第8卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 6
1984 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1984

不同外源的 $SU(3)$ 格点规范理论中单链配分函数及其在变分法中的应用*

何翔皓 李铁忠 先鼎昌
（中国科学院高能物理研究所）

摘 要

在格点规范理论中，许多计算（诸如强耦合展开、平均场理论、作用量变分方法等）都需要 $SU(3)$ 单链配分函数的计算. 我们把不同外源的单链配分函数都表达成一重积分的表式，这些积分很容易在计算机上运算. 讨论了它们在变分法中的应用.

1. 在用解析方法分析格点规范理论时，常常要作单链配分函数的计算. 对于 $SU(3)$ 群的情形

$$\tilde{Z}=\int[dU]\delta(\det U-1)e^{\mathrm{tr}(UJ+U^{+}J^{+})} \tag{1}$$

$U\in U(3)$，J 是外源.

在计算 (1) 式时，通常把 J 对角化[1][2]

$$J=AJ_DA^{+} \qquad A\in U(3)$$

J_D 可以按所含参数的个数分为以下几类:

$$J_D=\mathrm{diag}(z_1e^{i\theta_1},\ z_2e^{i\theta_2},\ z_3e^{i\theta_3}) \tag{2.1}$$

$$J_D=\mathrm{diag}(z_1e^{i\theta},\ z_2e^{i\theta},\ z_3e^{i\theta}) \tag{2.2}$$

$$J_D=\mathrm{diag}(ze^{i\theta_1},\ ze^{i\theta_2},\ ze^{i\theta_3}) \tag{2.3}$$

$$J_D=ze^{i\theta}I \tag{2.4}$$

Brower等[1]讨论了(2.1)的情况，给出了 $\tilde{Z}$ 的一个积分表达式，但由于所给表达式的被积函数的分母和分子中均含有两个 Vandermonde 行列式的乘积，在实际计算中难以应用.

Brower 及 Eriksson 等[1,2]讨论了源为 (2.2) 的情况，结果表明，在 $\tilde{Z}$ 的表达式中，虽然消去了 Vandermonde 行列式，但出现了迴路积分

$$\tilde{Z}=\frac{i}{\pi}\oint\frac{dp}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{T(p)}}J_1\left(\frac{2}{p}\sqrt{T(p)}\right)e^{-\Delta/p} \tag{3}$$

其中 $T(p)=-\det(JJ^{+}-p\cdot I)$，$\Delta=\det J+\det J^{+}$；这在实际计算中将导致四重级数的求和 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}$[3]，注意到这是一个无穷级数，它在解析分析及数值计算时是相

本文 1983 年 12 月 30 日收到.
本工作部分地受科学院科学基金资助.

当不便的.

我们在这篇短文中讨论外源形式为(2.3)时的单链配分函数及其在变分法中的应用. 外源形式为(2.4)时的问题作为我们讨论的一个特例是明显的.

2. 对于外源(2.3), (1)可以写成

$$\tilde{Z}=\int[dU]\delta(\det U-1)e^{\operatorname{tr}(A^{+}UAJ_D+hc)} \tag{4}$$

由于 $A\in U(3)$, 有 $\det U=\det(A^{+}UA)$, 并且 A 在群积分中是一个固定群元, 应用群测度不变的定义得

$$\tilde{Z}=\int[dU]\delta(\det(A^{+}UA)-1)e^{\operatorname{tr}(A^{+}UAJ_D+hc)}$$

$$=\int[dU]\delta(\det U-1)e^{\operatorname{tr}(UJ_D+hc)} \tag{5}$$

将 J_D 写成

$$J_D=ze^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/3}J'_D \tag{6}$$

$$J'_D=\operatorname{diag}(e^{i(2\theta_1-\theta_2-\theta_3)/3},e^{i(2\theta_2-\theta_1-\theta_3)/3},e^{i(2\theta_3-\theta_1-\theta_2)/3})$$

显然 $J'_D\in SU(3)$, 由此有 $\det U=\det(UJ'_D)$, 于是

$$\tilde{Z}=\int[dU]\delta(\det(UJ'_D)-1)\exp\{ze^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/3}\operatorname{tr}(UJ'_D)+\text{h.c}\}$$

$$=\int[dU]\delta(\det U-1)\exp\{ze^{i\frac{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}{3}}\operatorname{tr}U+\text{h.c}\} \tag{7}$$

采用 Weyl 参数化,

$$U=BU_DB^{+} \tag{8}$$

$$U_D=\operatorname{diag}(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2},e^{i\varphi_3})$$

群积分的测度为

$$[dU]=(2\pi)^3(d\omega_B)|\Delta(e^{i\varphi_j})|^2d\varphi_1d\varphi_2d\varphi_3 \tag{9}$$

其中 Δ 为 Vander monde 行列式, ω_B 为只与矩阵 B 有关的变量, 于是 $\tilde{Z}$ 可写作:

$$\tilde{Z}=\text{const}\int[d\omega_B]d\varphi_1d\varphi_2d\varphi_3|\Delta(e^{i\varphi_j})|^2\delta(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)$$

$$\cdot\exp\left\{2z\left[\cos\left(\varphi_1+\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)+\cos\left(\varphi_2+\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos\left(\varphi_3+\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)\right]\right\} \tag{10}$$

将 $d\omega_B$ 和 $d\varphi_3$ 积分完成, 有

$$\tilde{Z}=\text{const}\int_0^{2\pi}d\varphi_1d\varphi_2\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{2\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin^2\frac{2\varphi_2+\varphi_1}{2}$$

$$\cdot\exp\left\{2z\left[\cos\left(\varphi_1+\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)+\cos\left(\varphi_2+\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos\left(\varphi_1+\varphi_2-\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)\right]\right\} \tag{11}$$

将指数上的最后两项合并:

$$\cos\left(\varphi_2+\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)+\cos\left(\varphi_2+\varphi_1-\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)$$
$$=2\cos\frac{2\varphi_2+\varphi_1}{2}\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}-\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)$$

对 $d\varphi_2$ 积分后可得单链配分函数

$$\tilde{Z}=\text{const}\int_0^{2\pi}d\varphi e^B\left\{C\frac{I_1(A)}{A}-(2DA+3)\frac{I_2(A)}{A^2}\right\} \tag{12}$$

式中 I_1I_2 是修正贝塞尔函数，

$$A=4z\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)\qquad B=2z\cos\left(\varphi+\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\right)$$
$$C=(3+\cos 3\varphi)/2\qquad D=\cos(3\varphi/2) \tag{13}$$

式(12)只是一个普通的定积分,其在实际应用中的方便是明显的.

在变分计算中,需要作 $\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial J}$, $\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial J^+}$ 的运算. 由于源(2.3)满足

$$JJ^+=z^2I,\qquad \det J^+/\det J=e^{-2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} \tag{14}$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial J^+}=J\left[\frac{1}{6z}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{i}{2z^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\frac{\partial}{\partial\theta_2}+\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial J}=J^+\left[\frac{1}{6z}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{i}{2z^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\frac{\partial}{\partial\theta_2}+\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\right] \tag{15}$$

3. 在变分法运算中,两个变分参数的单链配分函数就足够了[3];更多的参数常常会带来技术上处理的困难. 我们讨论一种等价于(2.3)的、较易计算的源的情况.

$$J=ze^{i\theta}V\qquad V\in SU(3) \tag{16}$$

在这种情况下，式(1)可以写成

$$\tilde{Z}=\int[dU]\delta(\det U-1)e^{ze^{i\theta}\text{tr}(UV+\text{h.c})} \tag{17}$$

$V\in SU(3)$ 在群积分时是固定的群元，$\det V=\det V^+=1$ 应用群积分测度不变的定义，可得

$$\tilde{Z}=\int[dU]\delta(\det(UV)-1)\exp\{ze^{i\theta}\text{tr}UV+\text{h.c}\}$$
$$=\int[dU]\delta(\det U-1)\exp\{ze^{i\theta}\text{tr}U+\text{h.c}\} \tag{18}$$

采用 Weyl 参数化,并作完 $d\omega_B$, $d\varphi_3$ 的积分,得

$$\tilde{Z}=\text{const}\int_0^{2\pi}d\varphi_1d\varphi_2\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{2\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin^2\frac{2\varphi_2+\varphi_1}{2}$$
$$\cdot\exp\{2z[\cos(\varphi_1+\theta)+\cos(\varphi_2+\theta)+\cos(\varphi_1+\varphi_2-\theta)]\} \tag{19}$$

对 φ_2 积分,得

$$\tilde{Z}=\text{const}\int_0^{2\pi}d\varphi e^B\left\{C\frac{I_1(A)}{A}-(2DA+3)\frac{I_2(A)}{A^2}\right\} \tag{20}$$

其中 $A=4z\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\theta\right)$, $B=2z\cos(\varphi+\theta)$

$$C = (3 + \cos 3\varphi)/2, \qquad D = \cos(3\varphi/2) \tag{21}$$

由于外源满足

$$JJ^+ = z^2 I, \quad \det J/\det J^+ = e^{i6\theta} \tag{22}$$

由此得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J^+} &= J\left[\frac{1}{6z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{6z^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] \\ \frac{\partial}{\partial J} &= J^+\left[\frac{1}{6z}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{6z^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] \end{aligned} \tag{23}$$

4. 作为一个应用的例子，讨论 $SU(3)$ 规范场和 Higgs 场耦合系统，取作用量为[4]

$$S = \frac{\beta}{2}\sum_p \mathrm{tr}(U_p + U_p^+) + \frac{h}{2}\sum_{r,l}[\phi(r)D(U_l)\phi^+(r+l) + \mathrm{cc}] \tag{24}$$

式中 $\phi(r)$ 是格点上的 Higgs 场量，$D(U_l)$ 是 $SU(3)$ 群的一个既约表示，与 S 相应的配分函数是

$$z = \int [dU][d\phi]e^S \tag{25}$$

由于不能严格求出 z，我们选试作用量为 S_0，与之相应的配分函数为

$$z_0 = \int [dU][d\phi]e^{S_0} \tag{26}$$

则由不等式 $\langle e^x\rangle \geqslant e^{\langle x\rangle}$，有[5]

$$\begin{cases} W \leqslant W_{\mathrm{eff}} \\ W = -\ln z, \quad W_{\mathrm{eff}} = -\ln z_0 + \langle S_0 - S\rangle_0 \end{cases} \tag{27}$$

对 S_0 中的变分参数作变分求得 W_{eff} 的极小值，以之作为W的近似值．如果取

$$S_0 = \sum_l \mathrm{tr}(U_l J_l + \mathrm{h.c}) + \sum_r (\phi(r)K(r) + \mathrm{cc}) \tag{28}$$

其中 $J_l J_l^+$，$K(r)$，$K^+(r)$ 为外源．作变分时令 $J_l = J$，$K(r) = K$，并且取 J 为形式(16)，经过计算得

$$\begin{aligned} \ln z_0 &= N_l \ln f + N_l \ln g \\ \langle S_0\rangle_0 &= N_l \,\mathrm{tr}\left(J\frac{\partial \ln f}{\partial J} + \mathrm{h.\,c}\right) + N_s\left(K\frac{\partial \ln g}{\partial K} + \mathrm{cc}\right) \\ \langle S\rangle_0 &= N_p \beta\,\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial J^+}\right)^2\left(\frac{\partial \ln' f}{\partial J}\right)^2\right] \\ &\quad + N_l\frac{h}{2}\left[\frac{\partial \ln g}{\partial K}D\left(\frac{\partial \ln f}{\partial J}\right)\frac{\partial \ln g}{\partial K^+} + \mathrm{cc}\right] \end{aligned} \tag{29}$$

式中 N_l，N_s 及 N_p 分别是链，格点及方格的数目，f 是由(19)和(20)给出的配分函数，g 是格点配分函数，定义为

$$g = \int d\phi e^{\phi K + \mathrm{cc}} \tag{30}$$

将(29)代入(27)，应用源微分法则(23)得

$$W_{\mathrm{eff}} = N_l z\frac{\partial \ln f}{\partial z} + N_s\left(K\frac{\partial \ln g}{\partial K} + K^+\frac{\partial \ln g}{\partial K^+}\right) - N_e \ln f - N_s \ln g$$

$$-N_p\frac{3\beta}{6^4}\left[\left(\frac{\partial\ln f}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\theta}\right)^2\right]^2$$

$$-N_l\frac{h}{2}\left[\frac{\partial\ln g}{\partial K}D\left[\frac{J^+}{6z}\left(\frac{\partial\ln f}{\partial z}-\frac{i}{2}\frac{\partial\ln f}{\partial\theta}\right)\right]\frac{\partial\ln g}{\partial K^+}+\mathrm{cc}\right]$$

$W_{\rm eff}$ 将是变分计算的出发点．格点配分函数 g 取决于表示 $D\{U_l\}$ 的维数及 Higgs 场是否为固定模．具体计算结果我们将另文讨论．

参考文献

[1] R. Brower, P. Rossi and C-T Tan, *Nucl. Phys.*, **B190** [FS3] (1981), 699.

[2] K. Ericksson, N. Svartholm and B. S. Skagerstam, CERN Preprint TH-2794 (1980).

[3] 陈天崙、周洪模、李铁忠、冼鼎昌、郑希特，高能物理与核物理，(待发表).

[4] E. Fradkin, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 3681.

[5] T-L Chen, C-I Tan and X-T Zheng, *Phys. Rev.* **D26** (1982), 2843.

SINGLE LINK PARTITION FUNCTIONS FOR VARIOUS FORMS OF SOURCES AND THEIR APPLICATIONS IN *SU* (3) LATTICE GAUGE FIELD THEORY*

HE XIANG-HAO LI TIE-ZHONG XIAN DING-CHANG

(Institute of High Energy Physics Academia Sinica)

ABSTRACT

The knowledge of $SU(3)$ single-link partition function is required in many calculations (such as the strong coupling expansion, the mean field and variational approximation, etc.) in lattice gauge field theory. We express the single-link partition functions for various sources in the form of a one-dimensional integral which can esily be carried out on computer. The application of these single-link partition functions in variational computation is discussed.

* Work supported in part by the Science Fund of Academia Sinica.