第 8 卷 第 6 期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 6
1984 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1984

自旋反转同步辐射的高阶量子修正

吴长勤 宋 皓 倪光炯
(复 旦 大 学)

摘 要

本文讨论电子的同步辐射使其自旋横向极化的效应，用两种方法导出光子反冲对自旋反转辐射几率的高阶量子修正．计算表明这种修正使最终的极化率减小而使弛豫时间增长．

一、引 言

高速电子沿圆周运动时会发生辐射．在理论上首先由 Schott 在 1912 年预言，实验上于1948年观察到，其近代解释则在 1949 年由 Schwinger 给出[1]．随着各类同步加速器的建造，这种辐射的实际应用以及它在天体物理上的意义日益引起重视．但是一个有趣的物理现象直到 1961 年才被 Ternov 等人所预言[2]． 让正(负)电子在磁场中作圆周运动，开始时它们自旋取向的上下几率均等，过了一段弛豫时间后，就会出现正(负)电子自旋沿(反)着磁场极化的现象．他们的计算结果是：极化率

$$P = P_0(1 - e^{-t/\tau_0}), \tag{1.1}$$

其中

$$P_0 = 8/5\sqrt{3}, \tag{1.2}$$

而弛豫时间

$$\tau_0 = \left[\frac{5\sqrt{3}}{8}\,\frac{e^2\hbar\varepsilon^5}{m^7c^{12}\rho^3}\right]^{-1}. \tag{1.3}$$

其中 e、m 和 ε 是电子的电荷、静质量和总能量． ρ 是轨道半径． 这里两件事是有兴趣的．首先，P 最后趋向于 $P_0 \simeq 0.928$ 而不是 1；其次，τ_0 并不是很短的时间． 以北京正在建造中的正负电子对撞机 (BEPC) 为例，有效半径 $\rho = 10.3445$ 米，如电子能量 $\varepsilon = 2.8$ GeV[3]，弛豫时间将约为 $\tau_0 = 38.8$ 分钟．1963 年 Sokolov 和 Ternov 算自旋反转的同步辐射总功率与不反转自旋的辐射总功率之比仅为[4]

$$\frac{w_{反转}}{w_{不反转}} = 3\left(\frac{\hbar\varepsilon^2}{m^3\rho c^5}\right)^2\left(1 \pm \frac{35\sqrt{3}}{64}\right). \tag{1.4}$$

式中正或负对应于电子初始自旋方向顺着或反着磁场的情形． 对 BEPC 估计(1.4)式仅为 10^{-13} 的量级．可见，一般情况下自旋反转同步辐射功率是比较小的．

1967 年 Baier 和 Katkov[5] 把理论推广到非均匀磁场．1968 年人们首先在实验室中测到电子极化，1975 年 Learned 等人在 SLAC 的 SPEAR 上测出 $P_0 = 0.75 \pm 0.05$[6]．

本文 1983 年 9 月 21 日收到．

比(1.2)式为小的原因被认为是退极化效应所致[7]. 定性地了解这一电子横向极化现象并不困难. 电子磁矩相对磁场的两种取向形成两个分裂能级嵌在接近连继谱的轨道能级之中，电子放出辐射时的自旋反跳可视为一种两能级间的磁偶极跃迁过程. 由这种朴素观念可很快导出自旋极化的弛豫时间为[8]:

$$\tau_{\text{naive}}=\frac{15}{16}\sqrt{3}\,\tau_0, \tag{1.5}$$

这是(1.3)式的 1.62 倍，但最后极化率达到

$$P_{\text{naive}}=1. \tag{1.6}$$

这与(1.2)式有质的区别. 原因是简化推导中忽略了自旋与轨道耦合的相对论效应.

于是有改进的半经典处理方案[8]: 利用自旋在磁场中运动的相对论性方程，即 Thomas-BMT 方程[9]，考虑 g 因子任意的带电粒子，定义反常磁矩比值

$$a=(g-2)/2, \tag{1.7}$$

则最后横向极化率

$$P=F_2(a)\left[F_1(a)e^{-\sqrt{12}|a|}+\frac{a}{|a|}F_2(a)\right]^{-1}, \tag{1.8}$$

而弛豫时间

$$\tau=\tau_0\left[F_1(a)e^{-\sqrt{12}|a|}+\frac{a}{|a|}F_2(a)\right]^{-1}. \tag{1.9}$$

函数 $F_i(a)$ 见附录 A. 对于正负电子，$g=2$, $a=0$, (1.8)、(1.9) 与(1.2)、(1.3)相同. 当 $g\gg 1$，则趋近于 (1.5) (1.6) 的结果，原因是 $g\gg 1$ 使自旋和轨道运动脱耦了.

本文目的是研究高阶量子修正. 为表征同步辐射中量子效应的大小，可引入两个无量纲参数. 一个是电子轨道运动能级间隔

$$\Delta\varepsilon=\hbar\omega_0=\hbar\left(\frac{eBc}{\varepsilon}\right). \tag{1.10}$$

$\left(\omega_0=\frac{c}{\rho}\right.$ 是电子作圆周运动的角频率，B 是磁场强度.$\left.\right)$ 与电子能量本身之比值

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}=(B/B_0)\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2, \tag{1.11}$$

其中

$$B_0=\frac{m^2c^3}{e\hbar}=4.4\times10^{13}\ \text{高斯}. \tag{1.12}$$

另一参量表征光子辐射场对电子轨道运动的反冲作用，记为

$$\chi=(B/B_0)\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right), \tag{1.13}$$

显然

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}=\chi\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3=\gamma^{-3}\chi. \tag{1.14}$$

其中 $\gamma=\varepsilon/mc^2\gg 1$，注意对目前一切加速器，$B\ll B_0$, $\chi\ll 1$, $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$ 就更小了. 因此电子轨道可以作经典处理. 但考虑到某些天体如中子星表面，B 可达到 10^{12} 高斯，于是 χ 可能

接近甚至超过 1，我们将更认真地计入光子的反冲作用，而计算到 χ 的高阶修正． 在第二、三节中将分别叙述两种计算方法．第四节是总结和讨论，附录中则列出一些正文引用的公式和推导细节．

二、自旋反转同步辐射的高阶量子修正(推导之一)

先仿效文献[10]，写出电子在均匀磁场中的准经典波函数：

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2H}} u(\boldsymbol{P}) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \phi(\boldsymbol{r}) \tag{2.1}$$

其中

$$u(\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} \sqrt{H+m}\, w \\ \dfrac{1}{\sqrt{H+m}} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}) w \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{P} = -i\hbar\nabla - e\boldsymbol{A}$, $H = \sqrt{P^2 + m^2}$，w 是二分量自旋波函数，$\phi(\boldsymbol{r})$ 是无自旋的准经典波函数．利用微扰论可得出对时间积分的微分辐射几率为

$$dw = \sum_f |a_{fi}|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad a_{fi} = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{fi}(t)\,dt, \tag{2.3}$$

$$V_{fi}(t) = \frac{e\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\hbar\omega}} \langle f|Q(t)|i\rangle e^{i\omega t}. \tag{2.4}$$

其中

$$Q(t) = \frac{u_f^+(\boldsymbol{P})}{\sqrt{2H}} (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}^*) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}(t)} \frac{u_i(\boldsymbol{P})}{\sqrt{2H}}, \tag{2.5}$$

是 Heisenberg 算符，$\boldsymbol{e}$ 为光子的极化矢量，利用末态的完备性，再作变量代换

$$\tau = t_2 - t_1, \quad t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \tag{2.6}$$

得

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{d^3k}{4\pi^2} \int e^{-i\omega\tau} \left\langle i \left| Q^+\left(t+\frac{\tau}{2}\right) Q\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \right| i \right\rangle d\tau. \tag{2.7}$$

考虑光子场对电子的量子作用，须计入下列对易关系：

$$\boldsymbol{P} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{P} - \hbar\boldsymbol{k}), \tag{2.8}$$

$$H(\boldsymbol{P}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} H(\boldsymbol{P} - \hbar k). \tag{2.9}$$

再注意在极端相对论条件下的辐射集中在电子运动方向的一个小角度内： $\Delta\theta \sim m/\varepsilon$．我们将在下面展开小量 τ（对应于电子速度改变 $\Delta\theta$ 的时间间隔）到二级而近似地得到

$$\langle i|Q_2^+ Q_1|i\rangle = R_2^* R_1 \exp\left\{ i\omega\tau + i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1 - \omega\tau)\right\}. \tag{2.10}$$

其中脚标 2 和 1 分别指 $\left(t+\frac{\tau}{2}\right)$ 和 $\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ 而 $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$．我们只考虑自旋反转的辐射，如初态电子的极化状态由密度矩阵 $\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\zeta}_i\cdot\boldsymbol{\sigma})$ 描写，其中 $\boldsymbol{\zeta}_i = \boldsymbol{\zeta}$ 是初态极化

矢量，相应的末态电子极化矢量 $\boldsymbol{\zeta}_f = -\boldsymbol{\zeta}_i = -\boldsymbol{\zeta}$，则对光子的极化 ($\boldsymbol{e}$) 求和后，(2.10) 中的

$$\sum_{e} R_2^* R_1 = \boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2[1 - (\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{n})^2] + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{B}_2) + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_2)(\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{B}_1) - i[\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})] \cdot (\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2), \tag{2.11}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon'}\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right). \tag{2.12}$$

$\boldsymbol{v}$ 是电子速度而 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ 是光子发射方向的单位向量．将(2.11)中 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 按 τ 展开到二级，代回(2.10)和(2.7)再对光子的波矢积分，就得到单位时间的自旋反转辐射总几率为

$$\begin{aligned} w = \frac{e^2\hbar}{16\pi^2\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int \frac{d^3k}{\omega}\exp(i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x} - ik'\tau) \\ \times \Big\{k'^2\left[2 - \frac{\tau^2\omega_0^2}{2} - 2\frac{m}{\varepsilon} - i\tau\left(1 - 2\frac{m}{\varepsilon}\right)\boldsymbol{\zeta}\cdot(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}})\right] \\ + \left(\frac{\tau^2\omega_0^2}{2} + 2\frac{m}{\varepsilon}\right)(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{k}')^2 + i\left(1 - 2\frac{m}{\varepsilon}\right)\tau(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}) \\ + 2(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\zeta})\left(1 - 2\frac{m}{\varepsilon} + \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{\tau^2\omega_0^2}{4}\right) \\ - \frac{\tau^2}{2}\left(1 - \frac{m}{\varepsilon}\right)^2(\boldsymbol{k}'\cdot\dot{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\zeta})(\boldsymbol{\zeta}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}) \\ + k'^2\cos\theta\left[v\left(\frac{\tau^2\omega_0^2}{4} - 2 + 2\frac{m}{\varepsilon}\right)\right. \\ + 2(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{v})\dot{\zeta}_{/\!/}\left(-1 + \frac{m}{\varepsilon} + \frac{\tau^2\omega_0^2}{8}\right) \\ \left.- i\tau\left(-1 + \frac{m}{\varepsilon}\right)(\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{\zeta})_{/\!/}\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 $\boldsymbol{k}' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\boldsymbol{k}$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角，$\zeta_{/\!/}$ 和$(\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{\zeta})_{/\!/}$ 分别表示 $\boldsymbol{\zeta}$ 和$(\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{\zeta})$在速度 $\boldsymbol{v}$ 方向的投影．记 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$，引入函数

$$F(x) = \int_0^\infty dk' \frac{e^{-ik'(\tau+x)} - e^{-ik'(\tau-x)}}{\left(1 + \frac{\hbar k'}{\varepsilon}\right)^3}, \tag{2.14}$$

$$J(x) = \int_0^\infty dk' \frac{e^{-ik'(\tau+x)} + e^{-ik'(\tau-x)}}{(1 + \hbar k'/\varepsilon)^3}. \tag{2.15}$$

注意到 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\dot{\boldsymbol{v}}$，w 可表示为

$$w = \frac{e^2\hbar}{16\pi^2\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{\left[2 - \frac{\tau^2\omega_0^2}{2} - 2\frac{m}{\varepsilon} - i\tau\left(1 - 2\frac{m}{\varepsilon}\right)\boldsymbol{\zeta}\cdot(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}})\right]\frac{2\pi}{i}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{\tau^2\omega_0^2}{2}+2\frac{m}{\varepsilon}\right)\frac{2\pi}{i}\left[\frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{F}{x^3}+(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{x})^2\left(\frac{3}{x^5}F-\frac{3}{x^4}\frac{\partial F}{\partial x}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{x^3}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right]+i\left(1-2\frac{m}{\varepsilon}\right)\tau\left[\left(-\frac{F}{x^3}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\boldsymbol{\zeta}\cdot(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}})\right]\frac{2\pi}{i}\\
&+2(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{v})\left(1-2\frac{m}{\varepsilon}+\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2-\frac{\tau^2\omega_0^2}{4}\right)\\
&\times\frac{2\pi}{i}\left[\left(-\frac{F}{x^3}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial x}\right)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\zeta})+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{x})\left(\frac{3}{x^5}F-\frac{3}{x^4}\frac{\partial F}{\partial x}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{x^3}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right]-\frac{\tau^2}{2}\left(1-\frac{m}{\varepsilon}\right)^2(\boldsymbol{\zeta}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\frac{2\pi}{i}\left(-\frac{F}{x^3}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial x}\right)(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\zeta})\\
&+\frac{2\pi}{x}\left[-\frac{1}{i}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\frac{1}{ix}\frac{\partial J}{\partial x}\right]\times\left[v\left(\frac{\tau^2\omega_0^2}{4}-2+2\frac{m}{\varepsilon}\right)\right.\\
&\left.\left.+2(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{v})\zeta_{/\!/}\left(-1+\frac{m}{\varepsilon}+\frac{\tau^2\omega_0^2}{8}\right)-i\tau\left(-1+\frac{m}{\varepsilon}\right)(\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{\zeta})_{/\!/}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

上面的 $F(x)$ 和 $J(x)$ 经计算后可表示成

$$
\begin{aligned}
F(x)=&\left(\frac{\varepsilon}{\hbar}\right)^3\left[-\frac{i\times\hbar}{\varepsilon}-\frac{[\mu+i(\tau+x)]^2}{2}e^{\frac{\varepsilon}{\hbar}[\mu+i(\tau+x)]}E_i\left(-\frac{\varepsilon}{\hbar}(\mu+i(\tau+x))\right)\right.\\
&\left.+\frac{[\mu+i(\tau-x)]^2}{2}e^{\frac{\varepsilon}{\hbar}[\mu+i(\tau-x)]}E_i\left(-\frac{\varepsilon}{\hbar}(\mu+i(\tau-x))\right)\right]_{\mu\to0}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

$$
\begin{aligned}
J(x)=&\left(\frac{\varepsilon}{\hbar}\right)^3\left\{-(\mu+i\tau)\frac{\hbar}{\varepsilon}+\left(\frac{\hbar}{\varepsilon}\right)^2-\frac{[\mu+i(\tau+x)]^2}{2}e^{\frac{\varepsilon}{\hbar}[\mu+i(\tau+x)]}\right.\\
&\cdot E_i\left[-\frac{\varepsilon}{\hbar}(\mu+i(\tau+x))\right]\\
&\left.-\frac{[\mu+i(\tau-x)]^2}{2}e^{\frac{\varepsilon}{\hbar}[\mu+i(\tau-x)]}E_i\left[-\frac{\varepsilon}{\hbar}(\mu+i(\tau-x))\right]\right\}_{\mu\to0}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

其中 $E_i(\xi)$ 是指数积分函数[11]．引进 μ 的目的是用它来确定对 τ 的积分迴路．现在写出 $E_i(\xi)$的渐近展开式为:

$$
\begin{aligned}
E_i\left(-\frac{\varepsilon}{\hbar}[\mu+i(\tau\pm x)]\right)=&e^{-\frac{\varepsilon}{\hbar}[\mu+i(\tau\pm x)]}\left\{-\frac{\hbar}{\varepsilon[\mu+i(\tau\pm x)]}\right.\\
&+\frac{\hbar^2}{\varepsilon^2[\mu+i(\tau\pm x)]^2}-\frac{2\hbar^3}{\varepsilon^3[\mu+i(\tau\pm x)]^3}\\
&\left.+\frac{6\hbar^4}{\varepsilon^4[\mu+i(\tau\pm x)]^4}-\cdots\cdots\right\}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

如果只取前三项则用留数定理经过仔细的计算

$$
w=\frac{5\sqrt{3}}{16}\frac{e^2\hbar}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\left(1-\frac{2}{9}\zeta_{/\!/}^2-\frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right)
\tag{2.20}
$$

其中 $\zeta_\perp$ 表示极化矢量沿磁场方向的分量．此式对正电子$(e>0)$和负电子$(e<0)$都适用．(2.20)是文献上已有的结果[10]，但我们在计算过程中没有做任何忽略 χ 高阶修正的

近似，使得最后出现的结果用 E_i 来表示，这样前面引入的计算步骤使我们可以立刻得到高阶修正.

事实上，只要在展开式(2.19)中再多保留一项，即保留到第四项，经过更冗长的计算就得出

$$w=\frac{5\sqrt{3}}{16}\frac{e^2\hbar}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\Big[1-\frac{2}{9}\zeta_{/\!/}^2-\frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp \\ -\chi\frac{32\sqrt{3}}{5}\left(1-\frac{1}{6}\zeta_{/\!/}^2-\frac{35\sqrt{3}}{64}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right)\Big] \tag{2.21}$$

其中 χ 已在(1.13)式定义. 继续保留(2.19)式中展开的高次项，便可得到对 χ 展开的高级修正，不过计算更繁. 下一节我们改取一种稍为简单也更普遍些的方法.

三、自旋反转同步辐射的高阶量子修正(推导之二)

让我们明显地写出(2.2)式的电子旋量波函数：

$$w_i=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_0}{2}e^{-i\varphi_0/2}\\ \sin\frac{\theta_0}{2}e^{i\varphi_0/2}\end{pmatrix},\qquad w_f=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta_0}{2}e^{-i\varphi_0/2}\\ \cos\frac{\theta_0}{2}e^{i\varphi_0/2}\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

式中 (θ_0, φ_0) 为电子自旋 $\boldsymbol{\zeta}$ 对于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的极坐标角度. 从对称性考虑可见最后跃迁几率应与 ϕ_0 无关，故可取 $\phi_0=0$. 我们选坐标轴为：磁场沿 z 轴，电子的瞬时运动方向为 x 轴，加速度方向为 y 轴，辐射 $\boldsymbol{n}$ 的方向与 x 轴夹角为 θ，在 yz 平面上的投影与 y 轴夹角为 ϕ.

当 $\chi\ll 1$ 时，我们可以略去(2.7)式中算符 Q_1 和 Q_2 的非对易性而写出单位时间内自旋反转的辐射几率对于频率和方向的分布：

$$\frac{d^2w}{d\Omega\,d\omega}=\frac{\omega_0}{2\pi}\frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{\omega^2}{4\pi^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)\,e^{i\omega t}\,dt\right|^2, \tag{3.2}$$

其中 $Q(t)$ 已在(2.5)式定义. 利用(2.2)和(3.1)，考虑到 $\boldsymbol{n}$ 很靠近 x 轴，即 $\theta\sim 1/\gamma$，又 $\omega_0=B/\rho$，$\omega_0 t\sim 1/\gamma$，$B\sim 1-\frac{1}{2\gamma^2}$，可展开

$$t-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)t-\frac{1}{\rho}\theta\cos\phi t^2+\frac{1}{3\rho^2}t^3\right\}, \tag{3.3}$$

再作代换 $t'=t+\rho\theta\cos\phi$，并利用积分公式[12]

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,e^{\frac{i}{2}\omega\left\{\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\sin^2\phi\right)t'+\frac{1}{3\rho^2}t'^3\right\}}=\frac{\rho}{\gamma}(1+\xi^2)^{1/2}\frac{2}{\sqrt{3}}K_{1/3}(\eta), \tag{3.4}$$

其中 $\xi^2=\gamma^2\theta^2\sin^2\phi$，$\eta=\frac{1}{2}\nu(1+\xi^2)^{3/2}$，$\nu=2\omega/3\gamma^3\omega_0$，$K_{1/3}(\eta)$ 是 1/3 阶的变型 Bessel 函数. 对光子极化求和，最后得

$$\frac{d^2w}{d\Omega\,d\omega}=\frac{3\sqrt{3}}{40\pi^3}\frac{\nu^3(1+\xi^2)}{\tau_0\gamma^4\omega_0}\{2\sin^2\theta_0K_{1/3}^2(\eta)+2\xi\sin\theta_0\cos\theta_0K_{1/3}^2(\eta)$$

$$+\cos^2\theta_0(1+\xi^2)[K_{1/3}^2(\eta)+K_{2/3}^2(\eta)]+z\cos\theta_0\sqrt{1+\xi^2}K_{1/3}(\eta)K_{2/3}(\eta)\}. \tag{3.5}$$

固定 $\boldsymbol{n}$ 方向对一切频率求和,注意 $dw=\frac{3\omega_0\gamma^3}{(1+\xi^2)^{3/2}}d\eta$,我们就有

$$\frac{d\omega}{d\Omega}=\frac{16\gamma}{45\pi^2\tau_0}(1+\xi^2)^{-5}\left\{2\sin^2\theta_0+2\xi\sin\theta_0\cos\theta_0+\frac{9}{4}\cos^2\theta_0(1+\xi^2)\right.$$
$$\left.+\frac{105\sqrt{3}\pi}{256}\sqrt{1+\xi^2}\cos\theta_0\right\}. \tag{3.6}$$

积分中已用了公式

$$\int_0^\infty d\eta\eta^{\mu-1}K\rho(\eta)K_\nu(\eta)=\frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\rho}{2}\right)$$
$$\times\Gamma\left(\frac{\mu-\nu-\rho}{2}\right), \tag{3.7}$$

最后再对 n 方向积分,便得到

$$w=\frac{1}{2\tau_0}\left(1-\frac{2}{9}\sin^2\theta_0+\frac{8\sqrt{3}}{15}\cos\theta_0\right). \tag{3.8}$$

这正是(2.20)式.

现在我们可以来计算高阶量子修正了. 这时(2.7)中 Q_1 和 Q_2 的不对易性不可忽略.运用第二节公式直到(2.11)式算出

$$\sum_\varepsilon R_2^*R_1=\frac{u^2}{4\gamma^2}\left\{2\sin^2\theta_0+\cos^2\theta_0\left[(1+\delta^2)+\gamma^2\left(\psi^2-\frac{1}{4}\omega_0^2\tau^2\right)\right]\right.$$
$$\left.+2\delta\sin\theta_0\cos\theta_0+i\gamma\omega_0\tau\cos\theta_0\right\}, \tag{3.9}$$

其中 $\delta=\gamma\alpha$, $u=\hbar\omega/\varepsilon'$, α 为 $\boldsymbol{n}$ 与电子轨道平面的夹角,ψ 是 $\boldsymbol{n}$ 在电子轨道平面上投影与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角,对 $\boldsymbol{n}$ 的立体角积分后,我们得到辐射的频谱分布为:

$$\hbar\omega\frac{dw}{d\omega}=\frac{dI}{d\omega}=\frac{e^2\varepsilon}{2\gamma^2\hbar}\frac{u^3}{(1+u)^2}\left[\sin^2\theta_0\int_y^\infty \mathrm{Ai}(x)dx\right.$$
$$\left.-\cos^2\theta_0\frac{1}{y}\mathrm{Ai}'(y)+\cos\theta_0\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{Ai}(y)\right]. \tag{3.10}$$

其中 $y=(u/\chi)^{2/3}$, $\mathrm{Ai}(x)$ 是 Airy 函数,见附录 A.

最后对频率 ω 积分,注意 $dw=\frac{\varepsilon}{(1+u)^2}du$,我们得到自旋反转的辐射几率:

$$w=\frac{3e^2\varepsilon\chi}{4\gamma^2\hbar^2}\left\{\sin^2\theta_0\int_0^\infty\frac{2}{3\chi^2}\left[\ln(1+\chi y^{3/2})+\frac{2}{1+\chi y^{3/2}}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(1+\chi y^{3/2})^2}-\frac{3}{2}\right]\mathrm{Ai}(y)dy-\cos^2\theta_0\int_0^\infty\frac{y^{5/2}}{(1+\chi y^{3/2})^3}\mathrm{Ai}'(y)dy$$
$$\left.+\cos\theta_0\int_0^\infty\frac{y^3}{(1+\chi y^{3/2})}\mathrm{Ai}(y)dy\right\}, \tag{3.11}$$

此式对任意的 χ 值都成立,当 $\chi\ll 1$,展开被积函数,利用附录 A 中的公式,可得

$$w=\frac{1}{2\tau_0}\left\{\left(1-\frac{2}{9}\sin^2\theta_0+\frac{8\sqrt{3}}{15}\cos\theta_0\right)-\chi\frac{32\sqrt{3}}{5}\left(1-\frac{1}{6}\sin^2\theta_0\right.\right.$$
$$\left.+\frac{35\sqrt{3}}{64}\cos\theta_0\right)+\chi^2\frac{231}{2}\left(1-\frac{2}{15}\sin^2\theta_0+\frac{128\sqrt{3}}{231}\cos\theta_0\right)$$
$$\left.-\cdots\right\}. \tag{3.12}$$

把此式与(2.21)式比较，即见两者是一致的，而这里算到χ的高次项很方便．尤其当另一极端情形 $\chi\gg 1$ 时，考虑到(3.11)式中积分最重要的区域将落在

$$u=\frac{\hbar\omega}{\varepsilon-\hbar\omega}=\chi y^{3/2}\sim 1$$

附近，即 $y\ll 1$．为作近似估计，可用 $\mathrm{Ai}'(0)$和 $\mathrm{Ai}(0)$代替 $\mathrm{Ai}'(y)$和 $\mathrm{Ai}(y)$．于是当 $\theta_0=0$ 和π时

$$w=\frac{\Gamma(2/3)}{3^{7/3}}\frac{e^2\varepsilon}{\gamma^2\hbar^2}\chi^{2/3}\pm\frac{5}{3^{13/6}\Gamma(2/3)}\frac{e^2\varepsilon}{\gamma^2\hbar^2}\chi^{1/3}$$
$$\approx 0.104\frac{e^2\varepsilon}{\gamma^2\hbar^2}\chi^{2/3}\qquad(\chi\gg 1). \tag{3.12}$$

四、总结和讨论

1. 我们用量子场论方法研究同步辐射过程中电子束流逐渐横向极化(自旋反跳)的现象．在 $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\ll 1$ 条件下，电子轨道运动仍作经典处理，但是光子的反冲作用必须考虑，这种反冲引起的量子修正可以按一个参量χ的幂次展开．我们用两种方法导出比已有文献更高阶的量子修正．它们在中间计算步骤上有所不同，结果殊途同归，这增强了我们对本文结果的信心．

2. 由辐射几率导出电子极化率的步骤见附录 B．那里的公式(2.21)或(3.12)括号内保留到χ一级而算出

$$P(t)=P_0(1-e^{-t/\tau_0}) \tag{4.1}$$

其中

$$P_0=\frac{8}{5\sqrt{3}}-\frac{13}{50}\frac{\hbar\omega_0\varepsilon^2}{m^3c^6} \tag{4.2}$$

而

$$\tau_0=\left[\frac{5\sqrt{3}}{8}\frac{e^2\hbar\varepsilon^5}{m^7c^{12}\rho^3}\right]^{-1}\left[1+\frac{32\sqrt{3}}{5}\frac{\hbar\omega_0\varepsilon^2}{m^3c^6}\right] \tag{4.3}$$

这表示高阶量子修正使极化率减小，而使弛豫时间增长，其修正量都在

$$\chi=\frac{\hbar\omega_0\varepsilon^2}{m^3c^6}$$

的量级．虽然在目前加速器能量完全可以忽略不计，但可能对天体物理的研究有意义，对 Cerenkov 同步辐射可能也是重要的．

3. 均匀磁场中的 Dirac 方程是可以严格求解的[13]，原则上我们可以求得电子同步辐

射的严格解，有关问题我们以后将继续讨论．

4．以上讨论的是电子沿运动方向的横向极化(顺着或反着磁场)现象． 公式(2.21)或(3.12)中取 $\theta_0 = \pi/2$ 或 $\theta = 3\pi/2$，也可用来讨论纵向极化，但这时由于电子反常磁矩的存在，虽对横向极化无影响，却使纵向极化率不再是运动常数，从而使讨论的实际意义很小．

附 录 A

文中(1.8)，(1.9)式来源于

$$w = \frac{1}{2\tau_0}\left\{F_1(a)\, e^{-\sqrt{12}\,|a|} + \frac{a}{|a|} F_2(a)\left(\frac{1+\cos^2\theta_0}{2}\right) + F_3(a)\sin^2\theta_0 + F_2(a)\cos\theta_0\right\}$$

其中 $F_j(a)$ $(j = 1, 2, 3)$ 如下

$$F_1(a) = \left(1 + \frac{41}{45}a - \frac{23}{18}a^2 - \frac{8}{15}a^3 + \frac{14}{15}a^4\right) - \frac{8}{5\sqrt{3}}\frac{a}{|a|}\left(1 + \frac{11}{12}a - \frac{17}{12}a^2 - \frac{13}{14}a^3 + a^4\right)$$

$$F_2(a) = \frac{8}{5\sqrt{3}}\left(1 + \frac{14}{3}a + 8a^2 + \frac{23}{3}a^3 + \frac{10}{3}a^4 + \frac{2}{3}a^5\right)$$

$$F_3(a) = \frac{1}{18}\left(7 - 2a + \frac{13}{5}a^2\right)$$

另外，Airy 函数定义为

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^3/3+ixt}\,dt$$

$$\mathrm{Ai}'(x) = d\mathrm{Ai}(x)/dx$$

$\mathrm{Ai}(x)$ 满足方程 $y'' - xy = 0$

Airy 函数与修正 Bessel 函数关系：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Ai}(x) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{3}\right)^{1/2}K_{1/3}(\eta)\\ \mathrm{Ai}'(x) &= -\frac{1}{\pi}\frac{x}{\sqrt{3}}K_{2/3}(\eta)\end{aligned}\right\}\quad (x>0)$$

其中 $\eta = \frac{2}{3}x^{3/2}$

在(3.9)到(3.10)和(3.11)的推导中，我们用到了如下公式：

$$\mathrm{Ai}^2(\eta) + \frac{1}{\eta}\mathrm{Ai}'^2(\eta) = \frac{1}{2\eta}\frac{d^2}{d\eta^2}\mathrm{Ai}^2(\eta)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ai}^2(2^{-2/3}x + t)\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_x^\infty \mathrm{Ai}(s)ds$$

(3.12)的得到用了公式

$$\int_0^\infty x^\nu \mathrm{Ai}'(x)dx = -\frac{1}{2\pi}3^{(4\nu-1)/6}\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

和
$$\int_0^\infty x^{\nu+2}\,\mathrm{Ai}(x)dx = \frac{\nu+1}{2\pi}\,3^{(4\nu-1)/6}\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

Airy 函数的初始值

$$\mathrm{Ai}(0) = 3^{-2/3}/\Gamma(2/3) = 0.33503$$
$$\mathrm{Ai}'(0) = -3^{-1/3}/\Gamma(1/3) = -0.25882$$

附 录 *B*

假设极化矢量 ζ 沿磁场方向的电子($e<0$)数目为 $n\uparrow$，它们发出光子而使自旋反跳的几率为 $w\uparrow$，ζ 反着磁场方向的相应之量为 $n\downarrow$ 和 $w\downarrow$，则由(2.21)式，$\zeta_\phi = 0$，而

$$w\uparrow = \frac{5\sqrt{3}}{16}\frac{e^2\hbar}{m^7}\frac{\varepsilon^5}{c^{12}\rho^3}\left[1+\frac{8\sqrt{3}}{15}-\chi\frac{32\sqrt{3}}{5}\left(1+\frac{35\sqrt{3}}{64}\right)\right] \tag{B.1}$$

$$w\downarrow = \frac{5\sqrt{3}}{6}\frac{e^2\hbar}{m^7}\frac{\varepsilon^5}{c^{12}\rho^3}\left[1-\frac{8\sqrt{3}}{15}-\chi\frac{32\sqrt{3}}{5}\left(1-\frac{35\sqrt{3}}{64}\right)\right] \tag{B.2}$$

设能量为 ε 的电子数 $n = n\uparrow + n\downarrow$ 为常数，但

$$\frac{dn\uparrow}{dt} = -n\uparrow w\uparrow + n\downarrow w\downarrow$$

$$\frac{dn\downarrow}{dt} = -n\downarrow w\downarrow + n\uparrow w\uparrow$$

以前两式代入，便可解出满足初条件 $P(0)=0$ 的极化率

$$P(t) \equiv \frac{n\downarrow - n\uparrow}{n} = P_0(1-e^{-t/\tau_0})$$

其中 P_0 和 τ_0 已在正文 (4.2)、(4.3) 式写出.

参 考 文 献

[1] J. S. Schwinger, *Phys. Rev.,* **75** 1949, 1912.

[2] I. M. Ternov, Yu. M. Loskutov and L. I. Korovina, 1961, Zh. Eksp. Teor. Fiz 41, 1294 (Sov. Phys. --JEPT14, 921 (1962))

[3] 北京正负电子对撞机(BEPC)初步设计提要.

[4] A. A. Sokolov, and I. M. Ternov, 1963, Dokl. Akad. Nauk. SSSR153, 1052 (Sov. Phys. -Dokl. 8, 1203(1964)).

[5] V. N. Baier, and V. M. Katkov, *Physics Letters,* 13 March 1967.

[6] J. G. Learned, L. K. Resvanis, and C. M. Spencer, *Physics Review Letters,* **35** (1975), 1688

[7] R. F. Schwitters, *Nucl. Instrum. Methods,* 117 1974, 331.

[8] J. D. Jackson, *Review of Mordern Physics,* 48 (1976), 417.

[9] J. D. Jackson, 1975, Classical Electrodynamics (Wiley, New York) 2nd edition.

[10] V. B. Berestetskii, E. M. Lishitz, and L. P. Pitaevskii, 1971, Relativistic Quantum Theory, Partl, translated by J. B. Sykes and J. S. Bell (Pergamon, New York).

[11] I. S. Gradshteyn and I. W. Ryzhik, Table of integrals, Series and products (Academic Press, New York, 1965).

[12] 颜东茂　粒子物理讲习班讲义(合肥　中科院 1981).

[13] I. M. Ternov, V. G. Bagrov, and R. A. Rzaev, *Vestnik MGU. Ser,* 3(1964) N4.

THE HIGHER ORDER QUANTUM CORRECTIONS IN SPIN-FLIP SYNCHROTRON RADIATION

WU CHANG-QIN SONG HAO NI GUANG-JIONG
(Fudan University)

ABSTRACT

The effect of Synchrotron radiation on the transversal polarization of electrons is investigated. The higher order quantum corrections on spin-flip radiation probability due to the recoil of photon are derived by two approaches. The result reveals a decrease in final polarization and an increase in relaxation time.