

偶偶变形核的集体激发能谱

IV. 原子核的基带转动惯量

吴崇试 曾谨言

(北京大学物理系)

摘 要

本文从我们导出的基带能级公式出发,研究了原子核的基带转动惯量随角动量或转动角频率的变化,并讨论了我们的能级公式和可变转动惯量模型之间的密切联系。

一、引 言

转动惯量问题是人们关注的原子核集体运动的基本问题之一。根据观测出的变形核转动谱,可以定出相应的转动惯量,其数值介乎刚体值与非旋流体值之间^[1]。分析实验还发现,随着原子核的角动量增大,其转动惯量也逐渐增大^[2]。

1969年, M. A. J. Mariscotti 等人从经验的角度提出了可变转动惯量(VMI)模型^[3]。这是一个半经典的模型。M. A. J. Mariscotti 等假定,原子核的基带能级由方程组

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I+1) + \frac{1}{2} C^{\text{VMI}} (\mathcal{I} - \mathcal{I}_0)^2, \quad (1.1)$$

$$\left. \frac{\partial E_I}{\partial \mathcal{I}} \right|_I = 0 \quad (1.2)$$

决定,因此,它是两个参数 C^{VMI} 及 \mathcal{I}_0 的函数。 C^{VMI} 和 \mathcal{I}_0 分别称为原子核的硬度参数(stiffness parameter)和基态转动惯量。VMI模型合理地反映了原子核转动惯量随角动量而增大这一基本事实,因而能比较满意地解释偶偶变形核乃至过渡核的基带能级。

我们在前几篇文章^[4-6]中,已经给出了偶偶变形核基带能级的一个新公式。按照这个公式,原子核的基带能级在不同程度上偏离于 $I(I+1)$ 的规律,换句话说,原子核的基带转动惯量不再是一个常数。本文将从这个公式出发,分析原子核的基带转动惯量随角动量或转动角频率的变化(第二节),并讨论我们的能级公式和VMI模型之间的密切联系(第三节)。

二、原子核的基带转动惯量

根据文献^[4,5]中的讨论, 变形核基带的激发能可以近似地表为

$$E_I^{\pi} = a\{\sqrt{1 + bI(I+1)} - 1\}. \quad (2.1)$$

a, b 是待定参数. 因为这个近似公式的形式比较简明, 而又相当符合实验, 所以我们就从这个公式出发讨论.

设原子核以角频率 ω_I 绕 x 轴旋转, 则原子核的转动惯量 \mathcal{I}_I 定义为

$$\mathcal{I}_I = \frac{\hbar I_x}{\omega_I}, \quad (2.2)$$

其中, I_x 是原子核总角动量在 x 轴上的分量^[7],

$$I_x = \sqrt{I(I+1) - \left(K^2 - \frac{1}{4}\right)}, \quad (2.3)$$

转动角频率 ω_I 则为

$$\omega_I = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_I}{dI_x}. \quad (2.4)$$

根据(2.1)、(2.3)及(2.4)式, 可以求得^[6]

$$\frac{\hbar^2 \omega_I^2}{a^2 b} = \frac{I(I+1) - \left(K^2 - \frac{1}{4}\right)}{I(I+1) + \frac{1}{b}}, \quad (2.5)$$

将(2.3)及(2.5)式代入(2.2)式, 即得

$$\mathcal{I}_I = \frac{\hbar^2}{ab} \sqrt{1 + bI(I+1)} = \mathcal{I}_0 \sqrt{1 + bI(I+1)} \quad (2.6)$$

或

$$A_I \equiv \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_I} = \frac{ab}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + bI(I+1)}}. \quad (2.7)$$

\mathcal{I}_0 是原子核的基态转动惯量,

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\hbar^2}{ab}. \quad (2.8)$$

显然, 正如预料的那样, 转动惯量 \mathcal{I}_I 随角动量而增大. 其增长速度与 b 有关. b 越小, $\mathcal{I}_I/\mathcal{I}_0$ 上升得越慢. 当 $b \sim 0.01$ 时, $\mathcal{I}_{I=20}$ 要比 \mathcal{I}_0 增大一倍以上; 当 $b \sim 0.002$ 时, $\mathcal{I}_{I=20}$ 约比基态值增大 1/3 左右.

将(2.5)式和(2.6)式结合起来, 我们还能导出转动惯量与转动角频率之间的关系式

$$\left(\frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}_I}\right)^2 + \frac{(\hbar\omega_I)^2}{a^2 b} = 1 - \frac{K^2 - \frac{1}{4}}{I(I+1) + \frac{1}{b}} \simeq 1 \quad (2.9)$$

或

$$\frac{\mathcal{I}_I}{\mathcal{I}_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\hbar^2 \omega_I^2}{a^2 b}}} \quad (2.10)$$

因此,就得到了转动惯量的 Harris 展开

$$\frac{\mathcal{I}_I}{\mathcal{I}_0} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \omega_I^2}{a^2 b} + \frac{3}{8} \left(\frac{\hbar^2 \omega_I^2}{a^2 b} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{\hbar^2 \omega_I^2}{a^2 b} \right)^3 + \dots \quad (2.11)$$

为了从实验上检验(2.6)及(2.10)式,我们需要根据实验能级定出转动惯量的实验值. 通常是把(2.2)、(2.3)和(2.4)式结合起来,

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_I} &= \frac{\hbar \omega_I}{2I_x} = \frac{1}{2I_x} \frac{dE_I}{dI_x} \\ &= \frac{dE_I}{dI_x^2} = \frac{dE_I}{dI(I+1)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

而后用差分代替微分,从而由转动带中相邻能级间的能量差计算出 \mathcal{I}_I :

$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_I} = \frac{E_{I+1} - E_{I-1}}{4I + 2} \quad (2.13)$$

我们用这个办法分析了几个典型核的转动惯量 \mathcal{I}_I 随角动量 I 及转动角频率 ω_I 的变化, 结果分别见图 1 与图 2. 我们看到,关系式(2.6)及(2.10) (即图中的曲线 *ab*) 完全符合实验, 而由两个、三个或四个参数的 $I(I+1)$ 展开计算得到的结果 (即图中的曲线 *AB*、*ABC* 或 *ABCD*) 和实验相去甚远. 实际分析表明, 对于稀土区和锕系区的大多数原子核, 在回弯区以下, 也都符合(2.6)及(2.10)式. 只是为了节约篇幅, 这里不再一一列出.

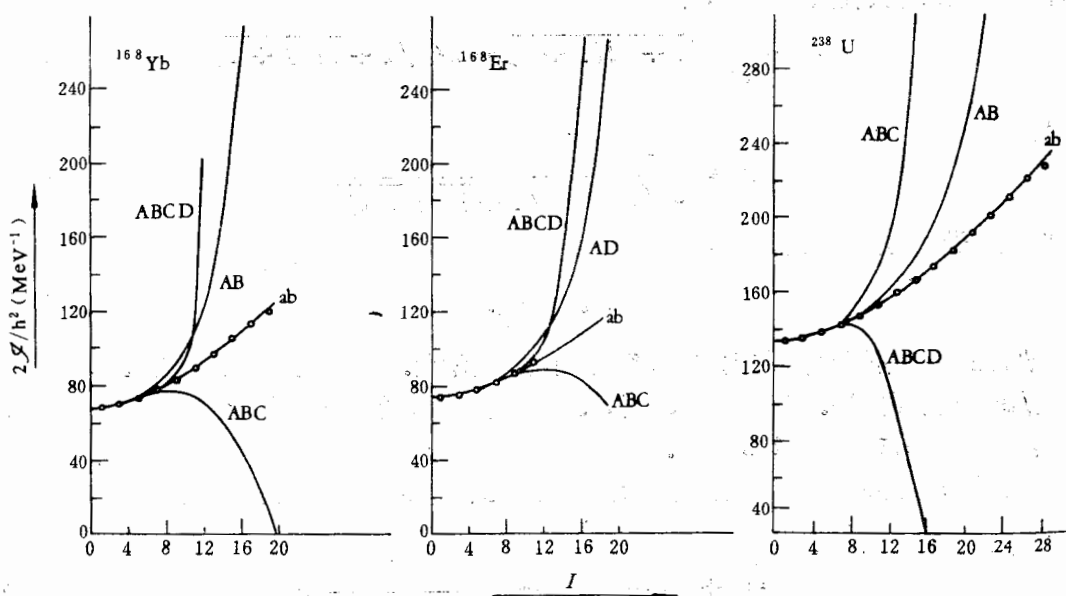
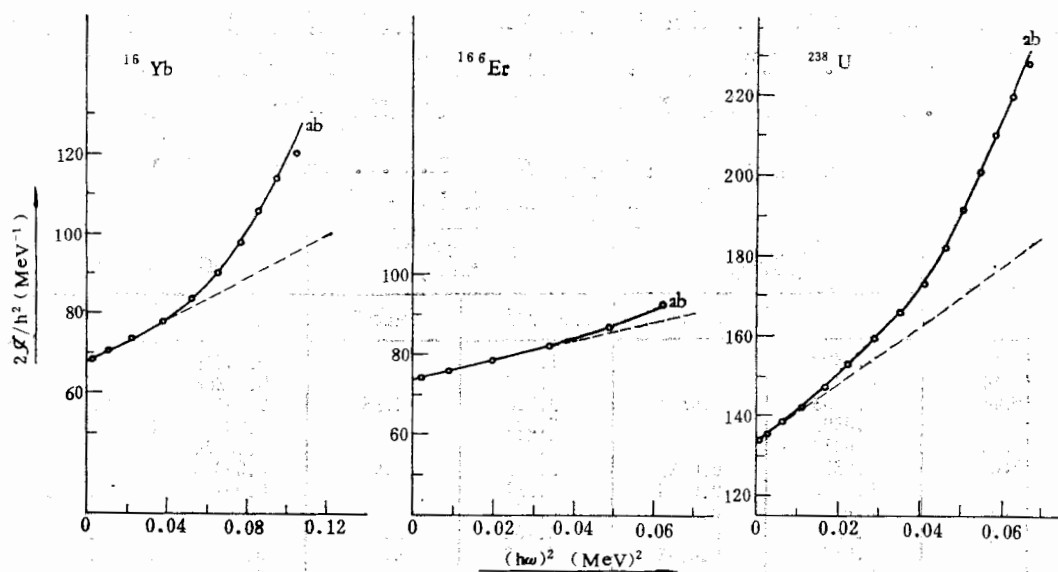


图1 几个典型核的 $\mathcal{I}-I$ 图

○ 实验值; *ab* 本文计算结果; *AB*、*ABC* 和 *ABCD* 分别为二、三和四个参数 $I(I+1)$ 展开的计算结果

图 2 几个典型核的 $J-\omega^2$ 图

○ 实验值; *ab* 本文计算结果; ----Harris 二参数展开

三、可变转动惯量模型

根据(2.1)式和(2.6)式,经过简单的计算,就可以证明:

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_I} I(I+1) + \frac{\hbar^2}{2b} \frac{(\mathcal{J}_I - \mathcal{J}_0)^2}{\mathcal{J}_0^2 \mathcal{J}_I}, \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{\partial E_I}{\partial \mathcal{J}_I} \right|_I = 0.$$

和可变转动惯量(VMI)模型的标准形式[即(1.1)式和(1.2)式]相比,可以看到,二者非常相似. 唯一不同之处在于: 这里的硬度参数 C^{VMI} 并不是常数,而是 I 的函数,

$$C^{\text{VMI}} = \frac{\hbar^2}{b\mathcal{J}_0^2 \mathcal{J}_I} = C_0^{\text{VMI}} \frac{1}{\sqrt{1 + bI(I+1)}}, \quad (3.3)$$

其中

$$C_0^{\text{VMI}} = \frac{\hbar^2}{b\mathcal{J}_0^3} = \frac{a^3 b^2}{\hbar^4} \quad (3.4)$$

是 C^{VMI} 的基态值. 当参数 b 较小,而 I 的变化范围又不大时, C^{VMI} 值的变化不大,因而可以近似地看成常数. 值得提到的是,我们曾经指出^[9],按照(2.1)式计算得的原子核基带能级和 VMI 模型在低角动量范围内非常接近,而随着角动量的增大,二者的差别越来越大. 这正是由 C^{VMI} 的不同造成的. 此外,我们知道, VMI 模型等价于二参数的 Harris 展开^[8],后者和实验有相当的差距^[9]. 而我们的近似公式(2.1)看来更接近于实际情况.

我们可以由能谱分析中定出参数 a, b , 而后就可以由(2.8)式及(3.4)式计算出原子核的基态转动惯量 \mathcal{J}_0 以及硬度参数的基态值 C_0^{VMI} . 计算结果见表 1. 可以看出,我们计

算出的 \mathcal{J}_0 值与 M. A. J. Mariscotti 等人在 VMI 模型计算中所用的数值^[3] (在表 1 中称为经验值) 完全一致. 至于硬度参数, 我们计算得的基态值 C_0^{VMI} 一般要比 VMI 模型中的经验值略大. 这是因为后者不随 I 变化, 应当相当于本文的 C^{VMI} 在一定角动量范围内

表 1 原子核的 VMI 参数: 表中的经验值即 M. A. J. Mariscotti 等人^[3] 在 VMI 模型中采用的参数值 ($\bar{\lambda} = 1$)

原子核	基态转动惯量 \mathcal{J}_0 (keV^{-1})		硬度参数 C^{VMI} (10^6keV^3)		软 度 σ	
	计算值	经验值	基态计算值	经验值	计算值	经验值
¹⁵² Nd	0.0390		1.855		0.00453	
¹⁵⁴ Nd	0.0410		1.985		0.00366	
¹⁵⁴ Sm	0.0363	0.0365	3.716	4.36	0.00280	0.0024
¹⁵⁶ Sm	0.0393		5.303		0.00155	
¹⁵⁸ Sm	0.0411		5.815		0.00124	
¹⁵⁶ Gd	0.0334	0.0333	3.885	2.96	0.00346	0.0045
¹⁵⁸ Gd	0.0376	0.0374	5.731	4.08	0.00165	0.0023
¹⁶⁰ Gd	0.0398	0.0397	6.408	4.64	0.00124	0.0017
¹⁵⁸ Dy	0.0300	0.0298	4.168	2.64	0.00442	0.0071
¹⁶⁰ Dy	0.0345	0.0343	4.958	4.56	0.00245	0.0027
¹⁶² Dy	0.0372	0.0369	6.944	5.12	0.00139	0.0019
¹⁶⁴ Dy	0.0408	0.0406	5.570	4.20	0.00132	0.0018
¹⁶² Er	0.0291	0.0293	5.244	3.92	0.00389	0.0051
¹⁶⁴ Er	0.0327	0.0327	6.908	5.08	0.00207	0.0028
¹⁶⁶ Er	0.0371	0.0369	4.931	4.16	0.00198	0.0024
¹⁶⁸ Er	0.0376	0.0375	10.029	9.08	0.00094	0.0010
¹⁷⁰ Er	0.0381	0.0378	9.511	7.56	0.00095	0.0012
¹⁶⁴ Yb	0.0242	0.0237	5.027	3.00	0.00702	0.013
¹⁶⁶ Yb	0.0290	0.0289	5.490	3.92	0.00373	0.0052
¹⁶⁸ Yb	0.0340	0.0342	4.487	3.88	0.00290	0.0032
¹⁷⁰ Yb	0.0354	0.0354	6.307	6.24	0.00178	0.0018
¹⁷⁴ Yb	0.0380	0.0379	9.406	4.68	0.00115	0.0016
¹⁷⁴ Yb	0.0391	0.0392	8.735	9.28	0.00096	0.0009
¹⁷⁶ Yb	0.0364	0.0364	10.545	7.84	0.00098	0.0013
¹⁶⁸ Hf	0.0236	0.0233	4.600	2.60	0.00772	0.015
¹⁷⁰ Hf	0.0295	0.0289	3.876	2.12	0.00490	0.0096
¹⁷² Hf	0.0313	0.0312	5.059	3.52	0.00323	0.0047
¹⁷⁴ Hf	0.0327	0.0327	5.256	4.64	0.00282	0.0031
¹⁷⁶ Hf	0.0337	0.0338	6.416	5.88	0.00203	0.0022
¹⁷⁸ Hf	0.0321	0.0320	8.422	7.40	0.00190	0.0021
¹⁸⁰ Hf	0.0320	0.0321	14.324	13.8	0.00109	0.0011
¹⁸² Hf	0.0305		11.409		0.00154	
¹⁷⁴ W	0.0265	0.0260	4.655	2.64	0.00576	0.011
¹⁷⁶ W	0.0271	0.0269	5.014	3.24	0.00500	0.0080
¹⁷⁸ W	0.0284	0.0280	6.898	4.48	0.00318	0.0050
¹⁸⁰ W	0.0287	0.0288	6.443	5.32	0.00329	0.0039
¹⁸² W	0.0298	0.0298	12.153	10.24	0.00155	0.0018
¹⁸⁴ W	0.0268	0.0268	11.983	9.76	0.00217	0.0026
¹⁸⁶ W	0.0243	0.0243	12.213	10.8	0.00285	0.0033
¹⁸⁰ Os	0.0224	0.0213	4.481	2.28	0.00994	0.023
¹⁸² Os	0.0231	0.0228	5.342	3.40	0.00758	0.012
¹⁸⁴ Os	0.0250	0.0247	8.373	5.56	0.00381	0.0060
¹⁸⁶ Os	0.0217	0.0215	9.568	6.16	0.00514	0.0082
²²⁸ Th	0.0514	0.0515	0.892	0.76	0.00414	0.0047
²³⁰ Th	0.0561		1.131		0.00251	
²³² Th	0.0607	0.0595	1.288	0.84	0.00174	0.0028
²³² U	0.0628	0.0625	1.219	0.84	0.00166	0.0025
²³⁴ U	0.0688	0.0686	0.981	0.92	0.00157	0.0017
²³⁶ U	0.0662	0.0663	1.481	1.92	0.00117	0.00090
²³⁸ U	0.0672	0.0669	1.516	1.84	0.00115	0.00091
²³⁸ Pu	0.0678	0.0678	1.745	1.60	0.00092	0.00099
²⁴⁰ Pu	0.0701	0.0698	1.689	1.76	0.00086	0.00084
²⁴² Pu	0.0674		1.737		0.00094	
²⁴² Cm	0.0705	0.0705	0.613	0.60	0.00232	0.0024
²⁴⁴ Cm	0.0698	0.0697	1.903	1.72	0.00077	0.00080
²⁴⁶ Cm	0.0698		1.763		0.00083	
²⁴⁸ Cm	0.0691	0.0690	1.707	2.12	0.00089	0.00072
²⁵⁰ Cf	0.0700		2.534		0.00057	

的平均值。

在表 1 中还列出了原子核的软度 σ , 它的定义是^[3]

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{I}} \left. \frac{d\mathcal{I}}{dl} \right|_{l=0} \quad (3.5)$$

将(2.6)式代入, 即得到

$$\sigma = \frac{b}{2} \quad (3.6)$$

这就有助于我们理解原子核的形变、转动惯量等随角动量的变化与参数 b 的关系。参数 b 越小, 原子核的软度越小(原子核越“硬”), β_1/β_0 上升得越慢, 换句话说, 原子核的形变越稳定^[5]。同样, b 越小, $\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_0$ 也上升得越慢。

参 考 文 献

- [1] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* Vol. II (Benjamin, New York, 1975).
- [2] 例如, R. M. Diamond, F. S. Stephens and W. J. Swiatecki, *Phys. Lett.*, 11(1964), 315
- [3] M. A. J. Mariscotti, G. Scharff-Goldhaber and B. Buck, *Phys. Rev.*, 178(1969), 1864.
- [4] 吴崇试、曾谨言, 高能物理与核物理, 8(1984), 219.
- [5] 吴崇试、曾谨言, 高能物理与核物理, 将发表.
- [6] 吴崇试、曾谨言, 高能物理与核物理, 将发表.
- [7] R. Bengtsson and S. Frauendorf, *Nucl. Phys.*, A327(1979), 139.
- [8] A. Klein, R. M. Dreizler and T. K. Das, *Phys. Lett.*, 31B(1970), 333.
- [9] Ø. Saethre, S. A. Hjorth, A. Johnson, S. Jagare, H. Ryde and Z. Szymanski, *Nucl. Phys.*, A207 (1973), 486.

THE COLLECTIVE EXCITATION SPECTRA OF EVEN-EVEN DEFORMED NUCLEI

IV. THE NUCLEAR MOMENT OF INERTIA IN GROUND BAND

WU CHONG-SHI ZENG JIN-YAN

(Peking University)

ABSTRACT

The variation of nuclear moment of inertia in the ground band with the nuclear angular momentum or rotational angular frequency is analyzed on the basis of our expression for the ground rotational band. The close connection between our expression and the VMI model is established.