第 10 卷 第 6 期 高能物理与核物理 Vol. 10, No. 6
1986 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1986

相对论性 Schrödinger 方程的 Green 函数

卫 华 阮图南
(中国科学技术大学)

摘 要

使用量子场论中的 Schrödinger 波函数描述 2-费密子系统. 导出了时间相关 Green 函数及其谱表示. 得到了 Schrödinger 方程与波函数的归一化条件, 它表明当位势的能量相关性可忽略时, 这种波函数就是几率振幅. 给出了另外几种形式的等时方程的 Green 函数,这几种方程仍然有归一化的问题, 它们的位势是非厄密的.

引 言

在量子场论中, 质量分别为 m_1 与 m_2 的 2-费密子系统可以用 Schrödinger 波函数[1]或等时波函数[2]

$$\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \langle 0|\phi_1(X_0\boldsymbol{x}_1)\phi_2(X_0\boldsymbol{x}_2)|\boldsymbol{Pr}\rangle$$

来描述. 文献[2]研究了这种波函数满足的方程. 它从 Bathe-Salpeter 散射方程出发, 利用波函数的时间平移和 Bathe-Salpeter 不可约核的重排列,导出了一个包含高阶修正项的等时方程. 然而这里仍然存在一个厄密性问题和波函数归一化的困难. 我们在本文中考虑这些问题.

众所周知, Green 函数与波函数有密切的关系. Schwinger 在其它物理学家之前用泛函方法先导出了二体 Green 函数,然后得出相应的齐次方程——Bathe-Salpeter 方程[4]. 利用 Green 函数, Bathe-Salpeter 波函数的归一化条件简洁地推导出来[5]. 这些事实启发我们将齐次等时方程的研究扩展到相应的 Green 函数. 本文中我们首先推导 Green 函数的公式. 第三节计算 Green 函数的谱表示. 第四节建立波函数的归一化条件,它说明了若忽略位势的能量相关性,等时波函数——即等时约束下的 Bathe-Salpeter 波函数——就是几率振幅. 第五节给出另外几种形式的等时方程的 Green 函数,讨论这些波函数的归一化及位势的厄密性质.

全文使用的坐标关系是 $X = \eta_1x_1 + \eta_2x_2$, $x = x_1 - x_2$, $p_1 = \eta_1P + q$, $p_2 = \eta_2P - q$. 其中 $\eta_i = m_i/(m_1 + m_2)$.

本文 1985 年 10 月 23 日收到.

一、Green 函数的导出

我们来考虑由两个自旋 1/2 粒子组成的系统．ψ_1 与 ψ_2 是相应的重正化场算子，G 是重正化四点编时 Green 函数，

$$G(121'2') = \langle 0|T\psi(1)\psi(2)\bar{\psi}(2')\bar{\psi}(1')|0\rangle, \tag{1.1}$$

G 满足

$$G = G_0 + G_0 I G, \tag{1.2}$$

和

$$G = G_0 + G I G_0, \tag{1.3}$$

其中 $G_0 = S_1^F S_2^F$，S_i^F 是第 i 个粒子的 Feynman 传播子，Bathe-Salpeter 不可约核与外线辐射修正合记为 I[3]。从(1.2)有

$$G = G_0 + G_0 T G_0, \tag{1.4}$$

其中散射算子 T 满足

$$T = I + I G_0 T, \tag{1.5}$$

$$T = I + T G_0 I. \tag{1.6}$$

为了得到等时 Green 函数 $G(X_0\boldsymbol{x}_1, X_0\boldsymbol{x}_2, X_0^1\boldsymbol{x}_1^1, X_0^1\boldsymbol{x}_2^1)$ 所满足的方程，引入一个函数 W，

$$W(121'2') = G_0(121'2') + i\int d^4y_1 d^4y_2 G_0(12y_1y_2)\delta(y_0)\beta_1\beta_2\bar{D}_y G_0(y_1y_2 1'2'). \tag{1.7}$$

可以看出，(1.7)式中的微分算子

$$\bar{D}_x = -i\frac{\partial}{\partial X_0} - H_1(i\overleftarrow{\nabla}_1) - H_2(i\overleftarrow{\nabla}_2) = -\beta_1(m_1 - r_1\cdot\overleftarrow{\partial}_1) - \beta_2(m_2 - r_2\cdot\overleftarrow{\partial}_2) \tag{1.8}$$

因有 G_0 而消失．用 W 和 I 定义一个新的核 J，

$$J(121'2') = I(121'2') + \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_1^1 d^4y_2^1 J(12y_1y_2) W(y_1y_2y_1^1y_2^1) I(y_1^1y_2^1 1'2'), \tag{1.9}$$

这里 W 由 Feynman 传播子构成，因此若进行微扰展开，J 就是 Bathe-Salpeter 核按 Feynman 图的一个重排列。在(1.5)式中用 $J\text{-}JWI$ 代替 I 得

$$T(121'2') = J(121'2') + \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_1^1 d^4y_2^1 J(12y_1y_2)(G_0 - W)(y_1y_2y_1^1y_2^1) T(y_1^1y_2^1 1'2') \tag{1.10}$$

利用(1.7)与(1.10)，从(1.4)式推出

$$G(121'2') - G_0(121'2') = \int d^4y_1 d^4y_2 (G_0 J)(12y_1y_2) G_0(y_1y_2 1'2')$$
$$- i\int d^4y_1 d^4y_2 (G_0 J G_0)(12y_1y_2)\delta(y_0)\beta_1\beta_2\bar{D}_y (G - G_0)(y_1y_2 1'2'). \tag{1.11}$$

记：

$$D_x = i\frac{\partial}{\partial X_0} - H_1(-i\nabla_1) - H_2(-i\nabla_2)$$
$$= -\beta_1(m_1 + \gamma_1\cdot\partial_1) - \beta_2(m_2 + \gamma_2\cdot\partial_2), \tag{1.12}$$

自由粒子 Green 函数为

$$g_0(121'2') = [-\lambda S_1^F(11')\beta_1 S_2(22')\beta_2 - (1-\lambda)S_1(11')\beta_1 S_2^F(22')\beta_2]\delta(t-t'), \tag{1.13}$$

g_0 满足下列方程

$$D_x g_0(121'2') = g_0(121'2')\overleftarrow{D}_{x'} = \delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2') \tag{1.14}$$

和条件

$$\int d^4x_1'd^4x_2' G_0(121'2')\delta(t')\beta_1\beta_2\overleftarrow{D}_{x'}g_0(1'2'1''2'')$$
$$= \int d^4x_1'd^4x_2' G_0(121'2')\delta(t')\beta_1\beta_2 D_{x'}g_0(1'2'1''2''), \tag{1.15}$$

以及

$$\int d^4x_1'd^4x_2' g_0(121'2')\overleftarrow{D}_{x'}\delta(t')G_0(1'2'1''2'')$$
$$= \int d^4x_1'd^4x_2' g_0(121'2')D_{x'}\delta(t')G_0(1'2'1''2''). \tag{1.16}$$

按照文[3]那样定义等时位势

$$V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = -i\int dt dt'\delta(t)D_x(G_0JG_0)(121'2')\beta_1\beta_2\overleftarrow{D}_{x'}\delta(t'), \tag{1.17}$$

对于 QED，在非相对论近似下它变为 Coulomb 位势[3]. 利用 (1.14)—(1.17),从(1.11)得到

$$\int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'[D_x\delta(X_0 - X_0')\delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1')\delta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2')$$
$$- V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')]g(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0''\boldsymbol{x}_1''\boldsymbol{x}_2'')$$
$$= \delta(X_0 - X_0'')\delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1'')\delta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2''), \tag{1.18}$$

其中 g 是D－V的 Green 函数，

$$g(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = g_0(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') - i(G - G_0)(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\beta_1\beta_2. \tag{1.19}$$

十分清楚，g 与等时约束下的四点编时 Green 函数

$$G(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = \int dt dt'\delta(t)G(121'2')\delta(t') \tag{1.20}$$

有简单的关系．记哈密顿

$$H(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = [H_1(-i\nabla_1) + H_2(-i\nabla_2)]\delta(X_0 - X_0')\delta(\boldsymbol{x}_1$$
$$- \boldsymbol{x}_1')\delta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2') + V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'), \tag{1.21}$$

(1.18)可写成 Schrödinger 形式

$$\int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'\left[i\frac{\partial}{\partial X_0}\delta(X_0 - X_0')\delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1')\delta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2') - H(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\right]$$
$$\cdot g(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0''\boldsymbol{x}_1''\boldsymbol{x}_2'')$$
$$= \delta(X_0 - X_0'')\delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1'')\delta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2''). \tag{1.22}$$

由(1.18)和(1.14)得 g 的积分方程

$$g(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = g_0(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')$$
$$+ \int dY_0d^3y_1d^3y_2dY_0'd^3y_1'd^3y_2'g_0(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2Y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)V(Y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2Y_0'\boldsymbol{y}_1'\boldsymbol{y}_2')g(Y_0'\boldsymbol{y}_1'\boldsymbol{y}_2'X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'). \tag{1.23}$$

二、左 Green 函 数

在无限维空间，一个算子的右逆并非总是它的左逆。本文引言中所提的问题的关键就在于(1.7)式中选择的函数W同时保证(1.18)中的g恰好是 Schrödinger 算子D－V的左 Green 函数。我们选的W正是这样的函数(本文最后一部分对其它选择作了分析)。我们现在来证明这一论断。由于表面项为零，(1.7) 式可改写为

$$W(121''2'') = G_0(121''2'') + i\int d^4x_1'd^4x_2'G_0(121'2')\delta(t')\beta_1\beta_2D_{x'}G_0(1'2'1''2''). \tag{2.1}$$

由(1.9)(1.6)有

$$J = I + IWJ, \tag{2.2}$$

$$T = J + T(G_0 - W)J. \tag{2.3}$$

将(2.3)的T代入(1.4)化简，得

$$G(121'2') - G_0(121'2') = \int d^4y_1d^4y_2d^4y_1'd^4y_2'G_0(12y_1y_2)J(y_1y_2y_1'y_2')G_0(y_1'y_2'1'2')$$

$$- i\int d^4y_1d^4y_2(G - G_0)(12y_1y_2)\beta_1\beta_2\delta(y_0)D_y(G_0JG_0)(y_1y_21'2'). \tag{2.4}$$

将(2.4)夹在 $\delta(t)$ 与 $\beta_1\beta_2\overleftarrow{D}_{x'}\delta(t')$ 之间，注意用(1.14)—(1.17)，得

$$\int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'[g_0(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') - i(G - G_0)(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\beta_1\beta_2]$$

$$\cdot[\overleftarrow{D}_{x'}\delta(X_0' - X_0'')\delta(\boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_1'')\delta(\boldsymbol{x}_2' - \boldsymbol{x}_2'') - V(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0''\boldsymbol{x}_1''\boldsymbol{x}_2'')]$$

$$= \delta(X_0 - X_0'')\delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1'')\delta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2''). \tag{2.5}$$

从而上述论断得以证明。相应的积分方程是

$$g(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = g_0(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')$$

$$+ \int dY_0d^3y_1d^3y_2dY_0'd^3y_1'd^3y_2'g(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2Y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)V(Y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2Y_0'\boldsymbol{y}_1'\boldsymbol{y}_2')g_0(Y_0'\boldsymbol{y}_1'\boldsymbol{y}_2'X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'). \tag{2.6}$$

为了方便，(1.18)，(1.22)和(2.5)可形式地记为

$$(D - V)g = g(\overleftarrow{D} - V) = 1, \tag{2.7}$$

或

$$(i\partial_{X_0} - H)g = g(-i\overleftarrow{\partial}_{X_0'} - \overleftarrow{H}) = 1. \tag{2.8}$$

三、Green 函数 g 的谱表示

由于存在等时约束，$G(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')$ 的谱表示要比 $G(121'2')$ 的简单，可以得到包含全部项的完整形式。假定物理态矢有完备性

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \int dM^2\int d^4P\delta(M^2 + P^2)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_l}\sum_{\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n}\sum_r \delta$$

$$\cdot\left(P-\sum_{i=1}^{l} p_i-\sum_{j=1}^{n} k_j\right)|\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_l\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n r\rangle\langle\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_l\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n r|=1, \quad (3.1)$$

其中 p_i 是费密子或束缚态的 4-动量，k_i 是介子的 4-动量，用 r 记所有其余的量子数. 将此完备集插入

$$G(X_0\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')=\langle 0|T\psi_1(X_0\boldsymbol{x}_1)\psi_2(X_0\boldsymbol{x}_2)\bar{\psi}_2(X_0'\boldsymbol{x}_2')\bar{\psi}_1(X_0'\boldsymbol{x}_1')|0\rangle, \quad (3.2)$$

显然只有费密数为 2 和 -2 的束缚态 ($l=1$) 和散射态 ($l=2, n=0,1,2,\cdots$) 具有非零矩阵元. 定义 4-动量为 $(\boldsymbol{P}, iE_P)$ 的束缚态的等时波函数为

$$\phi_{Pr}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)=\langle 0|\psi_1(X_0\boldsymbol{x}_1)\psi_2(X_0\boldsymbol{x}_2)|\boldsymbol{P}r\rangle=V^{-1/2}e^{iPX}\phi_{Pr}(\boldsymbol{x}), \quad (3.3)$$

$$\bar{\phi}_{Pr}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)=\langle\boldsymbol{P}r|\bar{\psi}_2(X_0\boldsymbol{x}_2)\bar{\psi}_1(X_0\boldsymbol{x}_1)|0\rangle=V^{-1/2}e^{-iPX}\bar{\phi}_{Pr}(\boldsymbol{x}), \quad (3.4)$$

其中"相对运动波函数" $\phi_{Pr}(\boldsymbol{x})$ 的定义没有 $\sqrt{2E_P}$ 因子，这一点与文献 [3] 不同. 对于反粒子-反粒子束缚态

$$\phi^a_{Pr}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)={}^a\langle\boldsymbol{P}r|\psi_2(X_0\boldsymbol{x}_2)\psi_1(X_0\boldsymbol{x}_1)|0\rangle=V^{-1/2}e^{-iPX}\phi^a_{Pr}(\boldsymbol{x}), \quad (3.5)$$

$$\bar{\phi}^a_{Pr}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)=\langle 0|\bar{\psi}_1(X_0\boldsymbol{x}_1)\bar{\psi}_2(X_0\boldsymbol{x}_2)|\boldsymbol{P}r\rangle^a=V^{-1/2}e^{iPX}\bar{\phi}^a_{Pr}(\boldsymbol{x}). \quad (3.6)$$

对于含 n 个介子的散射态

$$\begin{aligned}\phi_{p_1r_1p_2r_2k_1\cdots k_n}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)&=\langle 0|\psi_1(X_0\boldsymbol{x}_1)\psi_2(X_0\boldsymbol{x}_2)|\boldsymbol{p}_1r_1\boldsymbol{p}_2r_2\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle\\&=V^{-1/2}e^{iPX}\phi_{p_1r_1p_2r_2k_1\cdots k_n}(\boldsymbol{x}),\quad P=p_1+p_2+k_1+\cdots+k_n.\end{aligned} \quad (3.7)$$

利用

$$\theta(t)=\frac{i}{2\pi}\int dk\,\frac{1}{k+i\varepsilon}\,e^{-ikt}, \quad (3.8)$$

$$S_i^F(\boldsymbol{x}t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}-iE_p|t|}[\theta(t)\Lambda_i^+(\boldsymbol{p})-\theta(-t)\Lambda_i^-(\boldsymbol{p})]\beta_i, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}G_0(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')=\int\frac{d^4Pd^3q}{(2\pi)^7}\,e^{iP(X-X')+i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}&\left[\frac{i\Lambda_1^+(\boldsymbol{p}_1)\Lambda_2^+(\boldsymbol{p}_2)}{P_0-E_1-E_2+i\varepsilon}\right.\\&\left.-\frac{i\Lambda_1^-(\boldsymbol{p}_1)\Lambda_2^-(\boldsymbol{p}_2)}{P_0+E_1+E_2-i\varepsilon}\right]\beta_1\beta_2,\end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $E_i=\sqrt{m_i^2+\boldsymbol{p}_i^2}$，$\Lambda_i^\pm(\boldsymbol{p}_i)=[E_i\pm(\beta_im_i+\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{p}_i)]/2E_i$，得到

$$g(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')=\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\,e^{iP(X-X')}g(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'P), \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'P)=&\sum_{Mr}\left[\frac{\phi_{Pr}(\boldsymbol{x})\phi^+_{Pr}(\boldsymbol{x}')}{P_0-E_P+i\varepsilon}-\frac{\phi^a_{-PE_Pr}(\boldsymbol{x})\phi^{a+}_{-PE_Pr}(\boldsymbol{x}')}{P_0+E_P-i\varepsilon}\right]\\&+\int dM^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_1r_1\boldsymbol{p}_2r_2}\sum_{\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n}\delta\left(M^2+\boldsymbol{P}^2\right.\\&\left.-\left(E_{p_1}+E_{p_2}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mu^2+\boldsymbol{k}_i^2}\right)^2\right)\frac{(2\pi)^3}{V}\\&\times\left[\delta\left(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{k}_i\right)\frac{\phi_{p_1r_1p_2r_2k_1\cdots k_n}(\boldsymbol{x})\phi^+_{p_1r_1p_2r_2k_1\cdots k_n}(\boldsymbol{x}')}{P_0-E_P+i\varepsilon}\right.\\&\left.-\delta\left(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{k}_i\right)\frac{\phi^a_{p_1r_1p_2r_2k_1\cdots k_n}(\boldsymbol{x})\phi^{a+}_{p_1r_1p_2r_2k_1\cdots k_n}(\boldsymbol{x}')}{P_0+E_P-i\varepsilon}\right]\end{aligned}$$

$$+\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{iq(x-x')} \frac{\Lambda_1^-(\eta_1 \boldsymbol{P}+\boldsymbol{q})+\Lambda_2^-(\eta_2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q})}{P_0-H_1(\eta_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{q})-H_2(\eta_2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q})}. \tag{3.12}$$

上式中第一个方括号对应束缚态，它的极点位于

$$\sqrt{(m_1-m_2)^2+\boldsymbol{P}^2}<|P_0|<\sqrt{(m_1+m_2)^2+\boldsymbol{P}^2}.$$

第二个方括号对应散射态，它的奇点局限于 $|P_0| \geqslant \sqrt{(m_1+m_2)^2+\boldsymbol{P}^2}$. 末项的奇点为 $-E_1-E_2$, $\pm(E_1-E_2)$, 这里

$$E_1=\sqrt{m_1^2+(\eta_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{q})^2},\ E_2=\sqrt{m_2^2+(\eta_2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q})^2}.$$

由

$$|E_1-E_2| \leqslant \sqrt{(m_1-m_2)^2+\boldsymbol{P}^2},\ \sqrt{(m_1+m_2)^2+\boldsymbol{P}^2} \leqslant E_1+E_2 \tag{3.13}$$

可知，在区间

$$\sqrt{(m_1-m_2)^2+\boldsymbol{P}^2}<P_0<\sqrt{(m_1+m_2)^2+\boldsymbol{P}^2}$$

范围内，除去束缚态极点外不再有任何奇点.

四、Schrödinger 方程和归一化条件

仿效 Gell-Mann 和 Low 的方法[6]，可从(1.22)与(2.6)导出束缚态波函数满足的积分方程：

$$\phi_{Pr}(X\boldsymbol{x})=\int d^4X'd^3x'd^4X''d^3x''g_0(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')V(X'\boldsymbol{x}'X''\boldsymbol{x}'')\phi_{Pr}(X''\boldsymbol{x}''), \tag{4.1}$$

$$\phi_{Pr}^{+}(X\boldsymbol{x})=\int d^4X'd^3x'd^4X''d^3x''\phi_{Pr}^{+}(X'\boldsymbol{x}')V(X'\boldsymbol{x}'X''\boldsymbol{x}'')g_0(X''\boldsymbol{x}''X\boldsymbol{x}) \tag{4.2}$$

或 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial}{\partial X_0}\phi_{Pr}(X\boldsymbol{x})=\int d^4X'd^3x'H(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')\phi_{Pr}(X'\boldsymbol{x}'), \tag{4.3}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial X_0}\phi_{Pr}^{+}(X\boldsymbol{x})=\int d^4X'd^3x'\phi_{Pr}^{+}(X'\boldsymbol{x}')\bar{H}(X'\boldsymbol{x}'X\boldsymbol{x}). \tag{4.4}$$

这些正好是文献 [3] 的结果. 下面转向归一化问题.

(1.18) 式分离出质心运动后写成

$$\int d^3x'\{[P_0-H_1(i\nabla)-H_2(-i\nabla)]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-V(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'P)\}g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}''P)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''). \tag{4.5}$$

对上式中的位势函数在固定点 $P_0=E'_P=\sqrt{M'^2+\boldsymbol{P}^2}$ 作泰勒展开

$$V(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}',P)=V(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}',\boldsymbol{P}E'_P)+(P_0-E'_P)\frac{\partial}{\partial P_0}V(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}',P)\Big|_{P_0=E'_P+\theta(P_0-E'_P)},$$
$$0<\theta<1. \tag{4.6}$$

(4.5)式左乘 $\phi^{+}_{\boldsymbol{P}E'_Pr'}(\boldsymbol{x})$ 并对 $\boldsymbol{x}$ 积分，利用(4.4)得

$$\int d^3xd^3x'\phi^{+}_{\boldsymbol{P}E'_Pr'}(\boldsymbol{x})(P_0-E'_P)\Big[\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$-\frac{\partial}{\partial P_0}V(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'P)\big|_{P_0=E'_P+\theta(P_0-E'_P)}\Big]g(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}''P)=\phi^{+E'_P r'}_{P}(\boldsymbol{x}''). \tag{4.7}$$

令 $P_0\to E'_P$，利用 g 的谱表示(3.12)式，显然只有质量为 M' 的项保留下来，其它项因为在 $P_0=E'_P$ 正则而变为零．于是得到

$$\sum_r\left\{\int d^3x d^3x'\phi^{+E'_P r'}_{P}(\boldsymbol{x})\left[\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\frac{\partial}{\partial E'_P}V(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}E'_P)\right]\phi_{P^{E'_P r}}(\boldsymbol{x}')-\delta_{rr'}\right\}$$

$$\cdot\,\phi^{+E'_P r}_{P}(\boldsymbol{x}'')=0. \tag{4.8}$$

不同 r 的波函数线性独立给出归一化条件

$$\int d^3x d^3x'\phi^+_{Pr}(\boldsymbol{x})\left[\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-\frac{\partial}{\partial E_P}V(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}',\boldsymbol{P}E_P)\right]\phi_{Pr'}(\boldsymbol{x}')=\delta_{rr'}. \tag{4.9}$$

当位势的能量相关性可以忽略时有几率归一化

$$\int d^3x\phi^+_{Pr}(\boldsymbol{x})\phi_{Pr'}(\boldsymbol{x})=\delta_{rr'}, \tag{4.10}$$

这时的等时波函数(即等时约束下的 Bathe-Salpeter 波函数)就是几率振幅．

文献[7]通过对 0^- 介子的实际计算来表明等时极限下的 Bathe-Salpeter 波函数具有确定的几率振幅的意义．

五、另外几种等时方程的 Green 函数、归一化问题和非厄密位势

从(4.3)(4.4)可以得到等时方程[3]

$$D_x\phi(X\boldsymbol{x})=\int d^4X'd^3x'\hat{V}(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')\phi(X'\boldsymbol{x}'), \tag{5.1}$$

其中位势 $\hat{V}$ 满足厄密积分核条件[3]

$$\hat{V}(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')=\hat{V}(X'\boldsymbol{x}'X\boldsymbol{x})^+ \tag{5.2}$$

或

$$\hat{V}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')=\hat{V}(\boldsymbol{q}'\boldsymbol{q})^+, \tag{5.3}$$

$\hat{V}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')$ 是相应的付氏变换

$$\hat{V}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')=\int d^4Xd^3xd^3x'e^{-iPX}e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{q}'\boldsymbol{x}'}\hat{V}(X\boldsymbol{x},0\boldsymbol{x}'). \tag{5.4}$$

我们现在来研究另外三种等时方程． 如果不用 Feynman 传播子，而用推迟 Green 函数、超前 Green 函数或自由费密场反对易函数分别构成时间平移算子 U_R，U_A 或 U_S，用这三种时间平移算子分别构成(1.7)式中的W函数并附以相应的角标，

$$U^R_A(121'2')=\pm i[S^R_A(11')\beta_1\delta(2,2')+\delta(1,1')S^R_A(22')\beta_2], \tag{5.5}$$

$$U_S(121'2')=-\frac{i}{2}[S_1(11')\beta_1\delta(2,2')+\delta(11')S_2(22')\beta_2], \tag{5.6}$$

$$W_{R,A,S}(121'2')=G_0(121'2')-\int d^4y_1d^4y_2U_{R,A,S}(12y_1y_2)\delta(y_0)G_0(y_1y_21'2'). \tag{5.7}$$

定义 J_σ:

$$J_\sigma(121'2') = I(121'2') + \int d^4y_1 d^4y_2 J_\sigma(12y_1y_2)(W_\sigma I)(y_1y_2 1'2'), \sigma = R, A, S. \tag{5.8}$$

通过类似的演算得到

$$\int d^4X'd^3x'[D_x\delta(X-X')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') - V_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')]g_\sigma(X'\boldsymbol{x}'X''\boldsymbol{x}'')$$
$$= \delta(X-X'')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''), \quad \sigma = R, A, S. \tag{5.9}$$

$$V_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}') = \int dtdt'\delta(t)D_x(G_0J_\sigma U_\sigma)(XxX'x')\delta(t'), \tag{5.10}$$

$$g_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}') = g_0(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')$$
$$+ \int dtd^4yd^4y\delta(t)(GIU_\sigma)(XxYy)\delta(y_0)g_0(Y\boldsymbol{y}X'\boldsymbol{x}'). \tag{5.11}$$

为求共轭方程，取

$$\overline{W}_\sigma(121''2'') = G_0(121''2'') - \int d^4x_1'd^4x_2'G_0(121'2')\delta(t')\beta_1\beta_2U_\sigma(1'2'1''2'')\beta_1\beta_2, \tag{5.12}$$

$$\overline{J}_\sigma(121''2'') = I(121''2'') + \int d^4x_1'd^4x_2'(I\overline{W}_\sigma)(121'2')\overline{J}_\sigma(1'2'1''2''), \tag{5.13}$$

得到

$$\int d^4X'd^3x'g'_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')[\bar{D}_{x'}\delta(X'-X'')\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'') - V'_\sigma(X'\boldsymbol{x}'X''\boldsymbol{x}'')]$$
$$= \delta(X-X'')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''), \tag{5.14}$$

$$V'_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}') = \int dtdt'\delta(t)(U_\sigma\beta_1\beta_2\overline{J}_\sigma G_0)(XxX'x')\beta_1\beta_2\bar{D}_{x'}\delta(t'), \tag{5.15}$$

$$g'_\sigma(X\boldsymbol{x}X''\boldsymbol{x}'') = g_0(X\boldsymbol{x}X''\boldsymbol{x}'')$$
$$+ \int d^4X'd^4x'dt''g_0(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')\delta(t')(U_\sigma\beta_1\beta_2IG)(X'x'X''x'')\beta_1\beta_2\delta(t''). \tag{5.16}$$

等时波函数满足

$$D_x\phi(X\boldsymbol{x}) = \int d^4X'd^3x'V_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')\phi(X'\boldsymbol{x}'), \tag{5.17}$$

$$\phi^+(X\boldsymbol{x}')\bar{D}_x = \int d^4X'd^3x'\phi^+(X'\boldsymbol{x}')V'_\sigma(X'\boldsymbol{x}'X\boldsymbol{x}), \quad \sigma = R, A, S. \tag{5.18}$$

现在我们来作几点讨论。首先，从(5.11)看出 Green 函数 g_R，g_A，g_S 与等时约束下的四点 Green 函数之间不具有象(1.19)那样简单的关系。g_σ 的极点项并非等时波函数作为残数的项的代数和，恰恰相反，它包含处于任意相对时间的全部波函数。

其次，注意到

$$V'_\sigma \neq V_\sigma, \quad \sigma = R, A, S, \tag{5.19}$$

我们没有象(4.4)那样的方程，因此，不能象第四节那样给出归一化条件。这种情况下的归一化依然是一个未解决的问题。

最后我们要说明由方程(5.17)和 (5.18) 不可能导出一个具有厄密位势的方程。考虑

最小电磁耦合. 使用 Coulomb 规范,一阶重排列核是

$$J_\sigma^{(1)}(k) = I_C^{(1)}(k) + I_t^{(1)}(k) = \beta_1\beta_2 \frac{-ie_1e_2}{\boldsymbol{k}^2} + \gamma_{1i}\gamma_{2j}\frac{-ie_1e_2}{k^2 - i\varepsilon}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right). \tag{5.20}$$

相应的位势分别为

$$V_{R,A,S}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = V^c_{R,A,S}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') + V^t_{R,A,S}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') + O(\alpha^2), \tag{5.21}$$

$$V'_{R,A,S}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = V'^c_{R,A,S}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') + V'^t_{R,A,S}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') + O(\alpha^2), \tag{5.22}$$

其中

$$V^c_R(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = V^c_A(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = V^c_S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}') = \frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|^2}\left[\frac{H_1(\boldsymbol{q})}{E_{1q}} + \frac{H_2(-\boldsymbol{q})}{E_{2q}}\right], \tag{5.23}$$

$$V'^c_R(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = V'^c_A(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = V'^c_S(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = \frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|^2}\left[\frac{H_1(\boldsymbol{q}')}{E_{1q'}} + \frac{H_2(-\boldsymbol{q}')}{E_{2q'}}\right]. \tag{5.24}$$

很清楚, V^c_σ 与 V'^c_σ 不是厄密积分核(见 5.3). 然而,还可由 (5.18) 导出 ϕ 的另一个方程

$$D_\tau\phi(X\boldsymbol{x}) = \int d^4X'd^3x'V'_\sigma(X'\boldsymbol{x}'X\boldsymbol{x})^+\phi(X'\boldsymbol{x}'). \tag{5.25}$$

因此,由(5.17)(5.18)出发,我们关于 ϕ 事实上有两个方程. 纵然如此,通过对这两个方程(5.17)、(5.25)的线性组合却只能得到仅含一个任意参数 ρ 的新方程

$$D_x\phi(X\boldsymbol{x}) = \int d^4X'd^3x'\hat{V}_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}')\phi(X'\boldsymbol{x}'), \tag{5.26}$$

其中

$$\hat{V}_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}') = \rho V_\sigma(X\boldsymbol{x}X'\boldsymbol{x}') + (1-\rho)V'_\sigma(X'\boldsymbol{x}'X\boldsymbol{x})^+. \tag{5.27}$$

于是

$$\hat{V}_\sigma(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = \hat{V}^c_\sigma(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') + \hat{V}^t_\sigma(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') + O(\alpha^2). \tag{5.28}$$

显然

$$\hat{V}^c_\sigma(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = V^c_\sigma(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'), \tag{5.29}$$

从而 $\hat{V}^c_\sigma$ 与 ρ 无关且是非厄密的. 从计算得知 $\hat{V}^t_{R,A,S}$ 和 $O(\alpha^2)$ 项的标量函数与 $\hat{V}^c_{R,A,S}$ 的标量函数不同,因而不能完全抵消 $\hat{V}^c_{R,A,S}$ 的非厄密部分. 我们得出 $\hat{V}_{R,A,S}$ 是非厄密的. 于是这三种形式的等时方程都有非厄密位势.

参 考 文 献

[1] 卢里, D., 粒子和场,科学出版社, 1981, p.468.
[2] 阮图南,朱熙泉,何祚庥,庆承瑞,赵维勤,高能物理与核物理, **5** (1981), 393, 537.
[3] 卫华、尹鸿钧,阮图南,高能物理与核物理, **9** (1985), 687.
[4] J. Schwinger, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **37** (1951), 455.
[5] N. Nakanishi, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **43** (1969), 1.
[6] M. Gell-Mann, F. Low, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 350.
[7] 王明中,郑希特,汪克林,冼鼎昌,章正刚,高能物理与核物理, **4** (1980), 433.

GREEN'S FUNCTION FOR RELATIVISTIC SCHRÖDINGER EQUATION

Wei Hua　Ruan Tu-nan

(China University of Science and Technology)

Abstract

Using Schrödinger wave function in quantum field theory, the time-dependent Green function and its spectral representation for 2-fermion system are derived, and the Schrödinger equation as well as the normalization condition of his wave function are deduced. The normalization condition shows that this wave function is just the probability amplitude when energy-dependence of potential can be neglected. The Green's functions for some other equal-time equations are evaluated, however, the normalization of these equations remains to be solved and the potential is non-Hermitian.