

# 核作用平均自由程测量中的数据处理

吴 枚 任国孝

(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

本文讨论了测定核作用平均自由程的实验中的数据处理方法。采用最大似然法得出了几种不同实验情况下核作用平均自由程的估计式及其标准误差估计式。蒙特卡洛模拟的结果表明,在统计量不大的情况下,最大似然估计值比常用的最小二乘拟合值更精确。

## 一、引 言

在未测量核作用平均自由程(或截面)的实验中,一般应测量粒子在发生核作用之前走过的路程  $l_i (i = 1, 2, \dots, N_0)$ , 按

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N_0} l_i / N_0 \quad (1)$$

计算粒子的平均自由程(以下简称 mfp)。式中  $N_0$  为入射的粒子总数(见图 1)。

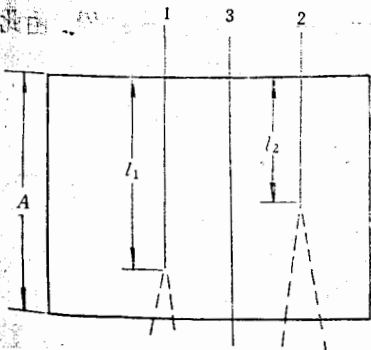


图 1 粒子作用路程示意图

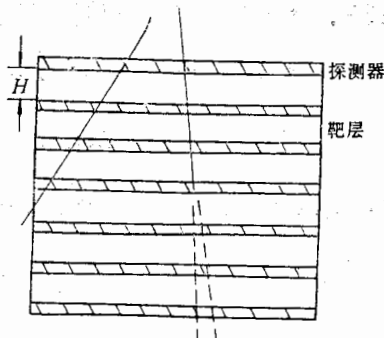


图 2 探测器结构示意图

显然,只有在探测器的厚度无限,即全部入射粒子都能在探测器内发生核作用的情况下上式才是正确的。实际上探测器的厚度总是有限的,并不是所有入射粒子都能在探测器内发生作用。如果略去这部分未作用粒子的信息,就会低估 mfp 值。如果探测器不

本文 1986 年 5 月 7 日收到。

- 任国孝 (145)
- 姜春华 (150)
- 陈 仁 (157)
- 王桂云 (164)
- 史建民 (167)
- 彭宏安 (175)
- 王勤谋 (182)
- .....
- 董绍静 (186)
- 刘希明 (192)
- 李元杰 (198)
- 官学惠 (202)
- 李扬国 (208)
- 姜焕清 (218)
- 金星南 (226)
- 王英才 (231)
- 徐建铭 (238)
- 白桂彬 (245)
- .....
- 郭恩九 (250)
- .....
- 郑志豪 (259)
- 杨伯君 (268)
- 黄唯志 (272)
- 苏耀中 (277)
- 刘文勤 (282)

是连续灵敏的,或者出于物理上的需要,在探测器中放入一定厚度的靶层(如图 2),这时核作用点不能准确测定,靶层厚度也会给 mfp 值带来一定的误差。有的探测器对单个粒子不灵敏,只能记录发生了核作用并产生簇射的事例(如用 X 光片探测高能强子的情况)。这时只知道发生核作用的强子个数,不知道入射强子数。在这些情况下,都不能用(1)式来估计 mfp 值。针对上述几种情况,我们采用最大似然法导出了 mfp 值的估计式及其标准误差的估计式。

用预置的 mfp 值,在不同的实验条件下对核作用进行蒙特卡洛模拟,然后采用不同方法进行数据处理,结果表明所得出的估计式是正确的。而且在统计量不大的情况下(宇宙线实验通常是这种情况),最大似然估计值比最小二乘拟合值更准确,前者的标准误差也小。

## 二、方 法

按以下三种情况来分析。

1. 探测器的厚度有限,但对粒子是连续灵敏的,即可以精确测定粒子在作用前走过的路程长度,如核乳胶的情况(图 1)。

若探测器厚度为  $A$ , 入射粒子数为  $N_0$ , 在探测器内发生核作用的粒子数为  $N$ , 未发生作用的粒子数为  $M = N_0 - N$ 。已知入射粒子在某物质中发生核作用前走过的路程  $l$  服从指数分布

$$p(l) = \frac{1}{\lambda} e^{-l/\lambda}, \quad (2)$$

式中分布参数  $\lambda$  待定,即粒子在该物质中的 mfp。显然,  $p(l)$  就是粒子走过  $l$  发生作用的概率。粒子穿过整个探测器不发生核作用的概率为  $1 - \int_0^A p(l) dl = e^{-A/\lambda}$ 。由此得出样本  $l_i (i = 1, 2, \dots, N)$  的似然函数为<sup>[1]</sup>

$$L(l_i, \lambda) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{1}{\lambda} e^{-l_i/\lambda} \right) \cdot (e^{-A/\lambda})^M. \quad (3)$$

由(3)求出参数  $\lambda$  的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = \left( \sum_{i=1}^N l_i + MA \right) / N. \quad (4)$$

$\hat{\lambda}$  的方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2(\hat{\lambda}) &= \hat{\lambda}^3 / \left[ 2 \left( \sum_{i=1}^N l_i + MA \right) - N\hat{\lambda} \right] \\ &= \hat{\lambda}^2 / N. \end{aligned} \quad (5)$$

(4)式已计入了未发生作用的  $M$  个粒子对 mfp 值的贡献。(5)式表明 mfp 的估计值的方差反比于作用的粒子个数。

2. 探测器中夹有靶物质,如图 2 的情况。这时因受限于靶层的厚度,作用路程不能精确测定。我们改用靶层中的核作用粒子数来估计 mfp。假定共有  $n$  个靶层,每层厚度为

$H$ ,在各  
的粒子

核作用

有的靶  
的似然

同样可

$\hat{\lambda}$  的方

由(8)式

40% 时

3.1

估计  $N$

有  $N$  个

全概率

把(6)和

仍由似

式以及

在

(如图 2), 这层靶在各层中发生核作用的粒子数为  $N_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 经过整个探测器没有发生作用的粒子数为  $M = N_0 - \sum_{i=1}^n N_i \equiv N_0 - N$ . 由 (2) 式求得在第  $i$  层靶中有  $N_i$  个粒子发生核作用的概率为  $c_i (e^{-(i-1)H/\lambda} - e^{-iH/\lambda})^{N_i}$ , 其中  $c_i$  为组合数  $c_i = \frac{N_i!}{N_0! \prod_{j=1}^{i-1} N_j!}$ . 粒子通过所

有的靶层不发生作用的概率为  $1 - \int_0^{nH} p(l) dl = e^{-nH/\lambda}$ . 所以, 样本  $N_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的似然函数为

然后采用不同靶层的情况下的标准误差

$$L(N, \lambda) = \prod_{i=1}^n c_i (1 - e^{-H/\lambda})^N e^{-H} \sum_{j=1}^n (j-1) N_j / \lambda e^{-nH/\lambda}. \quad (6)$$

同样可求出  $\lambda$  的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = H / \ln \left[ 1 + N / \left( nM + \sum_{i=1}^n (i-1) N_i \right) \right]. \quad (7)$$

$\hat{\lambda}$  的方差为

作用前走过的

数为  $N$ , 未发

走过的路程

$$\sigma^2(\hat{\lambda}) = \left[ \frac{H^2 N e^{-H/\lambda}}{\lambda^4 (1 - e^{-H/\lambda})} - \frac{2HN e^{-H/\lambda}}{\lambda^3 (1 - e^{-H/\lambda})} + \frac{H^2 N e^{-2H/\lambda}}{\lambda^4 (1 - e^{-H/\lambda})^2} + \frac{2H \left( \sum_{i=1}^n (i-1) N_i + nM \right)}{\lambda^3} \right]^{-1}_{\lambda=\hat{\lambda}}. \quad (8)$$

由(8)式的计算表明, 靶厚  $H$  对于  $\sigma(\hat{\lambda})$  的贡献并不大. 当  $H$  由 mfp 值的 20% 增加到 40% 时,  $\sigma(\hat{\lambda})$  仅增大 1—2%. 对方差起主要作用的还是作用总粒子数  $N$ .

3.x 光片与靶层的组合. 如前所述, 这时  $N_0$  和  $M$  是未知的, 在估计  $\lambda$  的同时必须估计  $N_0$ .  $N_0$  服从期待值为  $\mu$  的泊松分布

过  $l$  发生作用

$1/\lambda$ . 由此得出

$$p'(N_0, \mu) = \mu^{N_0} e^{-\mu} / N_0!, \quad (N_0 \geq N). \quad (9)$$

有  $N$  个粒子发生作用的事件是与入射粒子数为  $N, N+1, \dots, \infty$  的事件相伴随的. 用全概率公式得出观测到各靶层中的作用数为  $N_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的概率为

$$P(N_i; \lambda, \mu) = \sum_{N_0=N}^{\infty} [p'(N_0; \mu) L(N; \lambda)]. \quad (10)$$

把(6)和(9)式代入(10)式, 得到样本  $N_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的似然函数为

$$L(N; \lambda, \mu) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n N_i!} e^{-\mu} \mu^N (1 - e^{-H/\lambda})^N \cdot \exp\left(-\frac{H}{\lambda} \sum_{j=1}^n (j-1) N_j\right) \exp(\mu e^{-nH/\lambda}). \quad (11)$$

仍由似然函数对  $\lambda, \mu$  的一级和二级偏微分, 分别求出 mfp 和入射粒子数的最大似然估计式以及它们的方差和协方差.

(5)

的估计值的

### 三、蒙特卡洛模拟

路程不能精

每层厚度为

在给定  $\lambda_{M-c}, n, H$  (连续灵敏探测器情况下,  $A = nH$ ) 和  $N_0$  的情况下, 按指数分

布对粒子的核作用路程进行随机取样, 得到每个粒子在探测器内作用之前走过的路程  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_0$ ). 在有靶层的情况下, 得到每个靶层中发生作用的粒子数  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 和通过第  $i$  个靶层后未作用的粒子数

$$N'_i = N_0 - \sum_{j=1}^i N_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

显然  $N'_i$  与粒子通过的物质厚度  $iH$  有关系

$$N'_i = N_0 e^{-iH/\lambda}. \quad (12)$$

用模拟给出的  $N'_i$  对(12)式作最小二乘拟合<sup>[1]</sup>, 求得  $\lambda$  的拟合值, 记为  $\lambda'$ . 同时, 按(4)和(7)式算出  $\lambda$  的最大似然估计值  $\hat{\lambda}$ .

重复这种取样 100 次, 得出  $\hat{\lambda}$  和  $\lambda'$  的分布,  $\hat{\lambda}$  和  $\lambda'$  的期待值  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  和  $\langle \lambda' \rangle$ , 以及  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  和  $\langle \lambda' \rangle$  的标准偏差  $S_{\hat{\lambda}}$  和  $S_{\lambda'}$ <sup>[1]</sup>. 表 1 中列出了一些情况下所得的结果. 这里列出的  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  是由(4)式算出的. (7)式的结果与此相近.

表 1

$\lambda$ (cm)	$A$ (cm)	$N_0$	$H$ (cm)	$n$	最小二乘拟合值 $\langle \lambda' \rangle \pm S_{\lambda'}(\text{cm})$	最大似然估计值 $\langle \hat{\lambda} \rangle \pm S_{\hat{\lambda}}(\text{cm})$
9	10.8	20	3.6	3	$9.86 \pm 4.13$	$9.51 \pm 2.49$
9	10.8	30	3.6	3	$9.50 \pm 3.21$	$9.39 \pm 2.07$
9	10.8	50	3.6	3	$9.39 \pm 2.69$	$9.26 \pm 1.73$
9	10.8	50	1.8	6	$9.64 \pm 2.54$	$9.25 \pm 1.70$

由表 1 可以看出, 在探测器条件相同时, 随着入射粒子数  $N_0$  的增加, 两种方法给出的期待值都更接近于真值 (9cm), 而且标准偏差  $S_{\lambda}$  减小. 在  $N_0$  相同时, 靶层厚度由 3.6cm 减小一倍,  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  和  $S_{\hat{\lambda}}$  值并没有显著变化. 在探测器情况和入射粒子数相同的情况下, 对比两种数据处理方法的结果看出, 最大似然估计值比最小二乘拟合值更接近真值, 而且标准偏差要小 50% 或更多. 这说明在统计量小的宇宙线实验中, 采用最大似然法来估计核作用平均自由程较为优越.

我们在气球载 CR-39 塑料径迹探测器的宇宙线实验中<sup>[2]</sup>, 用 6 层 1.80cm 厚的铝靶, 测量铁和铝的核-核作用平均自由程, 入射铁核个数为 93, 实验数据用最小二乘拟合得  $\lambda' = 5.88 \pm 3.09$  cm, 用最大似然估计式求得  $\hat{\lambda} = 7.71 \pm 0.84$  cm<sup>[2]</sup>, 而公认的半经验公式计算值为 8.13cm. 这个结果也说明了最大似然估计值较好, 标准误差也小.

图 3 和图 4 是取  $\lambda = 9$ cm,  $A = 10.8$ cm (或  $n = 6$ ,  $H = 1.8$ cm) 和  $N_0 = 150$  时, 分别按(4)和(7)式模拟计算得出的  $\hat{\lambda}$  分布.  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  分别为 9.06 和 9.05cm, 很接近真值. 标准误差  $S_{\hat{\lambda}}$  都是 0.92cm. 这说明用粒子的路程(式(4))和用粒子的作用数(式(7))来估计 mfp 值是一样的. 它们都是准确的估计式. 这时按(5)式和(8)式得出的标准误差期待值  $\langle \sigma(\hat{\lambda}) \rangle$  都是 0.89cm, 与标准偏差  $S_{\hat{\lambda}}$  的值 (0.92 cm) 相差小于 5%. 说明用(5)或(8)式作方差估计式也是很好的.

1) 这里的统计量比[2]中要小, 所以  $\hat{\lambda}$  值略有不同.

P (

0

C

0

C

 $\langle \hat{\lambda} \rangle =$ 

在  
对参数  
和  $\langle \mu \rangle$   
作

[1] 李  
[2] 任

Th  
teraction  
using th  
of the e  
curate t

前走过的路程  
子数  $N_i (i = 1, \dots, n)$

(12)

同时,按(4)和

(11), 以及  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  和  
列出的  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  是

最大似然估计值  
 $\langle \hat{\lambda} \rangle \pm S_{\hat{\lambda}} (\text{cm})$

- 9.51 ± 2.49
- 9.39 ± 2.07
- 9.26 ± 1.73
- 9.25 ± 1.70

种方法给出的  
厚度由 3.6cm  
的情况下,对  
真值,而且标  
然法来估计核

m 厚的铝靶,  
二乘拟合得  
的半经验公式

$N_0 = 150$  时,  
接近真值。标  
(7) 来估计  
佳误差期待值  
(5) 或 (8) 式

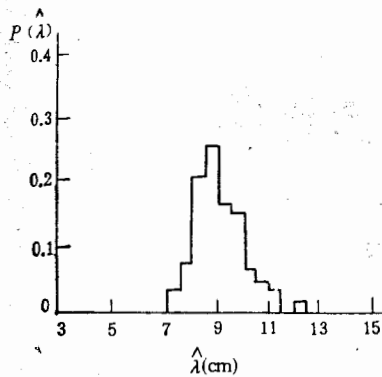


图 3 按(4)式模拟的  $\hat{\lambda}$  分布

$\langle \hat{\lambda} \rangle = 9.06 \text{cm}, S_{\hat{\lambda}} = 0.92 \text{cm}, A = 10.8 \text{cm},$   
 $N_0 = 150, \lambda_{M-C} = 9 \text{cm}$

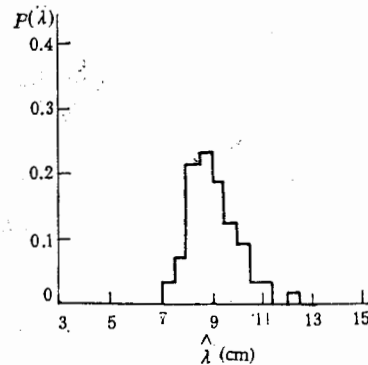


图 4 按(7)式模拟的  $\hat{\lambda}$  分布

$\langle \hat{\lambda} \rangle = 9.05 \text{cm}, S_{\hat{\lambda}} = 0.92 \text{cm}, H = 1.6 \text{cm},$   
 $n = 6, N_0 = 150, \lambda_{M-C} = 9 \text{cm}$

在 x 光片作探测器时,取  $\lambda = 9 \text{cm}, n = 6, H = 1.8 \text{cm}$  和  $N_0 = 150$  作模拟,同时对参数  $\lambda$  和  $\mu$  进行估计,得出  $\langle \hat{\lambda} \rangle = 9.98 \text{cm}, \langle \hat{\mu} \rangle = 159, S_{\hat{\lambda}} = 3.13 \text{cm}$  和  $S_{\hat{\mu}} = 29$ .  $\langle \hat{\lambda} \rangle$  和  $\langle \hat{\mu} \rangle$  值也比较接近真值,只是标准偏差比单参数估计(图 2、3)时要大。

作者和陈鸣远同志进行过有益的讨论,特致谢。

### 参 考 文 献

- [1] 李惕碛,“实验的数字处理”,科学出版社, p. 124, 79 和 265.
- [2] 任国孝等,高能物理和核物理, 8(1984),664.

## DATA PROCESSING METHOD IN MEASURING THE MEAN-FREE-PATH OF NUCLEAR INTERACTIONS

WU MEI REN GUO-XIAO

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

The experimental data processing method of measuring the mean-free-path of nuclear interactions is discussed. Estimator formulas in several experimental conditions are obtained by using the maximum likelihood method. The result of Monte-Carlo simulation shows that in case of the experimental data with poor statistics the maximum likelihood estimate value is more accurate than the least squares fitting value generally used