第 10 卷 第 2 期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol. 10, No. 2
1986 年 3 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1986

普遍的 Chern-Simons 链和它们的应用

周光召 吴岳良 谢彦波

(中国科学院理论物理研究所)

摘 要

本文将 Chern 形式按它子流形上的外微分形式的阶数展开，很容易地给出了一些 Chern-Simons 链. 并讨论了某些约束条件下，子流形间 Chern 形式的递推关系和它们的一些应用.

一、引 言

最近，物理学家用拓扑和微分几何的数学工具来讨论场论的一些大范围性质，给出了许多有趣的结果. 特别人们发现用微扰理论所得到的手征反常有它的拓扑起源，它是规范场上同调的一个非平凡元. 并且人们根据 Chern-Simons 示性类，利用微分几何的方法可能更方便地得到，而不需要计算费曼图.

本文将给出普遍 Chern-Simens 示性类的一个简单推导. 在第二节. 将 Chern 形式按它子流形上的外微分形式的阶数展开，再利用 Chern 形式闭的性质，很简单地得到一些 Chern-Simons 链. 第三，四节，通过考虑一些特殊情况，给出了广义的第二示性类和 Faddeev 型上同调. 最后讨论更一般一点的情况和 θ-真空.

二、Chern 形式的递推方程

设在 N 维空间中有规范势

$$C(\eta) = C_l(\eta) d\eta^l, \quad l = 1, 2, \cdots, N \tag{2.1}$$

相应的场强为

$$W = \hat{d}C + C^2 \equiv W_{lp}\, d\eta^l \wedge d\eta^p. \tag{2.2}$$

这里我们用了外微分形式. 外微分算子为:

$$\hat{d} = d\eta^l \frac{\partial}{\partial \eta^l}. \tag{2.3}$$

Chern 形式定义为:

$$\Omega_{2m}(W) = \frac{i^m}{m!\,(2\pi)^m} \operatorname{Tr}(W^m). \tag{2.4}$$

本文 1985 年 4 月 23 日收到.

它是 $2m$-形式，利用 Bianchi 恒等式:

$$\hat{d}W = [W,\ C]. \tag{2.5}$$

人们很容易验证 $\Omega_{2m}(W)$ 是闭的

$$\hat{d}\Omega_{2m} = 0, \tag{2.6}$$

并可表示为

$$\Omega_{2m}(W) = \hat{d}\Omega^0_{2m-1}(W, C). \tag{2.7}$$

又因 $\Omega_{2m}(W)$ 是规范不变的. 即:

$$\delta\Omega_{2m}(W) = 0. \tag{2.8}$$

这里 δ 表示规范变换算子. 若用外微分形式表示:

$$\delta = d\ \alpha^i \frac{\partial}{\partial\alpha^i}. \tag{2.9}$$

α^i 是群参数. 那么把规范作用改写为[1]:

$$\begin{aligned} \delta A &= -dV - AV - VA \\ \delta F &= [F, V],\ V = g^{-1}\delta g. \end{aligned} \tag{2.10}$$

并有:

$$\delta^2 = 0,\ \delta\hat{d} + \hat{d}\delta = 0. \tag{2.11}$$

从

$$\delta\Omega_{2m} = \delta\hat{d}\Omega^0_{2m-1} = -\hat{d}(\delta\Omega^0_{2m-1}) = 0,$$

人们可知

$$\delta\Omega^0_{2m-1} = \hat{d}\Omega^1_{2m-2}.$$

利用 (11) 式人们可以得到:

$$\begin{gathered} \delta\Omega^{k-1}_{2m-k} = \hat{d}\Omega^k_{2m-k-1} \\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2m \end{gathered} \tag{2.12}$$

这是通常的规范变换和空间外微分间的一组 Chern-Simons 链的递推关系.

现在我们考虑由两个子流形构成的流形，一个是普通坐标空间 $X^\mu(\mu = 1, 2, \cdots N_1)$，另一个为任意所考虑的空间 $\xi^i(i = 1, 2, \cdots N_2)$. 那么人们可以将规范势和外微分也分成两部分:

$$C = A + \bar{A},\ \hat{d} = d + \bar{d} \tag{2.13}$$

其中

$$\begin{gathered} A = A_\mu(X,\ \xi)dX^\mu,\ \bar{A} = \bar{A}_i(X,\ \xi)d\xi^i \\ d = dX^\mu \frac{\partial}{\partial X^\mu},\ \bar{d} = d\xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \end{gathered} \tag{2.14}$$

则场强可重写为:

$$W = \hat{d}C + C^2 \equiv F + \bar{F} + M \tag{2.15}$$

其中:

$$\begin{aligned} F &= dA + A^2, \\ \bar{F} &= \bar{d}\bar{A} + \bar{A}^2, \\ M &= \bar{d}A + d\bar{A} + A\bar{A} + \bar{A}A. \end{aligned} \tag{2.16}$$

从上式可看到，F 是总场强在 X 子流形上的分量，$\bar{F}$ 是总场强在 ξ 子流形上的分量，M 可看作是两子流形上的混合分量.

则第 n 次 Chern 特征写为：

$$C_n = \Omega_{2n} = \frac{i^n}{n!(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\,(F + \bar{F} + M)^n \tag{2.17}$$

现在将 Ω_{2n} 按子流形 ξ 的外微分次数展开，

$$\Omega_{2n} = \Omega_{2n,0} + \Omega_{m-1,1} + \cdots + \Omega_{0,2n} \tag{2.18}$$

其中 $\Omega_{2n-m,m}$. 第一个指标表示 dX 的 $2n-m$ 形式，第二个指标表示 $d\xi$ 的 m-形式，它的普遍表达式可写为：

$$\Omega_{2n-(m+k),m+k} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k}\mathrm{STr}\,(F^{n-m}\bar{F}^k M^{m-k}) \tag{2.19}$$

将 (2.18) 式代入 (2.6) 式并比较 $d\xi$ 的外微分形式的阶数人们很容易看到：

$$\begin{aligned}
\bar{d}\Omega_{2n,0} &= -d\Omega_{2n-1,1}\\
\bar{d}\Omega_{2n-1,1} &= -d\Omega_{2n-2,2}\\
&\vdots\\
\bar{d}\Omega_{2n-m,m} &= -d\Omega_{2n-m-1,m+1}\\
&\vdots\\
\bar{d}\Omega_{0,2n} &= 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

这组方程反映了子流形间 Chern 形式的递推关系.

将 Chern 密度 Ω^0_{2n-1} 也按 $d\xi^i$ 展开：

$$\Omega^0_{2n-1} = \Omega^0_{2n-1,0} + \Omega^0_{2n-2,1} + \cdots + \Omega^0_{0,2n-1} \tag{2.21}$$

将 (2.18) 和 (2.21) 代入 (2.7) 式. 并比较 $d\xi$ 的阶数，人们可得到：

$$\begin{aligned}
\Omega_{2n,0} &= d\Omega^0_{2n-1,0}\\
\Omega_{2n-1,1} &= \bar{d}\Omega^0_{2n-1,0} + d\Omega^0_{2n-2,1}\\
&\vdots\\
\Omega_{2n-m,m} &= \bar{d}\Omega^0_{2n-m,m-1} + d\Omega^0_{2n-m-1,m}\\
&\vdots\\
\Omega_{0,2n} &= \bar{d}\Omega^0_{0,2n-1}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

一般地人们可以把 Ω^{m-1}_{2n-m} 按 $d\xi$ 展开为

$$\Omega^{m-1}_{2n-m} = \Omega^{m-1}_{2n-m,0} + \Omega^{m-1}_{2n-m-1,1} + \cdots + \Omega^{m-1}_{0,2n-m} \tag{2.23}$$

其中 $\Omega^{m-1}_{2n-m-k,k}$ 的上指标 $(m-1)$ 表示通常规范作用的外微分形式.

把展开式代入 (2.12). 并比较各外微分形式的阶数，人们可得到：

$$\begin{aligned}
\delta\Omega^{m-1}_{2n-m,0} &= d\Omega^{m}_{2n-m-1,0}\\
\delta\Omega^{m-1}_{2n-m-1,1} &= \bar{d}\Omega^{m}_{2n-m-1,0} + d\Omega^{m}_{2n-m-1,1}\\
&\vdots\\
\delta\Omega^{m-1}_{2n-m-k,k} &= \bar{d}\Omega^{m-1}_{2n-m-k,k-1} + d\Omega^{m-1}_{2n-m-k-1,k}\\
&\vdots\\
\delta\Omega^{m-1}_{0,2n-m} &= \bar{d}\Omega^{m}_{0,2n-m-1}\\
m &= 1,\ 2,\cdots,\ 2n
\end{aligned} \tag{2.24}$$

上面只是形式上给出了各外微分形式间的递推关系. 下面我们将讨论它们的一些具

体应用.

在许多具体问题中．实际上可能会有一些约束条件．为此我们来看一些特殊情况.

三、广义的第二示性类和协变反常

考虑有一个子流形上的场强为零,设为:

$$\bar{F}=\bar{d}\bar{A}+\bar{A}^2=0,\quad F\neq 0,\quad M\neq 0 \tag{3.1}$$

由此容易看到有下列等式:

$$\begin{gathered} dF=[F,\ A],\ \bar{d}M=[M,\ \bar{A}) \\ \bar{d}F+dM=[F,\ \bar{A}]+[M,A] \end{gathered} \tag{3.2}$$

以及

$$\Omega_{2n-m,m}=\frac{i^n}{n!(2\pi)^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\mathrm{STr}\,(F^{n-m}M^m) \tag{3.3}$$

并且

$$\Omega_{2n-m,m}=0 \text{ 当 } m>n \text{ 时} \tag{3.4}$$

最简单地人们可取

$$\bar{A}(x,\ \xi)=0 \tag{3.5}$$

特别当人们再取

$$A(x,\xi)=A^{(0)}(x)+\sum\xi^i\,(A^{(i)}(x)-A^{(0)}(x)) \tag{3.6}$$

$$|\xi^i|\leqslant 1$$

那么

$$M=\sum_i d\xi^i(A^i(x)-A^0(x)) \tag{3.7}$$

代入递推方程(2.20),并在 ξ^i 子流形的单形上积分,人们就可以得到广义的第二示性类[2]即:

$$\begin{aligned} &(\Delta w_{2n-m,m})(A^0,\ A^1,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m+1}) \\ &=-dw_{2n-m-1,m+1}(A^0,\ A^1,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m+1}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中Δ是上边缘算子．其操作为:

$$\begin{aligned} &(\Delta w_{2n-m,m})(A^0,\ A^1,\ A^2,\ \cdots A^{i-1},\ A^i,\ A^{i+1},\ \cdots,\ A^{m+1}) \\ &=\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i w_{2n-m,m}(A^0,\ A^1,\ A^2,\cdots A^{i-1},\hat{A}^i,\ A^{i+1},\ \cdots,\ A^{m+1}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中带有$\wedge$的元素表示要省掉.

$$\begin{gathered} w_{2n-m,m}=\int_{\xi\in S_m}\Omega_{2n-m,m}, \\ \Delta w_{2n-m,m}=\int_{\xi\in\partial S_{m+1}}\Omega_{2n-m,m} \end{gathered} \tag{3.10}$$

这里 S_m 是 ξ 子流形上的 m 单形．如 $m=0,1,2,3$ 的单形相应为点、直线、三角形、四面体．∂S_{m+1} 表示取 $m+1$ 单形的边缘.

正如人们熟知，$w_{2n-2,2}$ 与 $2n-2$ 维空间的 Wess-Zumino-Witten 反常相联系。

另外，若人们取：

$$\begin{aligned}&\bar{A}(x,\xi)=0,\\&A(x,\xi)=U^{-1}(x,\xi)(A(x)+d)U(x,\xi)\end{aligned}\tag{3.11}$$

那么：

$$\begin{aligned}&F=dA+A^2=U^{-1}(x,\xi)F(x)U(x,\xi),\\&M=\bar{d}A\equiv-dB-AB-BA,\\&B=U^{-1}(x,\xi)dU(x,\xi),\\&\bar{d}F=[F,B]\end{aligned}\tag{3.12}$$

这时人们很容易发现：

$$\bar{d}\Omega_{2n,0}=0\tag{3.13}$$

由方程 (20) 可看到，这要求，

$$d\Omega_{2n-1,1}=0\tag{3.14}$$

因此局部情形下，$\Omega_{2n-1,1}$ 应能表示为：

$$\Omega_{2n-1,1}=d\tilde{\Omega}^0_{2n-2,1},\tag{3.15}$$

容易证明：

$$\tilde{\Omega}^0_{2n-2,1}=-\frac{i^n n}{n!(2\pi)^n}\mathrm{Tr}(BF^{n-1})\tag{3.16}$$

因此，如果人们定义

$$\beta=\int_{x\in M^{n-1}}\int_{\xi\in S_1}\Omega_{2n-1,1}=\int_{x\in\partial M^{n-1}}\int_{\xi\in S_1}\tilde{\Omega}^0_{2n-2,1}\tag{3.17}$$

这里假定 $\partial M^{n-1}=M^{n-2}\neq0$，那么，人们发现 β 正比于通常的协变反常 [3]。

由方程组 (2.20) 人们可看到，它满足：

$$\bar{d}\Omega_{2n-1,1}=-d\Omega_{2n-2,2}\tag{3.18}$$

四、Faddeev 型上同调

这里我们将考虑一个子流形上的场强分量和混合场强分量都为零的情况。设为：

$$\bar{F}=M=0\tag{4.1}$$

那么有：

$$dF=[FA],\ \bar{d}F=[F,\bar{A}]$$

$$\Omega_{2n-m,m}=\begin{cases}\dfrac{i^n}{n!(2\pi)^n}\mathrm{Tr}(F^n) & m=0\\ 0 & m\neq0\end{cases}\tag{4.2}$$

这时 Chern 形式降到 x 子流形上。

由方程 (2.22)，人们得到：

$$\Omega_{2n,0}=d\Omega^0_{2n-1,0}$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{d}\Omega^0_{2n-1,0} = -d\Omega^0_{2n-2,1}\\
&\vdots\\
&\bar{d}\Omega^0_{2n-m,m-1} = -d\Omega^0_{2n-m-1,m}\\
&\vdots\\
&\bar{d}\Omega^0_{0,2n-1} = 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

这样人们就得到了另一组递推关系,它反映了在子流形间 Chern 密度的递推性质.

如果取 ξ 子流形为群流形,并选择:

$$
\begin{aligned}
A(x,\xi) &= U^{-1}(x,\xi)(A(x)+d)U(x,\xi),\\
\bar{A}(x,\xi) &= U^{-1}(x,\xi)\bar{d}U(x,\xi)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

那么人们就得到通常的 Chern-Simons 链,这时只要作相应代换:

$$\bar{d}\longleftrightarrow\delta \quad \Omega^0_{2n-m,m-1}\longleftrightarrow\Omega^{m-1}_{2n-m,0}$$

并取:

$$U(x,\xi) = h(\xi^1, g_1(x)h(\xi^2, g_2(x)h(\xi^3,\cdots)\cdots) \tag{4.5}$$

其中函数 h 为:

$$
\begin{aligned}
&h(\xi^i,\ g_i(x)) = e^{(1-\xi^i)u_i(x)3}, g_i(x) = e^{u_i(x)}\\
&h(0,\ g_i(x)) = g_i(x),\ h(1,\ g_i(x)) = 1
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

那么在由点

$$
\begin{aligned}
p_i &= (\xi^1,\ \xi^2,\ \cdots\xi^{i-1},\ \xi^i,\ \xi^{i+1},\ \cdots)\\
&= (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)\\
i &= 1,\ 2,\ \cdots\\
p_0 &= (0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

组成的单形上积分. 人们就可得到 Faddeev 型[4]的上同调,即:

$$
\begin{aligned}
&(\Delta w^0_{2n-m,m-1})\ (A,\ g_1,\ g_2,\ \cdots g_m)\\
&= -dw^0_{2n-m-1,m}(A,g_1,g_2,\cdots g_m)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

其中△是上边缘算子,其操作为:

$$
\begin{aligned}
&(\Delta w^0_{2n-m,m-1})(A,\ g_1,\ g_2,\ \cdots g_m)\\
&= w^0_{2n-m,m-1}(A^{g_1},\ g_2,\ \cdots g_m) - w^0_{2n-m,m-1}(A,g_1g_2,g_3,\cdots g_m)\\
&\quad + (-1)^m w^0_{2n-m,m-1}(A,\ g_1,\ g_2,\ \cdots g_{m-1})
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
w^0_{2n-m-1,m} &= \int_{\xi\in S_m}\Omega^0_{2n-m-1,m},\\
\Delta\ w^0_{2n-m,m-1} &= \int_{\xi\in\partial S_m}\Omega^0_{2n-m,m-1}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

其中 S_m 是由 $m+1$ 个点组成的 m 单形.

人们知道

$$\alpha = 2\pi\int_{x\in M^{2n-2}} w^0_{2n-2,1} \tag{4.11}$$

就是在无边缘的 $2n-2$ 维空间的 Wess-Zumino-Witten 有效作用量.

利用 stoke's 定理. 人们容易发现

$$\int_{x\in M^{2n-2}} w^0_{2n-2,1}(A^{g_1},\ g_2) - \int_{x\in M^{2n-2}} w^0_{2n-2,1}(A, g_1g_2) + \int_{x\in M^{2n-2}} w^0_{2n-2,1}(A,\ g_1) = 0 \tag{4.12}$$

这个 1-上闭条件可以看作为 Zumino 反常自洽条件的整体表示形式.

五、广义 Chern-Simons 链和 θ-真空

最后我们来考虑只有场强的混合分量为零的情况

$$M = \bar{d}A + d\bar{A} + A\bar{A} + \bar{A}A = 0 \tag{5.1}$$

由此很容易得到等式:

$$\begin{aligned} dF &= [F, A], \quad \bar{d}F = [F, \bar{A}] \\ d\bar{F} &= [\bar{F}, A], \quad \bar{d}\bar{F} = [\bar{F}, \bar{A}] \end{aligned} \tag{5.2}$$

这里人们可看到一些对称性.

$$A \longleftrightarrow \bar{A}, \quad d \longleftrightarrow \bar{d}$$

Chern 形式为:

$$\Omega_{2n-2m,2m} = \frac{i^n}{n!(2\pi)^n} \mathrm{STr}\,(F^{n-m}\bar{F}^m) \tag{5.3}$$

这时方程 (2.22) 变为:

$$\begin{aligned} &\Omega_{2n,0} = d\Omega^0_{2n-1,0} \\ &\bar{d}\Omega^0_{2n-1,0} = -d\Omega^0_{2n-2,1} \\ &\bar{d}\Omega^0_{2n-2,1} = -d\Omega^0_{2n-3,2} + \Omega_{2n-2,2} \\ &\bar{d}\Omega^0_{2n-3,2} = -d\Omega^0_{2n-4,3} \\ &\vdots \\ &\bar{d}\Omega^0_{2n-2k,2k-1} = -d\Omega^0_{2n-2k-1,2k} + \Omega_{2n-2k,2k} \\ &\bar{d}\Omega^0_{2n-2k-1,2k} = -d\Omega^0_{2n-2k-2,2k+1} \\ &\bar{d}\Omega^0_{2n-2k-2,2k+1} = -d\Omega^0_{2n-2k-3,2k+1} + \Omega_{2n-2k-2,2k+2} \\ &\vdots \\ &\Omega_{0,2n} = \bar{d}\Omega^0_{0,2n-1} \end{aligned} \tag{5.4}$$

人们注意到这组递推关系与通常的 Chern-Simons 链相比. 每递推隔一次要附加一项. 这一项在 d 和 $\bar{d}$ 的作用下都为零. 这从方程 (2.20) 很容易看到这一点. 因为这时

$$\Omega_{2n-2k-1,2k+1} = 0 \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{5.5}$$

另外,人们可以证明 $\Omega^0_{2n-2,1}(A, \bar{A})$ 关于 $\bar{A}$ 是线性的. 即

$$\Omega^{(A,\bar{A})}_{2n-2,1} = \mathrm{Tr}(\bar{A}n(A)) \tag{5.6}$$

因此在这种情况同样给出 Wess-Zumino 反常形式

人们可考虑这种情况的一个简单例子. 取

$$\begin{aligned} \bar{A}(x, \xi) &= B(\xi) + U^{-1}(x, \xi)\bar{d}U(x, \xi), \\ A(x, \xi) &= U^{-1}(x, \xi)(A(x) + d)U(x, \xi) \end{aligned} \tag{5.7}$$

这里 $B(\xi)$ 是只与参数 ξ 有关的在子流形 ξ 上的 Abel 规范势. $U(x, \xi)$ 是所考虑群的群元,那么人们容易证明:

$$\begin{aligned} M &= d\bar{A} + \bar{d}A + A\bar{A} + \bar{A}A = 0, \\ \bar{F} &= \bar{d}\bar{A} + \bar{A}^2 = \bar{d}B, \\ F &= dA + A^2 = U^{-1}(x, \xi)F(x)U(x, \xi) \end{aligned} \tag{5.8}$$

那么:

$$\Omega_{2n-2m,2m} = \frac{i^n}{n!(2\pi)^n} \mathrm{STr}\,(\bar{d}B)^m F^{n-m}$$
$$= \frac{i^n}{(n-m)!m!(2\pi)^n} (\bar{d}B)^m \mathrm{Tr} F^{n-m}(x)$$
$$\equiv \bar{d}\,\Omega'_{2n-2m,2m-1}, \tag{5.9}$$

其中:

$$\Omega'_{2n-2m,2m-1} = \frac{i^n}{(n-m)!m!(2\pi)^n} \bar{B}(\xi)(\bar{d}B)^{m-1} \mathrm{Tr} F(x)^{n-m} \tag{5.10}$$

引进新的 Chern 密度.

$$\bar{\Omega}^0_{2n-2m,2m-1} = \Omega^0_{2n-2m,2m-1} + \Omega'_{2n-2m,2m-1} \tag{5.11}$$

人们可看到方程 (5.4) 变为:

$$\begin{aligned}
&\Omega_{2n,0} = d\Omega^0_{2n-1,0}\\
&\vdots\\
&\bar{d}\Omega^0_{2n-2m+1,2m-2} = -d\Omega^0_{2n-2m,2m-1}\\
&\bar{d}\bar{\Omega}^0_{2n-2m,2m-1} = -d\Omega^0_{2n-2m-1,2m}\\
&\vdots\\
&\bar{d}\Omega^0_{0,2n-1} = 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

如果人们推广有效作用量的定义:

$$\bar{\Gamma}(A,\bar{A}) = 2\pi \int_{x\in M^{2n-2}} \int_{\xi\in S_1} \bar{\Omega}^0_{2n-2,1}(A,\ \bar{A})$$
$$= \tilde{\Gamma}(A,\ U) + \Gamma'(A,\ \theta), \tag{5.13}$$

其中:

$$\tilde{\Gamma}(A,U) = 2\pi \int_{x\in M^{2n-2}} \int_{\xi\in S_1} \Omega^0_{2n-2,1} \tag{5.14}$$

就是在 $2n-2$ 维无边缘流形 M^{2n-2} 上的 Wess-Zumino-Witten 有效作用量.

$$\Gamma'(A,\theta) = 2\pi \int_{x\in M^{2n-2}} \int_{\xi\in S_1} \Omega'_{2n-2,1}$$
$$= \theta \frac{i^{n-1}}{(n-1)!(2\pi)^{n-1}} \int_{x\in M^{2n}} \mathrm{Tr} F^{n-1}, \tag{5.15}$$

其中:

$$\theta = i \int_{\xi\in S_1} B(\xi) \tag{5.16}$$

当取 $n=3$ 时,人们有:

$$\Gamma'(\theta,\ A) = -\frac{1}{8\pi^2}\theta \int_{x\in M^4} \mathrm{Tr}\, F^2$$
$$= \theta \frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma}. \tag{5.17}$$

这里使用了 $F = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} T^a dx^\mu \wedge dx^\nu$, $\mathrm{Tr}\, T^a T^b = -\frac{1}{2}\delta^{ab}$. 这一项给出了与四维 Euclidean 空间出现的 θ-真空相同的项。这一项如果在物理上有意义，那么 (5.16) 式给

出的 θ 值应与积分路径无关或至多相差一整数．这就要求 B (ξ) 或者是纯规范或者相应的磁通量是量子化的．

上面我们仅讨论了一些特殊情况．关于它们可能的应用可作进一步的讨论．

参　考　文　献

[1] B. Zumino Cargese Lectures 1983.
[2] Guo, H. Y. Hou, B. Y., Wang, S. K. and Wu Ke Preprint AS-ITP-84-039 and AS-ITP-84-044 (1984)
[3] K. Fujikawa Phys. Rev. **D21** 2848 (1980).
[4] L. Faddeev Phys. Lett. **145B** **81**(1984).

THE GENERAL CHERN-SIMONS COCHAIN AND THEIR APPLICATION

Chou Kuan-chao　Wu Yue-liang　Xei Yan-bo

(Institute of Theoretical Physics. Academia Sinica)

Abstract

Some general Chern-Simons cochains are easily obtained by expanding the Chern form according to the degree of the form in its submanifold and using the closed property of the Chern form. The recurrent relatuns of Chern form between submanifolds are discussed under some constraints. We also consider their application.