第10卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 10, No. 2
1986年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1986

双荷子系统的 $SO(4)$ 对称性

许伯威
（上海交通大学）

摘　　要

本文讨论了双荷子系统的能谱，表明双荷子系统哈密顿量 $H_D = \frac{1}{2M}\pi^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\mu^2}{2Mr^2}$ 具有 $SO(4)$ 对称性.

一、氢原子

我们知道，中心力场的哈密顿量具有三维转动对称性，三维转动 $SO(3)$ 群不可约表示维数为 $2l+1$。但氧原子能级的简并度大于 $2l+1$，这表明氢原子哈密顿量具有大于 $SO(3)$ 群的对称性. 氢原子哈密顿量为

$$H_H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 - \frac{l^2}{r}. \tag{1}$$

H_H 除了和轨道角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 对易外

$$[H_H, \boldsymbol{L}] = 0, \tag{2}$$

尚有

$$[H_H, \boldsymbol{A}] = 0. \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{-2mH_H}}\left[l^2 m \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\right] \tag{4}$$

即为 Lenz 向量[1-3]. 而 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{A}$ 构成 $SO(4)$ 群的生成子

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= i\varepsilon_{ijk}L_k \\
[L_i, A_j] &= i\epsilon_{ijk}A_k \\
[A_i, A_j] &= i\varepsilon_{ijk}L_k,
\end{aligned} \tag{5}$$

并且满足

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A} = 0. \tag{6}$$

由以上性质，给出氢原子能谱

本文1985年4月8日收到.

.on
ım

$$H_H = -\frac{l^4 m}{2(\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{A}^2 + 1)} = -\frac{l^4 m}{2(2j+1)^2}. \tag{7}$$

其中 $j = 0, \frac{1}{2}, 1\cdots\cdots$. 氢原子能谱与 $SO(4)$ 群 Casimit 算子有关,呈现了 $SO(4)$ 对称性.

二、Schwinger 双荷子系统

现在我们来研究双荷子系统的对称性. 双荷子是带有电荷同时也带有磁荷的粒子. Schwinger 给出二个双荷子系统的哈密顿量为[4,5]

$$H_S = \frac{1}{2M}\boldsymbol{\pi}^2 - \frac{\alpha}{r}. \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - \mu\boldsymbol{D} \qquad \nabla\times\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{9}$$

$$\mu = l_1 g_2 - l_2 g_1 \quad \alpha = -(l_1 l_2 + g_1 g_2).$$

M 为双荷子系统的折合质量. l_i、$g_i(i = 1, 2)$ 分别为双荷子的电荷和磁荷. $\boldsymbol{D}$ 为单位磁荷所产生的矢量势,它是含有奇异弦的. 奇异弦的引入,破坏了系统的转动不变性, 但如 μ 取整数(称 Schwinger 量子化条件),则仍可保持转动不变性,因为在这种情况下, 奇异弦的不同取向和规范变换相联系[6],而转动变换算子为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\pi} - \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{10}$$

满足

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \tag{11}$$

并容易证明

$$[\boldsymbol{J}, H_S] = 0. \tag{12}$$

所以 H_S 仍具有 $SO(3)$ 对称性. H_S 是否像氢原子那样具有更大的对称性,这是我们所要讨论的. 和氢原子的 Lenz 向量类比,自然的做法是引入

$$\boldsymbol{I} = \alpha M\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{J}), \tag{13}$$

但 $\boldsymbol{I}$ 和 H_S 并不对易

$$[\boldsymbol{I}, H_S] = -i\frac{\mu^2}{2Mr^4}(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}). \tag{14}$$

所以 H_S 并不具有和氢原子类似的 $SO(4)$ 对称性.

三、$SO(4)$ 对称的双荷子系统

现在我们假设具有 $SO(4)$ 对称性的双荷子系统哈密顿量 H_D 为

$$H_D = H_S + f(r). \tag{15}$$

其中 $f(r)$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的径向函数，它由以下条件所决定，即要求

$$[\boldsymbol{I}, H_D] = 0. \tag{16}$$

由 (14)—(16) 式给出

$$\nabla f(r) = -\frac{\mu^2}{Mr^4}\boldsymbol{r}, \tag{17}$$

即有

$$f(r) = \frac{\mu^2}{2Mr^2}, \tag{18}$$

所以

$$H_D = \frac{1}{2M}\boldsymbol{\pi}^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\mu^2}{2Mr^2}. \tag{19}$$

而

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{\sqrt{-2MH_D}}\left[\alpha M\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{J})\right] \tag{20}$$

即为对应 H_D 的 Lenz 向量．对于 H_D 有

$$[\boldsymbol{J}, H_D] = 0 \qquad [\boldsymbol{I}, H_D] = 0. \tag{21}$$

且可证明，除 (11) 式外，尚有

$$\begin{aligned} &[J_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k \\ &[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \end{aligned} \tag{22}$$

和

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{I} = -\alpha\mu\sqrt{\frac{M}{-2H_D}}. \tag{23}$$

由 (20) 式可得

$$\boldsymbol{I}^2 = -\frac{\alpha^2 M}{2H_D} - \boldsymbol{J}^2 - 1 + \mu^2, \tag{24}$$

即

$$H_D = -\frac{\alpha^2 M}{2(\boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{I}^2 + 1 - \mu^2)}. \tag{25}$$

现设

$$\boldsymbol{J}^{(1)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{I}) \qquad \boldsymbol{J}^{(2)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}). \tag{26}$$

由 (11)、(22)、(26) 式，可有

$$\begin{aligned} &[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] = i\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} \\ &[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] = i\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)} \\ &[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

以及

$$\boldsymbol{J}^{(1)2} + \boldsymbol{J}^{(2)2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{I}^2)$$

$$J^{(1)^2} - J^{(2)^2} = J \cdot I. \tag{28}$$

$J^{(1)}$ 和 $J^{(2)}$ 构成 $SU(2) \times SU(2) \sim SO(4)$ 的生成子. $J^{(1)^2} = j_1(j_1+1)$ 和 $J^{(2)^2} = j_2(j_2+1)$ 分别为 $SU(2)$ 群的 Casimit 算子. 其中 $j_i(i = 1, 2)$ 可取 $0, \frac{1}{2}, 1 \cdots$.

由 (23)、(24) 式,给出

$$J^2 + I^2 + 1 - \mu^2 = \frac{1}{\mu^2}(J \cdot I)^2. \tag{29}$$

将 (28) 代入 (29) 式,经化简,得关系式

$$(j_1 - j_2)^2 = \mu^2. \tag{30}$$

由于 μ 为整数,所以 j_1 和 j_2 必须同时取正整数或正半整数.

将 (30) 代入 (25) 式,因此有

$$H_D = -\frac{\alpha^2 M}{2(j_1 + j_2 + 1)^2} = -\frac{\alpha^2 M}{2n^2}. \tag{31}$$

其中 $n = j_1 + j_2 + 1$ 为正整数. (31) 式即为具有 $SO(4)$ 对称的双荷子系统能级. 以下列出几个低量子数 n 的能级及其简并度 S.

n	1	2			3				
j_1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
j_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
S	1	3	4	3	5	8	9	8	5

对 n 为确定的总简并度的一般表达式为

$$S = \sum_{m=1}^{2n-1} (2n - m)m = \frac{1}{3} n(2n - 1)(2n + 1), \tag{32}$$

其简并度大于氢原子的简并度. 这是因为在氢原子中 $j_1 = j_2$, 而在双荷子系统中 j_1 和 j_2 的取值由 (30) 式所决定.

和 H_S 相比, H_D 中多了一附加项. 这一项和 H_D 中的离心势相加,使 H_D 呈现 $SO(4)$ 对称性.

参 考 文 献

[1] W. Lenz, *Z. Phys.*, **24**(1924), 197.
[2] W. Pauli, *Z. Phys.*, **36**(1926), 336.
[3] B. G. Wybourne, "Classical Groups for Physicists" (A Wiley-Interscience publication 1974) 297.
[4] J. Schwinger, *Science* **165**(1969), 757.
[5] K. G. Akdeniz and A. O. Barut, *Lett. Nuovo Cimento* **26**(1979), 627.
[6] A. Peres, *Phys. Rev.*, **167**(1968), 1449.

ON SO (4) SYMMETRY OF DYONS SYSTEM

Xu Bo-wei
(*Shanghai Jiaotong University*)

Abstract

We discuss the symmetry of a dyons system, and show that the Hamiltonian of dyons $H_D = \frac{1}{2M}\pi^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\mu^2}{2Mr^2}$ has $SO(4)$ symmetry.

)

$_2$

)

7.