

精确到累积展开三级贡献的 U_1 及 SU_2 平均元格内能的解析结果

吴济民 · 赵佩英

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

我们在格点规范理论中应用累积展开的方法,在4维和5维时空解析地计算了精确到累积展开三级贡献的 U_1 和 SU_2 群元格平均内能,计算结果和 Monte Carlo 数据自洽。本文并对在格点规范理论中使用累积展开方法作了讨论。

为了研究强相互作用中的非微扰效应, K. Wilson^[1] 提出了格点规范理论。最近几年,人们采用 Monte Carlo 数值模拟方法,已经初步得到了关于非微扰效应的许多重要结果^[2]。但是,作为一个比较基本的理论,仍然非常希望发展关于格点规范理论解析处理的理论体系。

虽然已经有了一些关于格点规范理论的解析处理方法,例如平均场近似方法^[3],变分法^[4],但它们都有各自的适用范围和局限性,本文暂不讨论这个问题。最近在文献[5]中提出了在格点规范理论中应用累积展开方法的可能性。在文献[6]中加上 Hopping 参数展开法之后,用累积展开方法讨论了虚费米子圈对 SU_2 元格平均内能的影响,以上计算都与现有的 MC 数据自洽,但都只考虑到累积展开二级修正。为了继续研究这种方法的性质,本文讨论 U_1 和 SU_2 群元格平均内能精确到累积展开三级的行为并由此讨论这种方法的一些性质。

一、计算方法和结果

在格点规范理论中,体系的配分函数 Z 是一个难以解析计算的基本量,为了能试图解析计算它,让我们引入试探作用量 $S_0(U, J)$, 其中 J 为变分参数,同时又是外源,使得能构成一个泛函,把配分函数或统计平均值用此泛函及其导数表示出来。可以把配分函数改写如下,并作累积展开^[5]

$$Z = \int [dU] e^S$$

$$= e^{(S-S_0)_0} \int [dU] e^{S_0} e^{S-S_0-(S-S_0)_0}$$

$$= Z_0 e^{\langle S - S_0 \rangle_0} \left[1 + \frac{1}{2} \langle (S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 + \dots \right] \quad (1)$$

其中

$$Z_0 \equiv \int [dU] e^{S_0} \quad (2)$$

$$\langle \dots \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int [dU] e^{S_0} (\dots)$$

并记 $W_{\pm} \equiv -\frac{1}{N_p} \ln(Z_0 e^{\langle S - S_0 \rangle_0})$, 这是自由能的主要贡献部分.

这样, 就把统计问题由 S 系统转到了 S_0 系统. 我们选取 S_0 , 要求它使问题简单, 可解, 而且使得修正项级数((1)中方括号内)收敛得快. 还可以看出, 在此修正级数中线性项修正为零, 第一个修正项来自平方项, 所有非零贡献都来自连结图形.

如果我们能解析地计算得到整个级数, 这一结果应当与参数 J 无关. 事实上, 我们总是只求得有限项, 为此, 加入对主部极值条件,

$$\frac{\partial W_{\pm}}{\partial J} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial J^2} > 0 \quad (3)$$

用以确定参数 J , 并得到最大的 $Z_0 e^{\langle S - S_0 \rangle_0}$. 再在此基础上计算修正. 这相当于选取(近似的)自由能的极小值.

我们选取 $SU(N)$ Wilson 作用量

$$S = \beta \sum_p S_p = \beta \sum_p \frac{1}{2N} \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger - 2) \quad (4)$$

以及取

$$S_0 = \sum_l \text{Tr}(J_l U_l^\dagger + U_l J_l^\dagger) \quad (5)$$

平均元格内能为

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{N_p} \left\langle \sum_p \left[1 - \frac{1}{2N} \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger) \right] \right\rangle \\ &= 1 - \frac{1}{N_p} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 Z 由(1)式计算得到. 注意到以下关系式

$$Z_0 = \int [dU] e^{\sum_l \text{Tr}(J_l U_l^\dagger + U_l J_l^\dagger)} = \prod_l f(J_l) \quad (7)$$

对 SU_2 群, 其中单键积分为[7]

$$f(J) = \int dU_1 e^{\text{Tr}(J_1 U_1^\dagger + U_1 J_1^\dagger)} = \frac{2I_1(x)}{x}, \quad x = 2\sqrt{K_0} \quad (8)$$

$$K_0 = \text{Tr}(JJ^\dagger) + \det J + \det J^\dagger$$

为了解析计算的可行性, 在实际计算中, 我们选取各键上的参数相等, 这样可得

$$\langle S_0 \rangle_0 = N_l \frac{x I_2(x)}{I_1(x)}, \quad \langle S \rangle_0 = \frac{\beta}{2N} 4N_p \left[\frac{I_2(x)}{I_1(x)} \right]^4 \quad (9)$$

其中 $I_n(x)$ 是 n 阶修正的贝塞尔函数. N_l, N_p 分别是系统的键数和无格数目. 从(1)式

看到,为了计算到三级修正,我们需要计算下列量:


















$$\begin{aligned} \langle (S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 &= \langle (S - \langle S \rangle_0)^2 \rangle_0 - 2 \langle (S - \langle S \rangle_0)(S_0 - \langle S_0 \rangle_0) \rangle_0 \\ &\quad + \langle (S_0 - \langle S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 \\ \langle (S - S_0 - \langle S - S_0 \rangle_0)^3 \rangle_0 &= \langle (S - \langle S \rangle_0)^3 \rangle_0 - 3 \langle (S - \langle S \rangle_0)^2 (S_0 - \langle S_0 \rangle_0) \rangle_0 \\ &\quad + 3 \langle (S - \langle S \rangle_0)(S_0 - \langle S_0 \rangle_0)^2 \rangle_0 - \langle (S_0 - \langle S_0 \rangle_0)^3 \rangle_0 \end{aligned} \quad (10)$$

显然,只有连接图形才有非零贡献,例如其中一些图形的贡献是:

$$\langle (S - \langle S \rangle_0)^2 \rangle_0 = \sum_P \langle \square \rangle_0 + 4(2d-3) \sum_P \langle \square \square \rangle_0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \langle (S - \langle S \rangle_0)^3 \rangle_0 &= \sum_P \langle \square \square \rangle_0 + 12(2d-3) \sum_P \langle \square \square \rangle_0 \\ &\quad + 4(2d-3)(2d-4) \sum_P \langle \square \square \rangle_0 \\ &\quad + 12(2d-3)^2 \sum_P \langle \square \square \square \rangle_0 + 8(2d-4) \sum_P \langle \square \rangle_0 \end{aligned} \quad (12)$$

在 d 维空间,各类拓扑图形的数目(到三级)是:

	1		$4(2d-3)$		
	4		1		
	1		$12(2d-3)$		$4(2d-3)(2d-4)$
	$24[(2d-4)^2 + (2d-3)]$		$12(2d-3)^2$		$8(2d-4)$
	4		$24(2d-3)$		$4(2d-3)$
	4		8		4
	1				

作为一个例子,我们给出一个典型图形的贡献:

$$\begin{aligned}
 \langle \square \rangle &= \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \frac{1}{f^4} \text{Tr} \left[\frac{\partial}{\partial J_1^+} \frac{\partial}{\partial J_2^+} \frac{\partial}{\partial J_3} \frac{\partial}{\partial J_4} + \text{h.c.} \right] \\
 &\quad \times \text{Tr} \left[\frac{\partial}{\partial J_1} + \frac{\partial}{\partial J_2} + \frac{\partial}{\partial J_3} \frac{\partial}{\partial J_4} + \text{h.c.} \right] \\
 &\quad \times \text{Tr} \left[\frac{\partial f_1}{\partial J_1} + \frac{\partial f_2}{\partial J_2} + \frac{\partial f_3}{\partial J_3} \frac{\partial f_4}{\partial J_4} + \text{h.c.} \right] \\
 &= \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 32 \left\{ \left(\frac{I_4}{I_1}\right)^4 + \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^4 \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{N_p} \ln Z &= -\frac{2}{d-1} \ln \left[\frac{2I_1}{x} \right] - 4 \left(\frac{\beta}{2N}\right) \left[\frac{I_2}{I_1} \right]^4 + \frac{2}{d-1} x \left[\frac{I_2(x)}{I_1(x)} \right] \\
 &\quad - 2 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left\{ 1 + 3 \left(\frac{I_3}{I_1}\right)^4 - 4(8d-11) \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^8 \right. \\
 &\quad \left. + 4(2d-3) \left[1 + 3 \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \right] \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^6 \right\} \\
 &\quad + 16 \left(\frac{\beta}{2N}\right) \left\{ \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^4 + x \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^3 \left(\frac{I_3}{I_1}\right) - x \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^5 \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{d-1} \left\{ x \left(\frac{I_2}{I_1}\right) + x^2 \left(\frac{I_3}{I_1}\right) - \left(\frac{xI_2}{I_1}\right)^2 \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{6} \{ H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 \\
 &\quad + H_9 + H_{10} + H_{11} + H_{12} \} + \dots \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中 H_i 表式见附录, 它们属于累积展开三级贡献.

此外由主部极值条件(3)给出

$$\left\{ 4\beta \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^3 - \frac{2}{d-1} x \right\} \left\{ 1 - \frac{3}{x} \left(\frac{I_2}{I_1}\right) - \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 \right\} = 0 \quad (15)$$

它有两个解(图 1)

$$1) \text{ 平凡解 } x = 0, \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x^2} > 0$$

$$2) \beta = \frac{x}{2(d-1) \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^3}, \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x^2} \geq 0 \text{ 当 } x \leq 5.3$$

当出现多重根时, 我们选取使 W_{\pm} 取最低值的根, 相当于取自自由能最低值. 所以在 4 维空间变分参数选取情况为:

$$1) x = 0, \text{ 当 } \beta < 2.8$$

$$2) \text{ 最上分支, 当 } x > 2.8 \quad (16)$$

作以上处理后, 由(6)(14)式得到 SU_2 元格平均内能曲线(到展开的三次方级), 并作 Páde 近似[1,2]. (图 2).

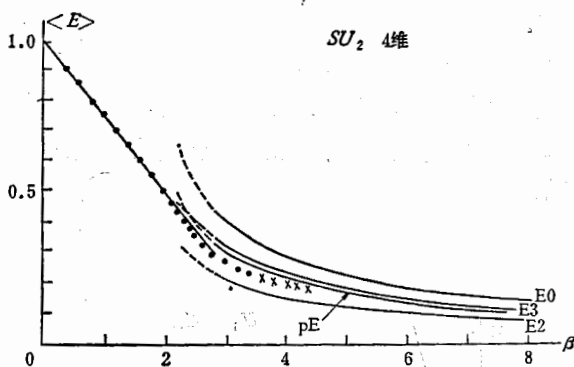
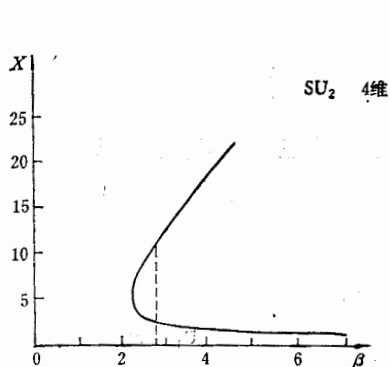


图 1 由主部极值条件(3)给出的 SU_2 群平均元格内能. 其中 E_0, E_2, E_3, PE 分别为累积展开到 0 级、2 级、3 级和作 Padé 近似 [1,2] 的结果.

相似地, 讨论 $U(1)$ 规范场情况, 这里变分参数设为

$$J = x e^{i\theta} \tag{17}$$

单键积分为

$$f(J) = I_0(x) \quad x = 2x \tag{18}$$

又有

$$\langle U^n \rangle_0 = \frac{I_n(x)}{I_0(x)} e^{in\theta}, \quad \langle U^{+n} \rangle_0 = \frac{I_n(x)}{I_0(x)} e^{-in\theta}$$

以及

$$\langle S_0 \rangle_0 = N_1 x \frac{I_1(x)}{I_0(x)}, \quad \langle S \rangle_0 = N_p \beta \left[\frac{I_1(x)}{I_0(x)} \right]^4 \tag{19}$$

精确到累积展开三级, 对 $U(1)$ 群我们得到下列贡献:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N_p} \ln Z = & -\frac{2}{d-1} \ln I_0(x) - \beta \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^4 + \frac{2}{d-1} x \left(\frac{I_1}{I_0} \right) \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \beta^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^4 \right) - (8d-11) \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^8 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(2d-3) \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^6 \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \right) \right] \right. \\ & \left. - 4\beta \left[\frac{1}{2} x \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^3 \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \right) - x \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^5 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{d-1} \left[\frac{1}{2} x^2 \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \right) - \left(x \frac{I_1}{I_0} \right)^2 \right] \right\} \\ & - \frac{1}{6} \{ H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 \\ & \quad + H_9 + H_{10} + H_{11} + H_{12} \} + \dots \tag{20} \end{aligned}$$

其中 H_i 属于累积展开三级贡献(见附录).

由主部极值条件(3)给出

$$\left\{ 4\beta \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^3 - \frac{2x}{d-1} \right\} \left\{ 1 - \frac{I_1}{xI_0} - \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^2 \right\} = 0 \tag{21}$$

与 SU_2 情况相似, 它也有两个解, 我们采用同样的取根原则, 得到在 4 维空间的参数值

(图 3).

- 1) $x = 0$, 当 $\beta < 1.2$
- 2) 最上分支, 当 $\beta > 1.2$

这样, 由(6)(20)得到 U_1 元格平均内能曲线(图 4), (到展开的三次方级)并作 Páde 近似 [1,2].

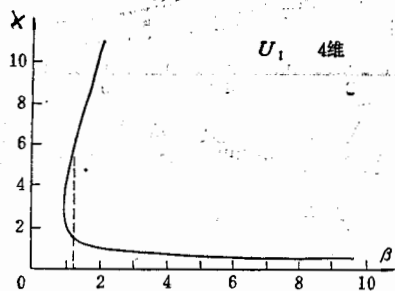


图 3 由主部极值条件(3)给出的 U_1 群情况下参数 x 的解(4 维).

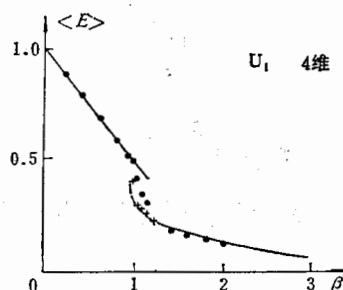


图 4 U_1 群平均元格内能, 4 维 (这里只给出 Páde 近似 [1,2] 结果, 下同).

可以看出无论在 U_1 或 SU_2 情况下, 解析结果逐级逼近 MC 数据[8]. 在我们只计算到三级修正贡献时, 所得结果已接近 MC 数据, 作 Páde 近似后, 更接近 MC 数据.

正如在[9]中所指出的那样, 在时间规范下计算结果表明, SU_2 内能曲线在 $\beta \approx 2.8$ 附近出现的跳跃不是理论固有的奇异性, 而是由于我们只计算到累积展开的有限级贡献造成的. 本文中, 我们计算到了三级贡献, 比在[5,6]中只计算到二级贡献相当地减少了这个跳跃量, 使内能曲线接近于连续. 这使人们从另一个角度上相信, 4 维 SU_2 内能曲线不出现相变. 我们也给出 5 维计算结果, 相比之下, 5 维 SU_2 内能曲线明显地出现相变(图 5).

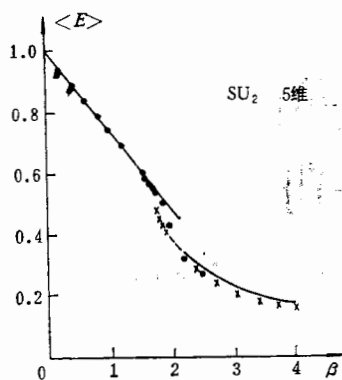


图 5 SU_2 群平均元格内能, 5 维.

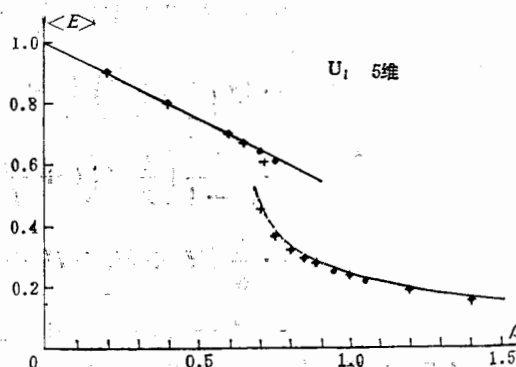


图 6 U_1 群平均元格内能, 5 维.

同样可以看出, 4 维与 5 维 U_1 内能曲线都明显地出现相变(图 4,6). 这与我们通常的理解是一致的, 即 4 维 SU_2 规范理论保持禁闭性质, 而 U_1 规范理论不存在禁闭性质.

出
果.

似
上
越

散)

的
曲
线

说
同
自

其

二、讨 论

以上的结果表明,累积展开方法是在格点规范理论中一种行之有效的理论方法,它给出的结果包括非微扰与微扰效应,只要计算到足够高的级数贡献,可望得到足够精确的结果。

计算还表明,维数越高,这一方法给出的结果越合理,展开级数收敛得越快,Padé 近似结果十分接近三级贡献结果,也更快地接近 MC 数据。这是因为最终在计算中,每条键上的变分参数都选取得相等,这相当于选取了“平均”变分参数,所以维数越高,使得结果越合理。但即使在这样的选取下,计算结果与 MC 数据就相当自洽了。

仍然须要继续研究的问题是,证明级数的收敛性(虽然到目前为止,没有发现任何发散),讨论计算非定域量的可能性。

如果在主部极值方程中,当出现多重根时,一律选取除平凡解之外的使 W_{\pm} 取最小值的根,则理论预言与 MC 数值结果可以从 crossover 点开始起更符合(图 2、4、5、6 中内能曲线中有一段改为按虚线取值)。我们将继续讨论这一选取的可能性。

计算还表明,这里选取的 S_0 (5) 式)是一种比较便于计算的试探作用量,虽然原则上说也可以选取其它试探作用量。但不排除为了计算不同的量要选取对各自比较方便的不同试探作用量的可能性。

附 录

在(14),(20)式各量是

$$H_1 = E_1 - 3E_2 + 2E_3$$

$$H_2 = 12(2d - 3)(E_4 - 2E_5 - E_2 + 2E_3)$$

$$H_3 = 4(2d - 4)(2d - 3)(E_6 - 3E_5 + 2E_3)$$

$$H_4 = 24[(2d - 4)^2 + (2d - 3)](E_7 - 2E_5 + E_3)$$

$$H_5 = 12(2d - 3)^2(E_7 - 2E_5 + E_3)$$

$$H_6 = 8(2d - 4)(E_8 - 3E_5 + 2E_3)$$

$$H_7 = -12(E_9 - E_{10} - 2E_{11} + 2E_{12})$$

$$H_8 = -12(2d - 3)(E_{13} - 2E_{11} - E_{14} + 2E_{12})$$

$$H_9 = -72(2d - 3)(E_{15} - E_{11} - E_{14} + E_{12})$$

$$H_{10} = 12(E_{16} - 2E_{18} - E_{18} + 2E_{19})$$

$$H_{11} = 36(E_{17} - 2E_{18} + E_{19})$$

$$H_{12} = -(E_{20} - 3E_{21} + 2E_{22}) \frac{2}{d - 1}$$

其中对 SU_2 群:

$$E_1 = 32 \left(\frac{\beta}{2N} \right)^3 \left[\left(\frac{I_2}{I_1} \right)^4 + \left(\frac{I_4}{I_1} \right)^4 \right] \langle \square \rangle_0 \quad E_1$$

类似

计算

8 附
献造
这个
不出
5)。通常
质。

$E_2 = 16 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^4 \left[1 + 3\left(\frac{I_3}{I_1}\right)^4\right]$	$\langle \square \square \rangle_0 \langle \square \rangle_0$
$E_3 = 64 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{12}$	$\langle \square \rangle_0^3$
$E_4 = 16 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^3 \left\{ \left(\frac{I_2}{I_1}\right) \left[1 + 3\left(\frac{I_3}{I_1}\right)^3\right] - \frac{12}{x} \left(\frac{I_3}{I_1}\right)^4 \right\}$	$\langle \square \square \rangle_0$
$E_5 = 16 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{10} \left[1 + 3\left(\frac{I_3}{I_1}\right)\right]$	$\langle \square \square \rangle_0 \langle \square \rangle_0$
$E_6 = 32 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^9 \left[\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_4}{I_1}\right]$	$\langle \square \square \rangle_0$
$E_7 = 4 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^8 \left[1 + 3\frac{I_3}{I_1}\right]^2$	$\langle \square \square \rangle_0, \langle \square \square \square \rangle_0$
$E_8 = 4 \left(\frac{\beta}{2N}\right)^3 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^6 \left[1 + 9\left(\frac{I_3}{I_1}\right)^2 + 6\left(\frac{I_3}{I_1}\right)^3\right]$	$\langle \square \square \rangle_0$
$E_9 = 4x \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left\{ \left(\frac{I_2}{I_1}\right) \left[1 + 3\left(\frac{I_3}{I_1}\right)^3\right] - \frac{12}{x} \left(\frac{I_3}{I_1}\right)^4 \right\}$	$\langle \square \square \rangle_0$
$E_{10} = 4x \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left(\frac{I_2}{I_1}\right) \left[1 + 3\left(\frac{I_3}{I_1}\right)^4\right]$	$\langle \square \rangle_0 \langle \rangle_0$
$E_{11} = 4x \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^7 \left[1 + 3\left(\frac{I_3}{I_1}\right)\right]$	$\langle \square \rangle_0 \langle \square \rangle_0$
$E_{12} = 16x \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^9$	$\langle \square \rangle_0^2 \langle \rangle_0$
$E_{13} = 8x \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^6 \left[\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_4}{I_1}\right]$	$\langle \square \square \rangle_0$
$E_{14} = 4x \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^7 \left[1 + 3\frac{I_3}{I_1}\right]$	$\langle \square \square \rangle_0 \langle \rangle_0$
$E_{15} = x \left(\frac{\beta}{2N}\right)^2 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^5 \left[1 + 3\frac{I_3}{I_1}\right]^2$	$\langle \square \square \rangle_0$
$E_{16} = 2x^2 \left(\frac{\beta}{2N}\right) \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^3 \left[\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_4}{I_1}\right]$	$\langle \square \square \rangle_0$
$E_{17} = \frac{1}{4} x^2 \left(\frac{\beta}{2N}\right) \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 \left[1 + 3\frac{I_3}{I_1}\right]^2$	$\langle \square \rangle_0$

对 U_1

$$E_{18} = x^2 \left(\frac{\beta}{2N} \right) \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^4 \left[1 + 3 \frac{I_3}{I_1} \right] \quad \langle \square \parallel \rangle_0 \langle | \rangle_0$$

$$E_{19} = 4x^3 \left(\frac{\beta}{2N} \right) \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^6 \quad \langle \square \rangle_0 \langle | \rangle_0^2$$

$$E_{20} = \frac{1}{2} x^3 \left[\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_4}{I_1} \right] \quad \langle \parallel \rangle_0$$

$$E_{21} = \frac{1}{4} x^3 \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \left[1 + 3 \frac{I_3}{I_1} \right] \quad \langle | \parallel \rangle_0 \langle | \rangle_0$$

$$E_{22} = x^3 \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^3 \quad \langle | \rangle_0^3$$

对 U_1 群:

$$E_1 = \frac{1}{4} \beta^3 \left[3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^4 + \left(\frac{I_3}{I_0} \right)^4 \right],$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \beta^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^4 \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^4 \right],$$

$$E_3 = \beta^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^{12},$$

$$E_4 = \frac{1}{4} \beta^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^3 \left[\left(\frac{I_2}{I_0} \right)^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + 2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + \left(\frac{I_2}{I_0} \right)^3 \left(\frac{I_3}{I_0} \right) \right],$$

$$E_5 = \frac{1}{2} \beta^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^{10} \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \right],$$

$$E_6 = \frac{1}{4} \beta^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^9 \left[3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + \left(\frac{I_3}{I_0} \right) \right],$$

$$E_7 = \frac{1}{4} \beta^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^8 \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right)^2 \right],$$

$$E_8 = \frac{1}{4} \beta^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^6 \left[1 + 3 \left(\frac{I_2}{I_0} \right)^2 \right],$$

$$E_9 = \frac{1}{4} x \beta^2 \left[\left(\frac{I_1}{I_0} \right) \left(\frac{I_2}{I_0} \right)^3 + 2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + \left(\frac{I_2}{I_0} \right)^3 \left(\frac{I_3}{I_0} \right) \right],$$

$$E_{10} = \frac{1}{2} x \beta^2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right)^4 \right],$$

$$E_{11} = \frac{1}{2} x \beta^2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^7 \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \right],$$

$$E_{12} = x \beta^2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^9$$

$$E_{13} = \frac{1}{4} x \beta^2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^6 \left[3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + \left(\frac{I_3}{I_0} \right) \right],$$

$$E_{14} = \frac{1}{2} x \beta^2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^7 \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \right],$$

$$E_{15} = \frac{1}{4} x \beta^2 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^5 \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \right]^2,$$

$$E_{16} = \frac{1}{4} x^2 \beta \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^3 \left[3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + \left(\frac{I_3}{I_0} \right) \right],$$

$$E_{17} = \frac{1}{4} x^2 \beta \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \right]^2,$$

$$E_{18} = \frac{1}{2} x^2 \beta \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^4 \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \right],$$

$$E_{19} = x^2 \beta \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^6,$$

$$E_{20} = \frac{1}{4} x^3 \left[3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + \frac{I_3}{I_0} \right],$$

$$E_{21} = \frac{1}{2} x^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right) \left[1 + \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \right],$$

$$E_{22} = x^3 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^3.$$

参 考 文 献

- [1] K. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
- [2] 例如可见: M. Creutz, *Rev. Mod. Phys.*, **50**(1978), 561; J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 659; J. M. Drouffe, C. Itzykson, *Phys. Reports*, **38**(1978), 133; J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775; M. Creutz, *Phys. Reports*, **95**(1983), 202; P. Hasenfratz CERN-TH.3737(1983).
- [3] 例如可见: J. M. Drouffe, J. B. Zuber, *Phys. Reports*, **102**(1983), 1; 以及所引用的文献 J. M. Alberty, H. Flyvbjerg, B. Lautrup, *Nucl. Phys.*, **B220**(1983), 61; V. Alessandrini et al., *Nucl. Phys.*, **B215**(1983), 109; V. Alessandrini et al., *Nucl. Phys.*, **B225**(1983), 303; E. Dagotto, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 1276; *Phys. Lett.*, **136B**(1984), 60.
- [4] S. Drell et al., *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 619; D. Boyanovsky et al., *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 3034; D. Horn, M. Weinstein, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 3331; N. Hari, Dass et al., *Nucl. Phys.*, **B205**(1982), 414; E. Dagotto, M. Moreo, *Phys. Rev.*, **D29**(1984), 300.
- [5] T. C. Hsien, X. H. He, Y. S. Song, *Phys. Lett.*, **153B**(1985), 417.
- [6] 吴济民、赵佩英, 将发表在 *Comm. in Theor. Phys.*
- [7] R. Brower, P. Rossi, Chung-I Tan, *Nucl. Phys.*, **B190**(1981), 699.
- [8] M. Creutz, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 553; G. Bhanot, M. Creutz, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2892.
- [9] 吴济民, 赵佩英, 将发表在 *Comm. in Theor. Phys.*

THE ANALYTIC RESULTS FOR U_1 AND SU_2 AVERAGE PLAQUETTE TO THE THIRD ORDER APPROXIMATION IN THE CUMULANT EXPANSION

WU CHI-MIN ZHAO PEI-YING

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In the lattice gauge theory, by using cumulant expansion, we calculate the average plaquette for U_1 and SU_2 group up to the third order approximation in 4 and 5 dimensions analytically. Our results are consistent with MC data. We also discuss the application of cumulant expansion technique in lattice gauge theory.

9),
55

Al-
ys.,
w.,

14;
05

12.