mathscr{N}}^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

而 $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ 已经解决了非物理子空间的排除问题，所以实际上可以通过只作用于物理子空间中的状态的 $\hat{\mathscr{N}}'$ 作相似变换，以求得所需的厄密的等效算子． 这个 $\hat{\mathscr{N}}'$ 从原则上说，可以通过 $\hat{\mathscr{N}}$ 求得．因为算子 $\hat{\mathscr{N}}$ 在物理子空间中的本征解具有大于零的本征值，所以 $\hat{\mathscr{N}}'^{-\frac{1}{2}}$ 是存在的．

现在考虑 SU(6) 群的玻色子表示问题来说明上述关于“过完全”问题的讨论．

对于 SU(6) 群，可以用包括一种 s 玻色子及五种 d 玻色子的体系来表示．这些玻色子的产生算子和消灭算子为 s^+，s 及 d_μ^+，d_μ． SU(6) 群的 35 个算子则表为 s^+d_μ，d_μ^+s 及 $d_\mu^+d_\nu - \delta_{\mu\nu}s^+s$．另外，

$$N = \sum_\mu d_\mu^+ d_\mu + s^+s, \tag{12}$$

是总的玻色子数．它们作用于状态

$$|\{n_\mu\}) = \prod_\mu (n_\mu!)^{-\frac{1}{2}}(d_\mu^+)^{n_\mu}\left[\left(N - \sum_\mu n_\mu\right)!\right]^{-\frac{1}{2}}(s^+)^{N-\sum_\mu n_\mu}|0). \tag{13}$$

这通常称为 Schwinger 表示[4]．

运用生成坐标方法，可将任意状态写成

$$|\Psi) = \int d\alpha f(\alpha)|\alpha), \tag{14}$$

其中

$$|\alpha) = \exp\left[\sum_\mu d_\mu^* d_\mu^+ s\right](N!)^{-\frac{1}{2}}(s^+)^N|0) \tag{15}$$

$$\alpha_\mu^* = (-)^\mu \alpha_{-\mu} \tag{16}$$

因为

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha|s^+d_\mu|\beta) &= \frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}(\alpha|\beta)\\
(\alpha|d_\mu^+s|\beta) &= \alpha_\mu\left(N - \sum_\kappa \alpha_\kappa\frac{\partial}{\partial\alpha_\kappa}\right)(\alpha|\beta)\\
(\alpha|d_\mu^+d_\nu - \delta_{\mu\nu}s^+s|\beta) &= \left[\alpha_\mu\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu} - \delta_{\mu\nu}\left(N - \sum_\kappa \alpha_\kappa\frac{\partial}{\partial\alpha_\kappa}\right)\right](\alpha|\beta)
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

根据(9)(10)式，我们得到下述等效算子，

$$\left.\begin{aligned}
s^+d_\mu: &\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}\\
d_\mu^+s: &\quad \alpha_\mu\left(N - \sum_\kappa \alpha_\kappa\frac{\partial}{\partial\alpha_\kappa}\right)\\
d_\mu^+d_\nu - \delta_{\mu\nu}s^+s: &\quad \alpha_\mu\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu} - \delta_{\mu\nu}\left(N - \sum_\kappa \alpha_\kappa\frac{\partial}{\partial\alpha_\kappa}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

作下述相似变换，

$$\begin{aligned}
&\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_\kappa\frac{\partial^2}{\partial\alpha_\kappa^*\partial\alpha_\kappa}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\kappa\alpha_\kappa^*\alpha_\kappa\right]\hat{\mathscr{O}}_D\\
&\cdot\left(\alpha,-i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\exp\left[\frac{1}{2}\sum_\kappa\alpha_\kappa^*\alpha_\kappa\right]\exp\left[\frac{1}{4}\sum_\kappa\frac{\partial^2}{\partial\alpha_\kappa^*\partial\alpha_\kappa}\right]
\end{aligned} \tag{19}$$

我们得到另一种形式的等效算子

$$\left.\begin{aligned} &s^+d_\mu: && b_\mu \\ &d_\mu^+ s: && b_\mu^+\left(N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right) \\ &d_\mu^+ d_\nu-\delta_{\mu\nu}s^+s: && b_\mu^+ b_\nu-\delta_{\mu\nu}\left(N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中

$$b_\mu^+=\alpha_\mu-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu^*},\quad b_\mu=\alpha_\mu^*+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}, \tag{21}$$

$$[b_\mu, b_\nu^+]=\delta_{\mu\nu},\quad [b_\mu, b_\nu]=[b_\mu^+, b_\nu^+]=0, \tag{22}$$

这正是 SU(6) 群的 Dyson 表示[5].

再作一次相似变换，

$$\left[\left(N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right)!\right]^{\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{O}}_D(b^+, b)\left[\left(N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right)!\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

则得到了 SU(6) 群的 Holstein-Primakoff 表示[6],

$$\left.\begin{aligned} &s^+d_\mu: && \left[N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right]^{\frac{1}{2}} b_\mu \\ &d_\mu^+ s: && b_\mu^+\left[N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right]^{\frac{1}{2}} \\ &d_\mu^+ d_\nu-\delta_{\mu\nu}s^+s: && b_\mu^+ b_\nu-\delta_{\mu\nu}\left[N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right] \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

我们看到(18)、(20)及(24)式所示的三种表示，都已经排除了非物理子空间与物理子空间的耦合、自然地解决了“过完全”问题．从(18)式可见，由多项式

$$\sum_{\{n_\mu\}} C(\{n_\mu\})\prod_\mu(\alpha_\mu)^{n_\mu},\quad \sum_\mu n_\mu\leqslant N, \tag{25}$$

构成的子空间是 SU(6) 群的不变子空间．同样从(20)及(24)式可见，由态

$$\sum_{\{n_\mu\}} C(\{n_\mu\})\prod_\mu(b^+)^{n_\mu}|0),\quad \sum_\mu n_\mu\leqslant N, \tag{26}$$

构成的子空间也是 SU(6) 群的不变子空间．

这里声子的激发，表征 s 玻色子向 d 玻色子的转化．这种声子是有内部结构的． 如果对它采用简单玻色子的互易关系，就会出现以声子—声子作用的形式来表述的对于这种简单互易关系的修正．这种声子的激发，或 s 玻色子向 d 玻色子的转化，是受存在着的 s 玻色子数所限制的．要排除非物理态就必须考虑这个限制．(18)式中的因子

$$\left[N-\sum_\kappa \alpha_\kappa\frac{\partial}{\partial\alpha_\kappa}\right],$$

(20)式中的因子 $\left[N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right]$，以及(24)式中的因子 $\left[N-\sum_\kappa b_\kappa^+ b_\kappa\right]^{\frac{1}{2}}$ 正是通过对于简单互易关系的修正而给出的这样的限制． 这种修正在接近极限情形时显得特别重要，决不能忽略．

从所考虑的这个实例还说明了互作用玻色子模型（s 玻色子及 d 玻色子）与截止的互

作用声子模型(四极声子)是等价的. 在截止的互作用声子模型中,由于因子

$$[N - \sum b_\kappa^+ b_\kappa]^{\frac{1}{2}}$$

的出现,激发态的角动量是受限制的.

感谢杨亚天同志的有益讨论.

参 考 文 献

[1] D. L. Hill and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **89**(1953), 1102.
[2] C. W. Wong, *Phys. Rep.*, **15C**(1975), 283.
P. Ring and P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem, Chapter 10, Springer-Verlag, Berlin (1980).
[3] 徐躬耦,中国科学,1974,**6**,567.
徐躬耦、杨亚天、王顺金,1981,**4**,428.
Xu Gong-ou and Wang Shun-jin, *Nucl. Phys.*, **A380**(1982), 529.
Xu Gong-ou, in "Progress in Particle and Nuclear Physics ——Collective Bands in Nuclei", (in press).
[4] J. Schwinger, Quantum Theory of Angular Momentum, Academic Press, New York (1965).
[5] J. F. Dyson, *Phys. Rev.*, **102**(1956), 1217.
[6] T. Holstein and H. Primakoff, *Phys. Rev.*, **58**(1940), 1098.

GENERATOR COORDINATE METHOD AND NUCLEAR COLLECTIVE MOTIONS——VI ON THE PROBLEM OF OVERCOMPLETENESS

Xu Gong-ou
(*Lanzhou University*)

Abstract

The problem of overcompleteness in the generator coordinate method is generally studied. It is shown that the effective operator $(\hat{\mathscr{O}}\hat{\mathscr{N}}^{-1})$ as a whole excludes the coupling between the physical and unphysical states and the problem of overcompleteness is resolved in this sense. This conclusion is illustrated with an example of boson representations of the $SU(6)$ group.