

$SU(6)$ 大统一模型

江 向 东

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文提出的 $SU(6)$ 大统一模型,能容纳两代 $(V - A)$ 耦合的普通费米子和两代 $(V + A)$ 耦合的异常费米子. 通过引进一种分立对称性,使得 $SU(6)$ 通过 Higgs 机制自发破缺时,费米子能得到低质量. 本文还做到了利用简单的 Higgs 场及其真空期望值,使异常费米子的质量比普通费米子的质量重. 得到的 $\sin^2\theta_w$ 在大统一点的值为 $3/8$.

一、引 言

Glashow-Weinberg-Salam 弱-电统一模型的成功和 QCD 理论得到三类实验的支持^[1], 加强了人们建立规范理论的信心. 近几年来,出现了很多把强、弱和电磁相互作用大统一的规范理论模型. 其中最简单的是 $SU(5)$ ^[2] 和 $SO(10)$ ^[3] 模型. 这两个模型虽然优美,但它们是三代费米子重复填充同样的表示,即未解决代的统一问题. 因此,人们早就着手探讨代的统一理论. 按照 Georgi 提出的构造 $SU(N)$ 模型三个原则^[4], 只有 $SU(11)$ 、 $SU(14)$ 模型才能容纳三代和三代以上的费米子. 由于这种高秩群模型出现过多的粒子,于是人们提出一些新的办法来构造低秩群模型. 改变自发破缺机制就是一种有效的办法^[5].

本文将 $SU(5)$ 模型作最简单的扩充,构造了一个最经济的 $SU(6)$ 大统一模型. 由于 $SU(6)$ 的费米子表示对 $SU(6)$ 是实表示,根据 Georgi 提出的“存活假设”^[4], 费米子将获得 10^{15} GeV 量级的质量. 这似乎已否定了采用 Higgs 破缺机制的 $SU(6)$ 模型.

而在这里,我们借助文献[6]提出的一种分立对称性,可以使得费米子不是在 10^{15} GeV 的能量标度下破缺时获得质量,而是在 10^2 GeV 的能量标度下破缺时获得. 这就克服了上述困难. 本文通过选择适当的 Higgs 场及其真空期望值,实现了这样的两次破缺.

$SU(6)$ 模型在避免了代的重复填充之后,容纳的是两代具有左手弱流的普通费米子和两代具有右手弱流的异常费米子. 对于后者,目前的实验尚未发现可观测效应. 这就要求在理论上,后两代的质量必须比前两代的大得多.

本文通过选择一组形式简洁的 Higgs 场及其真空期望值,做到了将异常费米子与普通费米子的质量拉开. 可以使两代异常费米子得到几十个 GeV 或者一百个 GeV 以上的

质量,而两代普通费米子可以得到较低的质量。

引入高维 Higgs 场之后,关于寻求 Higgs 场自作用势的极小值问题,便变得极其复杂^[7],本文未做细致讨论。

二、轻子和夸克的填充

我们把轻子和夸克填入 $SU(6)$ 的五个完全反对称表示:

$$\psi_{iR} = \underline{6}_R, \quad \psi_{ijL} = \underline{15}_L, \quad \psi_{ijkR} = \underline{20}_R,$$

$$\psi_{ijkl} = \underline{15}_L^*, \quad \psi_{ijklmR} = \underline{6}_R^*$$

其中, L 和 R 标志左、右手, $i, j, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 这样, ABJ 反常数刚好相消,理论是可重整的。

将上面五个 $SU(6)$ 的表示按 $SU(5)$ 分解有:

$$\underline{21}_R, \underline{5}_R, \underline{5}_R^*, \underline{5}_L, \underline{5}_L^*, \underline{10}_R, \underline{10}_R^*, \underline{10}_L, \underline{10}_L^*.$$

将两代普通的轻子和夸克填入 $\underline{5}_R, \underline{10}_L$ 和 $\underline{5}_L^*, \underline{10}_R^*$; 将异常的两代分别填入 $\underline{5}_L, \underline{10}_R$ 和 $\underline{5}_R^*, \underline{10}_L^*$. 用 ξ, ν_ξ 和 $\xi', \nu_{\xi'}$ 表示两代异常轻子,用 g, h 和 g', h' 表示两代异常夸克. 两个 $\underline{1}_R$ 表示里填充两个中性粒子 N_1 和 N_2 . 具体填充如下:

$$\underline{5}_R = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e^c \\ \nu_e^c \end{vmatrix}_R,$$

$$\underline{10}_L = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ & 0 & 23 & 24 & 25 \\ & & 0 & 34 & 35 \\ & & & 0 & 45 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & c_3^c & -c_2^c & u_1 & d_1 \\ & 0 & c_1^c & u_2 & d_2 \\ & & 0 & u_3 & d_3 \\ & & & 0 & e^c \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_L$$

$$\underline{5}_L^* = \begin{vmatrix} 2345 \\ 1345 \\ 1245 \\ 1235 \\ 1234 \end{vmatrix}_L = \begin{vmatrix} s_1^c \\ -s_2^c \\ s_3^c \\ \mu^- \\ \nu_\mu \end{vmatrix}_L,$$

$$\underline{10}_R^* = \begin{vmatrix} 0 & 345 & 245 & 235 & 234 \\ & 0 & 145 & 135 & 134 \\ & & 0 & 125 & 124 \\ & & & 0 & 123 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & u_3 & u_2 & c_1^c & s_1^c \\ & 0 & u_1 & -c_2^c & -s_2^c \\ & & 0 & c_3^c & s_3^c \\ & & & 0 & \mu^- \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_R$$

$$\underline{5}_L = \begin{vmatrix} 16 \\ 26 \\ 36 \\ 46 \\ 56_L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \xi^c \\ \nu_{\xi}^c \end{vmatrix},$$

$$\underline{10}_R = \begin{vmatrix} 0 & 126 & 136 & 146 & 156 \\ & 0 & 236 & 246 & 256 \\ & & 0 & 346 & 356 \\ & & & 0 & 456 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & h_3^c & -h_2^c & h_1 & g_1 \\ & 0 & h_1^c & h_2 & g_2 \\ & & 0 & h_3 & g_3 \\ & & & 0 & \xi^c \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_R$$

$$\underline{5}_R^* = \begin{vmatrix} 23456 \\ 13456 \\ 12456 \\ 12356 \\ 12346 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} g_1^c \\ -g_2^c \\ g_3^c \\ \xi' \\ \nu_{\xi'} \end{vmatrix}_R,$$

$$\underline{10}_L^* = \begin{vmatrix} 0 & 3456 & 2456 & 2356 & 2346 \\ & 0 & 1456 & 1356 & 1346 \\ & & 0 & 1256 & 1246 \\ & & & 0 & 1236 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & h_3^c & h_2^c & h_1^c & g_1^c \\ & 0 & h_1^c & -h_2^c & -g_2^c \\ & & 0 & h_3^c & g_3^c \\ & & & 0 & \xi' \\ & & & & 0 \end{vmatrix}_L$$

$$\mathbf{1}_R = (6)_R = N_{1R}, \quad \mathbf{1}_R = (12345)_R = N_{2R}$$

上面的场量中, $\psi^c = C\tilde{\psi}$, $C = ir_2r_4$ 为电荷共轭算符. 本文用的度规是取

$$r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为电荷算符应是 $SU(6)$ 的一个生成元, 所以 $\text{Tr}Q = 0$, 即属每一不可约表示的所有粒子总电荷为零. 对 $\mathfrak{6}_R$ 有:

$$3Q_d + Q_e = 0$$

$$Q_d = -\frac{1}{3}Q_e = -\frac{1}{3}e$$

Q 算符的形式为:

$$Q = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{3}} T_{15}$$

其中 T'_{15} 是 $SU(6)$ 的一个对角生成元, $SU(6)$ 的生成元见文献 [5] “中国科学” 的文章. 对应于 $U(1)$ 变换的超荷算符 Y 的形式为:

$$Y = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

超荷 Y 同电荷 Q 及弱同位旋第三分量 I_3 的关系为:

$$Y = Q - I_3$$

三、破缺机制

根据“存活假设”, $SU(6)$ 通过 Higgs 机制第一步自发破缺到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 时, 费米子将得到 10^{15} GeV 量级的质量. 为解决这个困难, 我们引进文献 [6] 提出的一种分立对称性.

假定拉格朗日在下面定义的分立对称 S 下不变.

$$\begin{aligned} \phi_L &\rightarrow i\phi_L, & \phi_R &\rightarrow -i\phi_R \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu, & \chi &\rightarrow \chi, & \phi &\rightarrow -\phi \end{aligned}$$

其中 ϕ_L 代表 ϕ_{ijL} 或 ϕ_{ijkL} ; ϕ_R 代表 ϕ_{iR} , ϕ_{ijR} 或 ϕ_{ijklR} . A_μ 是规范场. χ 和 ϕ 是两类 Higgs, 都是属于大统一群 $SU(6)$ 的不可约表示, 其真空期望值取为:

$$\langle \chi \rangle \sim 10^{15} \text{GeV}, \quad \langle \phi \rangle \sim 10^2 \text{GeV}$$

显然, 当拉格朗日具有 $SU(6) \times S$ 不变性时, χ 不能与费米子场耦合成 $SU(6) \times S$ 不变质量项. 因此在 10^{15} GeV 这步破缺时, 费米子不会得到大质量.

第一步破缺是: $SU(6) \times S \xrightarrow{EVE \sim 10^{15} \text{GeV}} SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times S$, 这可通过伴随表示的 Higgs χ'_i 和基础表示的 Higgs χ_i 来完成. 它们的真空期望值分别取作:

$$\langle \chi'_i \rangle = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & & & & & \\ & -\frac{2}{3} & & & & \\ & & -\frac{2}{3} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix} a, \quad \langle \chi_i \rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{vmatrix}$$

其中 $a, b \sim 10^{15}$ GeV.

第二步 $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times S \xrightarrow{EVE \sim 10^2 \text{ GeV}} SU(3)_c \times U(1)_{cm}$ 时, 可引入 6 维 Higgs ϕ_i , 并取真空期望值为:

$$\langle \phi_i \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad v \sim 10^2 \text{ GeV}$$

在这步破缺中, 费米子将获得质量.

四、费米子的质量

1. 异常费米子的质量

在前面的表示中, 我们填充了两代普通费米子和两代异常费米子. 对于后者, 实验上至今尚未发现它们的迹象. 为了解释这点, 我们期望找到合适的 Higgs, 在第二步破缺后, 能抬高异常费米子的质量而不影响普通费米子.

如果我们取零级近似, 只考虑异常的两代, 我们发现, 只要取 Higgs ϕ_{ij}^k 和 ϕ_{ijk}^m 及下列真空期望值:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{15}^1 \rangle &= \langle \phi_{25}^2 \rangle = \langle \phi_{35}^3 \rangle = f, & \langle \phi_{45}^4 \rangle &= -3f, \\ \langle \phi_{512}^{12} \rangle &= \langle \phi_{513}^{13} \rangle = \langle \phi_{523}^{23} \rangle = w, \\ \langle \phi_{514}^{14} \rangle &= \langle \phi_{524}^{24} \rangle = \langle \phi_{534}^{34} \rangle = -w, \\ \langle \phi_{516}^{16} \rangle &= \langle \phi_{526}^{26} \rangle = \langle \phi_{536}^{36} \rangle = -w \end{aligned}$$

$\langle \phi_{546}^{46} \rangle = 3w$ 其余项为零. $f \sim w \sim 10^2$ GeV, 就能通过下列 Yukawa 耦合而满足上述愿望.

$$\begin{aligned} C_1 \bar{\phi}_L^{ij} \langle \phi_{ij}^k \rangle \phi_{Rk} &= C_1 f (\bar{d}_L d_R - 3 \bar{e}_L e_R) \\ \frac{C_2}{2} \bar{\phi}_L^{ijk} \langle \phi_{ijk}^m \rangle \phi_{Rklm} &= C_2 f (3 \bar{\mu}_L \mu_R - \bar{s}_L s_R - 2 \bar{h}_L h'_R + 2 \bar{h}_L h_R) \\ \frac{C_3}{3!} \bar{\phi}_L^{ijkl} \langle \phi_{ijkl}^m \rangle \phi_{Riklmn} &= C_3 f^* (\bar{g}'_L g'_R - 3 \bar{\xi}'_L \xi'_R) \\ C_4 \bar{\phi}_L^{ij} \langle \phi_i^{+kl} \rangle \phi_{Rijkl} &= C_4 f^* (2 \bar{u}_L u_R - 2 \bar{c}_L c_R + \bar{g}_L g_R - 3 \bar{\xi}_L \xi_R) \\ D_1 \bar{\phi}_L^{ij} \langle \phi_i^{+klm} \rangle \phi_{Rklm} &= D_1 w^* (-\bar{u}_L u_R + \bar{c}_L c_R + \bar{g}_L g_R - 3 \bar{\xi}_L \xi_R) \\ D_2 \bar{\phi}_L^{ijkl} \langle \phi_{ijk}^m \rangle \phi_{Rlmn} &= D_2 w (\bar{s}_L s_R - 3 \bar{\mu}_L \mu_R - \bar{h}_L h'_R + \bar{h}_L h_R) \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 和 D_1, D_2 为 Yukawa 耦合常数. 为了简单, 真空期望值全取实数. 当我们取: $f = w, C_1 = 0, C_2 = D_2, 2C_4 = D_1$ 时, 便得到:

$$\begin{aligned} m_\xi &= 9C_4 f & m_g &= 3C_4 f & m_h &= 3C_2 f \\ m_{\xi'} &= 3C_3 f & m_{g'} &= C_3 f & m_{h'} &= 3C_2 f \end{aligned}$$

可见, 此时只有异常费米子获得质量. 若取 f 为 300 GeV 量级, 耦合常数取 10^{-1} 量级, 那

末, 这些重费米子的质量可达几十 GeV 以上.

2. 普通费米子的质量

上面已做到了将异常费米子的质量抬高. 若考虑全部费米子的质量, 只要取上节提到的 6 维 Higgs 的如下 Yukawa 耦合:

$$A_1 \bar{\phi}_L^{ij} \langle \phi_i \rangle \phi_{Rj} = A_1 v (-\bar{e}_L e_R - \bar{d}_L d_R + \bar{\nu}_{eL} N_{1R})$$

$$\frac{A_2}{3!} \bar{\phi}_L^{ijkl} \langle \phi_l \rangle \phi_{Rijk} = A_2 v (\bar{\mu}_L \mu_R + \bar{s}_L s_R - \bar{h}_L h'_R - \bar{h}'_L h_R)$$

$$\frac{A_3}{2} \bar{\phi}_L^{ij} \langle \phi^{+k} \rangle \phi_{Rijk} = A_3 v^* (\bar{u}_L u_R + \bar{c}_L c_R - \bar{\xi}_L \xi_R - \bar{g}_L g_R)$$

$$\frac{A_4}{4!} \bar{\phi}_L^{ijkl} \langle \phi^{+m} \rangle \phi_{Rijklm} = A_4 v^* (-\bar{\xi}'_L \xi'_R - \bar{g}'_L g'_R + \bar{\nu}_{\mu L} N_{2R})$$

此时让前面的 $C_1 \neq 0$, 让 $v = v^* = f$, $A_1 = -2C_1$, $A_4 = 0$. 这样, 四代粒子的质量本征值为:

$$\begin{aligned} m_e &= C_1 v & m_d &= 3C_1 v & m_u &= A_3 v \\ m_\mu &= A_2 v & m_s &= A_2 v & m_c &= A_3 v \\ m_\xi &= (A_3 + 9C_4) v & m_g &= (3C_4 - A_3) v & m_h &= (3C_2 + A_2) v \\ m_{g'} &= 3C_3 v & m_{g'} &= C_3 v & m_{h'} &= (3C_2 - A_2) v \\ m_{N_1} &= m_{\nu_\xi} = 2C_1 v, & m_{\nu_e} &= m_{\nu_\mu} = m_{\nu_{g'}} = m_{N_2} = 0 \end{aligned}$$

关于普通费米子的质量关系虽不够理想, 但只要再选取二阶反对称 Higgs ϕ_{ij} , 并取 $\langle \phi_{56} \rangle = v$, 则可以通过调整质量本征值中的耦合常数, 而使得 m_s 和 m_μ , m_u 和 m_c 拉开. 不过, 那时的质量表式没有现在这样简洁. 这里不再列出.

在我们的理论中有质量为零的 N_{2R} 粒子, 它是 $SU(5)$ 的单态, 因此不参加强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用, 只与质量为大统一质量标度的规范场耦合. 在我们的模型中它也不与 Higgs 粒子耦合. 所以, 在目前的实验中很难观察到它.

另外, 利用此模型导出的 $\sin^2 \theta_w$ 在大统一能量标度处的值为 $3/8$, 这与标准大统一模型 $SU(5)$ 的结果一致. 并且, $\sin^2 \theta_w$ 的重整化也与 $SU(5)$ 模型一样, 这里不再赘述.

结论: 本文采用一种附加的分立对称性, 构造了一个包含两代 ($V - A$) 普通费米子和两代 ($V + A$) 异常费米子的 $SU(6)$ 大统一模型. 适当选取 Higgs 机制可以将普通费米子质量与异常费米子质量分开.

作者感谢杜东生、周咸建、薛丕友和东方晓同志的耐心帮助和有益的讨论.

参 考 文 献

- [1] 杜东生, 1980年武汉强子结构讨论会文集, “大统一理论”, p. 150.
- [2] Georgi, H. & Glashow, S. L. *ibid.*, **32**(1974), 438.
- [3] Pati, J. C. & Salam, A., *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 275; Fritzsch, H. & Minkowski, P., *Ann. Phys.*, **93**(1975), 193; *Nucl. Phys.*, **B103**(1976), 61; Georgi, H., *Particles and Fields, 1974* (APS/DPF Williamsburg), ed. C. E. Carlson, AIP, New York, 1975, p. 575; Glashow, S. L., HUTP-77/A005 (1977).

- [4] Georgi, H., *Nucl. Phys.*, **B156**(1979), 126.
- [5] P. Langacker, G. Segre and A. Weldon, *Phys. Lett.* **73B**(1978), 87; *Phys. Rev.* **D18**(1978), 552; M. Abud, F. Buccella, H. Ruegg and C. A. Savoy, *Phys. Lett.*, **67B**(1977), 313; M. Yoshimura, *Prog. Theor. Phys.*, 58(1977), 972; H. Georgi and A. Pais, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 2746. K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu and Y. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **58**(1977), 1901, 1914; S. K. Yun, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 3472. *Int. J. Math. Phys.*, **18**(1979), 359; J. E. Kim, *Phys. Lett.*, **107B**(1981), 69;
马中骥、杜东生、岳宗五、薛丕友, *中国科学*, **4**(1981), 415.
- [6] 马中骥、杜东生、薛丕友, *中国科学*, **11**(1981), 1322.
- [7] 高崇寿, 1982年杭州会议报告“关于 $SU(N)$ 大统一理论结构的一些讨论”.
J. S. KIM, *Nucl. Phys.*, **B196**(1982), 285.

AN $SU(6)$ GRAND UNIFIED MODEL

JIANG XIANG-DONG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A model of grand unified theory based on $SU(6)$ gauge group is proposed. It can accommodate two generations of ordinary fermions with $V-A$ weak coupling and two generations of anomalous fermions with $V+A$ weak coupling. In this model a new discrete symmetry is introduced which insures existence of fermions with lower masses when $SU(6)$ gauge symmetry is spontaneously broken. We choose simple Higgs fields with appropriate vacuum expectation values so that the masses of anomalous fermions are heavier than those of ordinary fermions. This model also gives the same value of Weinberg angle, $\sin^2\theta_w = \frac{3}{8}$, as in the usual $SU(5)$ grand unified model at the grand unified scale.