

精确到次带头项贡献的核子结构函数 非单态分量的解析表达式

吴济民 陆景贤 赵佩英
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文利用逆 Mellin 变换从非单态核子结构函数的矩得到了精确到次带头项贡献的核子结构函数非单态分量的解析表达式, 最后将理论预言与实验进行比较。

在目前高能物理实验的能量条件下, 浮动耦合常数约为 $\alpha_s = 0.1-0.3$. 在微扰 QCD 理论体系中, 用它作为理论的展开参数, 这不是一个很小的展开参数. 所以, 当人们得到结构函数的带头级行为之后, 很自然希望得到包括高级贡献在内的它的行为. 将带头级理论预言与实验数据比较时, 在低 Q^2 区域内, 两者之间总有相当的偏差, 这是由于高级贡献的结果吗? 同时, 为了从实验中得到有理论意义的参数 Λ 值^[1], 为了讨论高扭度算符的贡献, 也希望从理论上了解最低扭度算符的高级贡献.

到现在为止, 已经不少人先后对核子结构函数的矩^[2,3]、结构函数本身^[4,5]和分布函数讨论了包括 QCD 次带头级贡献在内的这些物理量的行为. 我们知道, 比较核子结构函数矩的理论预言与实验结果; 不能很清楚地检验出 QCD 效应. 所以人们转向讨论核子结构函数或分布函数.

但是, 实验上直接可测量的量是核子的结构函数而不是分布函数. 理论上关于结构函数和分布函数的讨论都是基于用算符乘积展开、重正化群方程方法得到的关于结构函数矩的理论预言而来的(包括讨论高级效应在内)^[1,4]. 当讨论分布函数时, 又产生了关于如何定义分布函数的问题, 导致了对分布函数有不同的定义. 因此, 在本文中我们不讨论分布函数, 而从结构函数的矩来讨论核子结构函数.

现在, 有不少作者利用数值计算方法得到了包括次带头级贡献在内的结构函数或分布函数. 显然, 与解析方法相比, 数值方法将丢失不少信息. 本文从关于核子结构函数矩的理论预言出发(包括次带头级贡献), 采用逆 Mellin 变换, 得到包括次带头级贡献的核子结构函数非单态分量的解析表达式. 最后, 再与实验结果作了比较.

由算符乘积展开和重正化群方程得到的关于核子结构函数非单态分量的矩的理论预言是(包括次带头级):

$$\langle F_{NS}^k(Q^2) \rangle_n = \langle F_{NS}^k(Q_0^2) \rangle_n \left[\frac{\bar{g}^2(Q^2)}{\bar{g}^2(Q_0^2)} \right]^{d_{NS}^n} \left[1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2) - \bar{g}^2(Q_0^2)}{16\pi^2} R_{NS}^{k,n} \right], \quad (1)$$

其中矩的定义是:

$$\langle F_{NS}^k(Q^2) \rangle_n = \int_0^1 dx x^{n-2} \mathcal{F}_{NS}^k(x, Q^2) \quad k = 2, 3 \quad (2)$$

$$d_{NS}^n = \gamma_{NS}^{0,n} / 2\beta_0 \quad (3)$$

$\bar{g}^2(Q^2)$ 为浮动耦合常数, 精确到次带头级时, 是

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} = \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{16\pi^2} = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln Q^2 / \Lambda^2}{\left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^2} \quad (4)$$

\mathcal{F}^k 与深度非弹过程的结构函数的关系是: $\mathcal{F}^2 = F_2$, $\mathcal{F}^3 = xF_3$. Q_0^2 为 Q^2 的某一初始值, 以及:

$$R_{NS}^{k,n} = \frac{1}{2\beta_0} \gamma_{NS}^{1,n} - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \gamma_{NS}^{0,n} + B_{NS}^{k,n}. \quad (5)$$

反常量纲 γ_{NS} 和 β 函数有:

$$\gamma_{NS} = \gamma_{NS}^{0,n} \frac{g^2}{16\pi^2} + \gamma_{NS}^{1,n} \frac{g^4}{(16\pi^2)^2} + \dots$$

$$\beta = -\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} - \dots$$

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} N_f, \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3} N_f$$

系数函数有:

$$C_{NS}^{k,n}(1, \bar{g}^2) = \delta_{NS}^k \left(1 + \frac{\bar{g}^2}{16\pi^2} B_{NS}^{k,n} \right) \quad (6)$$

所有这些参数都已经分别被至少两组人计算得到. 并且指出, 虽然 $\gamma_{NS}^{1,n}$ 与 $B_{NS}^{k,n}$ 分别是与重正化方案有关, 但是当在同一种重正化方案中计算时, 出现在 $R_{NS}^{k,n}$ 中的量

$$B_{NS}^{k,n} + \frac{1}{2\beta_0} \gamma_{NS}^{1,n}$$

是与重正化方案无关的, $\gamma_{NS}^{1,n}$ 与 $B_{NS}^{k,n}$ 中与重正化方案有关的部分相互抵消.

由 (1) 式可得结构函数的非单态分量为:

$$\mathcal{F}_{NS}^k(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \mathcal{F}_{NS}^k(z, Q_0^2) T\left(\frac{x}{z}, Q^2\right). \quad (7)$$

其中

$$T\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dn \left(\frac{x}{z}\right)^{-n+1} \left[1 + \frac{\bar{g}^2(Q^2) - \bar{g}^2(Q_0^2)}{16\pi^2} R_{NS}^{k,n} \right] e^{A_n^{qq}} \quad (8)$$

$$S = \frac{16}{3\beta_0} \ln \left[\frac{\bar{g}^2(Q_0^2)}{\bar{g}^2(Q^2)} \right] \quad (9)$$

$$A_n^{qq} = -\frac{3}{32} \gamma_{NS}^{0,n} \quad (10)$$

(8) 式中方括号内第 1 项对应于带头级贡献, 其余为次带头级贡献. 我们的任务首先完成逆 Mellin 变换 (8) 式, 并在一个初始输入下解析地完成积分 (7) 式.

利用这一事实:

$$\begin{aligned} A_n^{qq} &= -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] \\ &= \frac{3}{4} - c + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} - 4(n+1) \\ &= \frac{3}{4} - c - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{7}{12n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{59}{120n^4} - \frac{1}{2n^5} + \frac{127}{252n^6} \dots \end{aligned} \quad (11)$$

以及^[8]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n} \frac{1}{n^{s+j}} = \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}, \quad (12)$$

我们可以得到对应于(8)式中带头级的逆 Mellin 变换结果:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n+1} e^{A_n^{qq}s} = e^{s(\frac{3}{4}-c)} x \sum_{j=0}^{\infty} G_j(s) \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} \quad (13)$$

其中 C 为欧拉常数

$$\begin{aligned} G_0 &= 1 \\ G_1 &= -\frac{s}{2} \\ G_2 &= s \frac{3s+14}{24} \\ G_3 &= -s \frac{s^2+14s+24}{48} \\ G_4 &= s \frac{(15s^3+420s^2+2420s+2832)}{5760} \\ G_5 &= \dots \end{aligned} \quad (14)$$

注意到 R_{Ns}^n 可以改写成下列形式^[5]:

$$R_{Ns}^n = \frac{8}{3} \ln^2 n + \sum_{p=0}^1 \sum_{l=0}^{\infty} H_{pl} \frac{(\ln n)^p}{n^{l+j}} \quad (15)$$

其中系数 H_{pl} 可见 [5], 并利用

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n} \frac{\ln n}{n^{l+j}} = -\frac{\partial}{\partial j} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n} \frac{1}{n^{l+j}} \right] \quad (16)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n} \frac{\ln^2 n}{n^{l+j}} = \frac{\partial^2}{\partial j^2} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n} \frac{1}{n^{l+j}} \right] \quad (17)$$

我们也很容易得到在(8)式中相应于次带头级的逆 Mellin 变换结果:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n+1} R_{Ns}^n e^{A_n^{qq}s} \\ &= e^{s(\frac{3}{4}-c)} x \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s-1} \sum_{p=0}^2 \sum_{m=0}^{\infty} d_{pm}(s) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^m \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^p \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$d_{0m}(s) = \frac{1}{\Gamma(s+m)} \{a_{0m}(s) + \Psi(s+m)a_{1m}(s) + [\Psi^2(s+m) - \Psi'(s+m)]a_{2m}(s)\}$$

$$d_{1m}(s) = \frac{1}{\Gamma(s+m)} \{-a_{1m}(s) - 2\Psi(s+m)a_{2m}(s)\}$$

$$d_{2m}(s) = \frac{1}{\Gamma(s+m)} a_{2m}(s) \quad (19a)$$

$$a_{0m}(s) = \sum_{k=0}^m H_{0k} G_{m-k}(s)$$

$$a_{1m}(s) = \sum_{k=0}^m H_{1k} G_{m-k}(s)$$

$$a_{2m}(s) = \frac{8}{3} G_m(s) \quad (19b)$$

表式 (18)、(19) 与文献 [5] 中用不同的方法得到的结果是一致的。

为了计算积分 (7), 我们需要有在 $Q^2 = Q_0^2$ 下核子结构函数的初始输入, 就我们现在的关于 QCD 理论的知识, 还不能够从第一原则出发求得它。这里我们采用通常采用的输入形式:

$$F_{NS}(z, Q_0^2) = z^a(1-z)^b. \quad (20)$$

将 (13)、(18—20) 一并代入 (7) 式, 并且利用以下结果^[9]:

$$\begin{aligned} & \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a(1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} \\ &= x^a(1-x)^b \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s \sum_{i=0}^s \mathcal{A}_i(a, b, s) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^i \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} & \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a(1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} \left(\ln \ln \frac{z}{x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a(1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} & \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a(1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} \left(\ln \ln \frac{z}{x}\right)^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a(1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} \end{aligned} \quad (21c)$$

其中:

$$\mathcal{A}_0(a, b, s) = B(s, b+1)$$

$$\mathcal{A}_1(a, b, s) = \frac{1}{2} s B(s, b+1) + \frac{1}{2} [2a - (s+1)] B(s+1, b+1)$$

$$\mathcal{A}_2(a, b, s) = \frac{1}{24} s(3s+1) B(s, b+1)$$

$$+ \frac{1}{4} [2a - (s+1)](s+1) B(s+1, b+1)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[a^2 - a(s+2) + \frac{1}{12} (s+2)(3s+5) \right] B(s+2, b+1)$$

$$\mathcal{A}_3(a, b, s) = \dots \quad (22)$$

我们得到了最后结果:

带头级贡献为

$$e^{s(\frac{3}{4}-c)} x^a (1-x)^b \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{m=0}^M G_m(s) \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m) \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^M}{\Gamma(s+m)} \quad (23)$$

次带头级贡献为:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{g}^2(Q^2) - \bar{g}^2(Q_0^2)}{16\pi^2} e^{s(\frac{3}{4}-c)} x^a (1-x)^b \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s \\ & \times \sum_{M=0}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^M \left[R_0(M, a, b, s) + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right) R_1(M, a, b, s) \right. \\ & \left. + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^2 R_2(M, a, b, s) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

其中 R_0, R_1, R_2 表式见附录. 在我们所关心的参数范围之内, (23)、(24) 式收敛得很快, 即使在小 x 区域内, 前四、五项就精确到 1%.

(23)、(24) 式是本文的主要结果.

还应当指出, r_{NS}^n 具有下列 n 行为:

$$r_{NS}^n = r_{NS}^{n+} + (-1)^n r_{NS}^{n-} \quad (25)$$

n 的奇偶性可以使它分别延拓到 $r_{NS}^{n-} - r_{NS}^{n+}$ 和 $r_{NS}^{n+} + r_{NS}^{n-}$, $r_{NS}^{n-} \neq 0$ 是由于存在夸克-反夸克之间的跃迁 [3], 考虑到结构函数的交叉性质, 就使得, 例如, $F_2^p - F_2^n$ 和 $F_2^{\bar{p}} - F_2^{\bar{n}}$ 它们随 Q^2 的演化关系不同. 但是, r_{NS}^{n-} 很小, 在唯象学的研究中完全可以略去这点差别.

与实验结果比较.

$x F_3(x, Q^2)$ 是非单态分量. 我们把理论结果与 CDHS 组给出的 $x F_3(x, Q^2)$ 数据^[10]进行比较. 注意到

$$R_{3,n} = R_{2,NS}^n - \frac{4}{3} \frac{4n+2}{n(n+1)}, \quad (26)$$

在理论计算中应当选取由此得到的有关 H_{pl} 值. 选取初始输入为

$$x F_3(x, Q_0^2) = \frac{3}{B(0.56, 3.71)} x^{0.56} (1-x)^{2.71} \quad (27)$$

$$Q_0^2 = 5 \text{ GeV}^2 / c^2.$$

这里, 理论预言与实验结果的比较还是初步的, 我们希望能继续利用更多的实验结果讨论这个问题.

附 录

在(24)式中

$$R_0(M, a, b, s) = \sum_{m=0}^M d_{0m}(s) \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=0}^M d_{1m}(s) \frac{\partial \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m)}{\partial s} \\
 & + \sum_{m=0}^M d_{2m}(s) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m)}{\partial s^2} \\
 R_1(M, a, b, s) & = \sum_{m=0}^M d_{1m}(s) \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m) \\
 & + 2 \sum_{m=0}^M d_{2m}(s) \frac{\partial \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m)}{\partial s} \\
 R_2(M, a, b, s) & = \sum_{m=0}^M d_{2m}(s) \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m)
 \end{aligned}$$

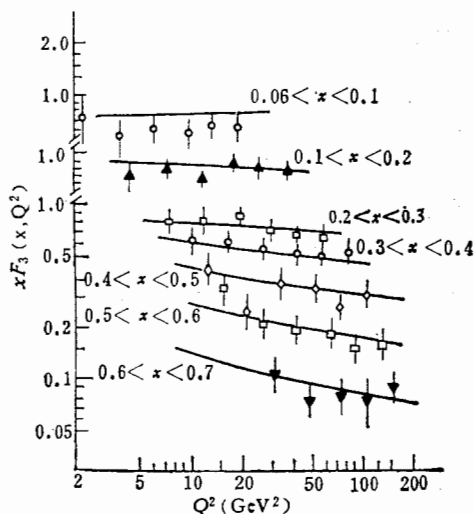


图 1 包括次带头项效应的理论预言与实验数据[10]的比较。($\Lambda = 0.2\text{GeV}$)

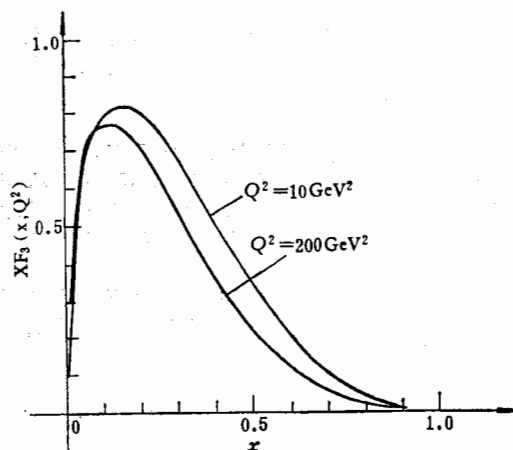


图 2 $xF_3(x, Q^2)$ 随 x 的变化关系 ($\Lambda = 0.2\text{GeV}$)

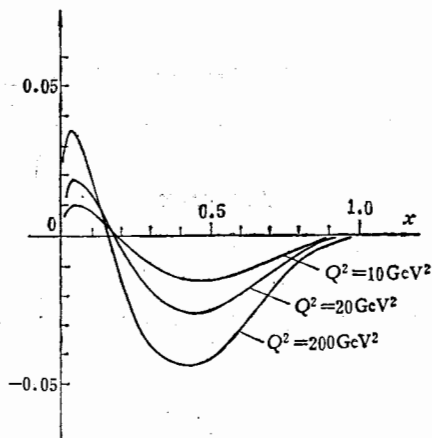


图 3 $xF_3(x, Q^2)$ 中次带头项效应 ($\Lambda = 0.2\text{ GeV}$)

参 考 文 献

- [1] M. Bace, *Phys. Lett.*, **78B** (1978), 132.
- [2] W. Caswell, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 244; D. R. T. Jones, *Nucl. Phys.*, **B75**(1974), 531; H. Georgi and H. D. Politzer, *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 416; D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 980; M. Calvo, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 730; A. De Rujula et al., *Ann. Phys.*, **103** (1977), 315; W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, T. Muta, *Phys. Rev.*, **D18** (1978), 3998; E. G. Floratos, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Nucl. Phys.*, **B129** (1977), 66; (E) **B139** (1978), 545; **B152** (1979), 493; *Phys. Lett.*, **80B** (1979), 269; (E) **87B** (1979), 403; D. W. Duke, R. G. Roberts, *Nucl. Phys.*, **B166** (1980), 243.
- [3] D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Nucl. Phys.*, **B149** (1979), 497.
- [4] D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.*, **32** (1974), 1071.
L. Baulieu and C. Kounnas, *Nucl. Phys.*, **B155** (1979), 429.
A. Bialas and A. J. Buras, *Phys. Rev.*, **D21** (1980), 1825.
- [5] A. Gonzalez-Arroyo, C. Lopez, F. J. Yudurain, *Nucl. Phys.*, **B153** (1979), 161; **B159** (1979), 512; **B166** (1980), 429; **B174** (1980), 474.
- [6] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys.*, **B126** (1977), 298.
A. J. Buras, K. T. F. Gaemers, *Nucl. Phys.*, **B132** (1978), 249.
L. Baulieu, C. Kounnas, *Nucl. Phys.*, **B141** (1978), 423.
J. Kodaira, T. Uematsu, *Nucl. Phys.*, **B141** (1978), 497.
G. Altarelli et al., *Nucl. Phys.*, **B143** (1978), 521; (E) **B146** (1978), 544; **B157** (1979), 461; **B160** (1979), 301.
- [7] R. T. Herrod, S. Wade, *Phys. Lett.*, **96B** (1980), 195.
R. T. Herrod, S. Wade, B. R. Webber, *Z. Physik*, **C9** (1981), 351.
- [8] Tables of Integral Transforms ed. A. Erdelyi et al. Chap. 7.
- [9] Lu Jing-Xian, Shen Qi-xing, Wu Chi-min, Zhao Pei-ying to be published in *Physica Energieae Fortis et Physica Nuclearis*. 7 (1983), 170.
- [10] J. G. H. de Groot et al. *Z. Physik*, **C1** (1979), 143; *Phys. Lett.*, **82B** (1979), 456.
- [11] A. J. Buras, *Physica Scripta*, **23** (1981), 863.

AN ANALYTIC EXPRESSION FOR NON-SINGLET COMPONENT OF NUCLEON STRUCTURE FUNCTIONS TO THE NEXT ORDER EFFECTS

LU JING-XIAN WU CHI-MIN ZHAO PEI-YING

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Using the inverse Mellin transformation method, we get the analytic expression for non-singlet nucleon structure function from its moment to the next order effects. The comparison between theoretical prediction and experimental data is also discussed.