第 11 卷

ISVERSE

he transverse mo
$m_\perp \gg T$.

第11卷 第2期 1987年3月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol. 11, No. 2 Mar., 1987

柱对称 Einstein 方程的可积性和几何意义

史 建 民[1)]
（江苏扬州师范学院）

摘 要

本文采用规范协变形式讨论了柱对称 Einstein 方程，将其基本方程与对称空间中相应的孤子面的第一,第二微分基本形式相联系,利用体系的对偶对称性给出了线性散射方程，Bäcklund 变换和 Riccati 方程,证明了它们的可积性，得到了相应的几何解释.

一、引 言

近年来非线性物理系统的研究进展迅速,其原因在于 Yang-Mills 规范理论的巨大成功[1]和反散射方法的发展[2]. 许多作者已从几何角度探讨了反散射方法可解系统. 例如，SaSaki 论证了 1+1 维 AKNS 体系描绘了伪球面[3]；侯伯宇等人讨论了 $O(3)$-σ 模型与伪球面的关系[4]，给出了静轴对称自对偶 Yang-Mills 场的几何解释[5]，并对引力 Ernst 方程作了初步的研究[6].

真空 Einstein 方程在柱对称约束下与引力 Ernst 方程等价. 当一个 Killing 矢量为类时矢量时，讨论结果与文献[5]中相类似. 因此，我们仅研究两个类空 Killing 矢量体系,给出基本方程的规范协变形式,着重探讨 Bäcklund 变换 (BT) 和 Riccati 方程 (RE) 的可积性和几何意义,以便能够进一步了解方程解的性质及其相互关系,利于揭示它们的物理实质.

二、模型及其规范协变性

对于类空 Killing 矢量 $\xi_a(a=1.2)$，利用度规张量 $g_{\mu\nu}$，我们构造 2×2 矩阵[7]

$$\Sigma_{ab}=\xi_a^\mu\xi_b^\nu g_{\mu\nu},\quad(\mu,\nu=0.1) \tag{2.1}$$

定义

$$\alpha^2(x)\equiv\det|\Sigma| \tag{2.2}$$

其中 x 是底空间坐标. 以此,我们定义场量

1) 本文 1985 年 12 月 12 日收到. 1986 年 10 月 24 日收到修改稿.

$$N(x)=\alpha^{-1}(x)\Delta\Sigma(x) \tag{2.3}$$

$$\Delta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

显然

$$N^2(x)=-I=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

四维真空 Einstein 方程简化为

$$\partial_\mu(\alpha(x)[\partial^\mu N(x),N(x)])=0. \tag{2.6}$$

由于 $N(x)$ 是 $O(2.1)$ 群李代数的元素,其生成元为

$$Q_1=\sigma_3,\quad Q_2=\sigma_1,\quad Q_3=-i\sigma_2, \tag{2.7}$$

σ_i 是三个 Pauli 矩阵,对称空间是三维 Minkowski 空间，场量 $N(x)$ 在陪集$\sim O(2.1)/O(2)$之中． 因此，$N(x)$ 可认为是从底空间到嵌入在对称空间中曲面$\sim O(2.1)/O(2)$ 上的调和映射．

对于(2.6),我们有等价的形式

$$\partial_\mu(\alpha K^\mu)=0, \tag{2.8}$$

$$K_\mu\equiv-\frac{1}{2}N^{-1}(x)\partial_\mu N(x),\quad \{K_\mu,N\}=0. \tag{2.9}$$

如果确定 $N(x)$ 是上述曲面的法向,则 K_μ 作为 $O(2,1)$ 伴随空间的矢量与曲面相切．这意味着可以引入定域“规范”变换

$$K_\mu\to k_\mu=g^{-1}(x)K_\mu(x)g(x), \tag{2.10}$$

$$g^{-1}(x)N(x)g(x)=n=Q_3. \tag{2.11}$$

我们讨论一般情形

$$K_\mu\to K_\mu^{(s)}(x)=S^{-1}(x)K_\mu(x)S(x), \tag{2.12}$$

$$N(x)\to N^{(s)}(x)=S^{-1}(x)N(x)S(x), \tag{2.13}$$

形式上可以引进非动力学的纯规范势

$$A_\mu^{(s)}(x)=S^{-1}(x)\partial_\mu S(x), \tag{2.14}$$

给出(2.6)的规范协变形式

$$D_\mu^{(s)}(\alpha K^{\mu(s)})=0,\quad D_\mu^{(s)}\equiv\partial_\mu+[A_\mu^{(s)},], \tag{2.15}$$

$K_\mu^{(s)}$ 与 $N^{(s)}$ 仍保持正交,

$$\{K_\mu^{(s)},N^{(s)}\}=0. \tag{2.16}$$

如果定义

$$H_\mu^{(s)}\equiv A_\mu^{(s)}-K_\mu^{(s)},\quad \mathscr{D}_\mu^{(s)}\equiv\partial_\mu+[H_\mu^{(s)},] \tag{2.17}$$

则有:

$$\mathscr{D}_\mu^{(s)}N^{(s)}=0, \tag{2.18}$$

$$\mathscr{D}_\mu^{(s)}(\alpha K^{\mu(s)})=0. \tag{2.19}$$

以此可知，在与联络 $H_\mu^{(s)}$ 相关的平行变换中，$N(x)$ 的运动方程形式不变，$H_\mu^{(s)}$ 可约化为 $U(1)$ 联络，$K_\mu^{(s)}(x)$ 和 $H_\mu^{(s)}(x)$ 总可以由 $N^{(s)}(x)$ 和 $A_\mu^{(s)}(x)$ 表示． 上述各式在给定 $N(x)$ 和 $S(x)$ 时也总可以获得．在 $s=1$ 规范下(零规范)，存在着一个“绝对平行标架”,即底空间中各点都有相同的对称性生成元．

在正常规范下 $(s(x)=g(x))$，我们有

$$\begin{cases} a_\mu(x) = h_\mu(x) + k_\mu(x) = g^{-1}(x)\partial_\mu g(x), \\ h_\mu(x) = -\dfrac{1}{2}\{g^{-1}(x)\partial_\mu g(x),\, n\}n \\ k_\mu(x) = \dfrac{1}{2}[y^{-1}(x)\partial_\mu y(x),\, n]n, \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\{k_\mu, n\} = 0,\quad [h_\mu, n] = 0. \tag{2.21}$$

对合算子 n 使纯规范势 a_μ 自然地分解为水平部分 k_μ 和垂直部分 h_μ. 利用 a_μ 的零曲率条件及对合算子的作用，我们给出规范协变的三个基本方程，

$$F_{\mu\nu} = -[k_\mu, k_\nu],\ (\text{Gauss-方程}) \tag{2.22}$$

$$\mathscr{D}_\mu k_\nu - \mathscr{D}_\nu k_\mu = 0,\ (\text{Codazzi-方程}) \tag{2.23}$$

$$\mathscr{D}_\mu(\alpha k^\mu) = 0,\ (\text{运动方程}) \tag{2.24}$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu h_\nu - \partial_\nu h_\mu + [h_\mu, h_\nu].$$

三、对偶变换和线散方程

令

$$^*k_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}k^\nu\quad (\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1) \tag{3.1}$$

则有

$$[^*k_\mu, {}^*k_\nu] = -[k_\mu, k_\nu]. \tag{3.2}$$

定义 k_μ 的对偶变换 (DT)，

$$k_\mu \to \tilde{k}_\mu = ak_\mu + b\,{}^*k_\mu, \tag{3.3}$$

利用 Gauss-方程的 DT 对称性，参数 a 和 b 可由单参数 φ 定出

$$\tilde{k}_\mu = \operatorname{ch}\varphi\, k_\mu + \operatorname{sh}\varphi\, {}^*k_\mu. \tag{3.4}$$

为了要求

$$\mathscr{D}^*_\mu \widetilde{k^\mu} = 0, \tag{3.5}$$

我们得到

$$\alpha(x)\operatorname{cth}\varphi + \beta(x) = \frac{1}{L} \tag{3.6}$$

其中 L 是底空间的常数. 由于

$$\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\beta(x) = \partial_\mu\alpha(x), \tag{3.7}$$

因此，只要 φ 满足(3.6)，(3.5)就与运动方程等价. 同时，注意到 (3.5) 就是 $\tilde{k}_\mu$ 所满足的 Codazzi-方程，$h_\mu + \tilde{k}_\mu$ 也是一个纯规范势，与(2.20)相应有

$$h_\mu + \tilde{k}_\mu\langle\gamma\rangle = u\langle\gamma\rangle\partial_\mu u^{-1}\langle\gamma\rangle \tag{3.8}$$

其中

$$u\langle\gamma\rangle \equiv u(x\cdot\gamma),\quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{2}(\gamma+\gamma^{-1}),\quad \operatorname{sh}\varphi = \frac{1}{2}(\gamma-\gamma^{-1}).$$

当 $\gamma=1$ 时，(3.8)就是 $h_\mu + k_\mu$. 利用 DT 算子[8]

$$U\langle\gamma\rangle = g(x)u\langle\gamma\rangle, \quad N\langle\gamma\rangle = U^{-1}\langle\gamma\rangle N(x)U\langle\gamma\rangle, \tag{3.9}$$

借助于(2.20)立即得到线散方程

$$\partial_\mu U\langle\gamma\rangle = -(H_\mu + \tilde{k}_\mu\langle\gamma\rangle)U\langle\gamma\rangle. \tag{3.10}$$

具体写出即是

$$\partial_\mu U\langle\gamma\rangle = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}(\lambda N^{-1}\langle\gamma\rangle\partial_\mu N\langle\gamma\rangle + \varepsilon_{\mu\nu}N^{-1}\langle\gamma\rangle\partial^\nu N\langle\gamma\rangle)U\langle\gamma\rangle, \tag{3.11}$$

$$\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

可以证明(3.8)和(3.10)的可积性条件分别是正常规范和零规范下的基本方程.

四、Bäcklund 变换和 Riccati 方程

由 R-H 方法[9]直接给出 BT 表达式[10]

$$\partial^\mu[\alpha(N\partial_\mu N - N'\partial_\mu N')] = 0. \tag{4.1}$$

上式表明,只要N是运动方程的解,N'也一定是一个解,以此可以给出解系列.

为了保证 $NN'N'N = I$,应有

$$\begin{cases} -NN' = \mathrm{ch}\,\theta I + \mathrm{sh}\,\theta R \\ -N'N = \mathrm{ch}\,\theta I - \mathrm{sh}\,\theta R \end{cases} \tag{4.2}$$

$$R^2 = I, \quad \mathrm{Tr}R = 0. \tag{4.3}$$

BT 的另一形式可表为

$$\alpha(N\partial_\mu N - N'\partial_\mu N') = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu(\alpha\,\mathrm{sh}R). \tag{4.4}$$

BT 参数θ应满足

$$\alpha\,\mathrm{ch}\theta + \beta = \mathrm{Const}, \tag{4.5}$$

若使其常数与(3.6)中的一致,则 BT与 DT 的关系为

$$\mathrm{ch}\theta = \mathrm{cth}\,\varphi = \frac{\gamma+\gamma^{-1}}{\gamma-\gamma^{-1}} = \frac{1}{2}(\lambda+\lambda^{-1}). \tag{4.6}$$

与 BT 相应的矩阵形式的 RE 是

$$D_\mu R - \tilde{k}_\mu + R\tilde{k}_\mu R = 0. \tag{4.7}$$

采用文献[11]中的方法,极易证明

$$d^2R = 0,$$

可积性条件正是基本方程. 因此 BT 是可积的. 只要给定 R、利用(4.2)就能很容易地从运动方程的旧解得出新解. 如果取二维线性方程

$$(\partial_\mu + H_\mu)\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{k}_\mu \\ \tilde{k}_\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

$$R = (U_{11}a + U_{12})(U_{21}a + U_{22})^{-1}, \tag{4.9}$$

就可得出(4.7)式. 其中 a 是常数矩阵. 若令

$$\begin{cases} U(\lambda^{-1}) \equiv U_{11} - U_{21}, \ U(\lambda) = U_{22} - U_{12}, \\ R = [U(\lambda^{-1})c - U(\lambda)][U(\lambda^{-1})c + U(\lambda)]^{-1}, \end{cases} \tag{4.10}$$

(4.8)可以对角化，且同样给出(4.7)式，其中 c 也是常数矩阵。

五、孤子面和 Bäcklund 变换的几何意义

运动方程的外微分形式为

$$d(\alpha[N, {}^*dN]) = 0, \tag{5.1}$$

式中 Hodge 星号定义如下，

$$\begin{cases} {}^*dx_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}dx^\nu \\ {}^*d\xi = d\xi, \quad {}^*d\eta = -d\eta \quad (\xi = t + x, \ \eta = t - x). \end{cases} \tag{5.2}$$

因此

$$dX \equiv \frac{1}{2}\alpha[N, {}^*dN] \tag{5.3}$$

是完全可积的。X 可认为是三维 Minkowski 空间的二维孤子面，N 是该曲面的法向。由于

$$dN \cdot dX = -{}^*(dN \cdot dX), \tag{5.4}$$

故采用光锥坐标 ξ 和 η 时，底空间的类光方向

$$\xi = \mathrm{cons}\ t, \quad \eta = \mathrm{cons}\ t$$

在 X 上的映象是渐近方向。

孤子面的微分第一，第二基本形式分别为

$$dX = \omega^a E_a \quad (a = 1, 2) \tag{5.5}$$

$$dE_i = \omega_i^j E_j \quad (i = 1, 2, 3) \tag{5.6}$$

式中 E_i $(i = 1, 2, 3)$ 是曲面上正交归一的活动标架。以此得到

$$\omega^i = \alpha\varepsilon_{3i}^{i}\, {}^*\omega_3^i. \tag{5.7}$$

由活动标架的可积性条件，可以得出 Gauss-Codazzi 方程

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{5.8}$$

注意到 Hodge 星号性质及(5.7)式，有

$$d\omega_{12} = -\frac{1}{\alpha^2}\omega_1 \wedge \omega_2 \equiv -K\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{5.9}$$

因此孤子面的 Gauss 曲率 $K = \frac{1}{\alpha^2}$，是正定的。

在正常规范下讨论几何意义最为方便。可以求出，

$$\begin{aligned} -g^{-1}dg \equiv \Omega^{\mathrm{II}} &= -(h_\mu + k_\mu)dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_2^3 & \omega_1^3 - \omega_3^1 \\ -\omega_1^2 - \omega_3^1 & -\omega_2^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

可以证明(5.8)就是

$$d\Omega^{\mathrm{II}} = \Omega^{\mathrm{II}} \wedge \Omega^{\mathrm{II}}. \tag{5.11}$$

因此，(5.11)给出了 Gauss-Codazzi 方程，(5.10)表明了 h_μ 和 k_μ 与曲面第二基本形式的关系。我们还有

$$-(h_\mu + i^* k_\mu)dx^\mu \equiv \Omega^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\alpha}\begin{pmatrix} -i\omega^1 & \alpha\omega_1^2 + i\omega^2 \\ -\alpha\omega_1^2 + i\omega^2 & i\omega^1 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

利用运动方程，得出

$$\omega^i \wedge \omega_i^3 = 0, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1. \tag{5.13}$$

同样可证

$$d\Omega^{\mathrm{I}} = \Omega^{\mathrm{I}} \wedge \Omega^{\mathrm{I}} \tag{5.14}$$

就是(5.13)，(5.14)给出了体系的运动方程。

如果取 BT 前后的活动标架关系为

$$E_1' = E_1, \quad E_2' = \mathrm{ch}\,\theta E_2 + \mathrm{sh}\,\theta E_3, \quad E_3' = \mathrm{ch}\,\theta E_3 + \mathrm{sh}\,\theta E_2 \tag{5.15}$$

就能得到

$$\begin{cases} \omega_1'^2 = -\omega_3'\,\mathrm{sh}\,\theta + \omega_1^2\,\mathrm{ch}\,\theta, \quad \omega_2'^3 = \omega_2^3 + d\theta \\ \omega_3'^1 = \omega_3^1\,\mathrm{ch}\,\theta - \omega_1^2\,\mathrm{sh}\,\theta. \end{cases} \tag{5.16}$$

利用 $E_3 = N$，(4.7) 化为方程组

$$\begin{cases} -\alpha d\theta = \mathrm{sh}\theta^* d\alpha + \alpha\,\mathrm{ch}\,\theta^* d\theta, & (5.17\text{-}1) \\ {}^*\omega_1^2 = \mathrm{ch}\,\theta\omega_1^2 - \mathrm{sh}\,\theta\omega_3^1, & (5.17\text{-}2) \\ {}^*\omega_3^1 = \mathrm{sh}\,\theta\omega_1^3 - \mathrm{ch}\,\theta\omega_3^1. & (5.17\text{-}3) \end{cases}$$

由(5.7)，(5.17-3)变为

$$\omega^2 = \alpha(\mathrm{sh}\,\theta\omega_1^2 - \mathrm{ch}\,\theta\omega_3^1), \tag{5.18}$$

这正是公切线 $R = E_1 = E_1'$ 系统中经典 BT 方程[12]，它揭示了 BT 的几何意义是：新解和旧解是各自孤子面的法向，它们由曲面的公切线相联，新解相对于旧解绕公切线作了一个"转动"。还可证明(5.17-1)与(4.5)等价，(5.17-2)与(5.17-3)自洽。

我们进一步利用连续 DT，以 γ 为参数构造新的孤子面 $X\langle\gamma\rangle$。为此，引入

$$\begin{cases} \tilde\omega_1^2 = \omega_1^2, \quad \tilde\omega_2^3 = \mathrm{ch}\,\varphi\omega_2^3 - \mathrm{sh}\,\varphi\omega^2, \\ \tilde\omega_1^3 = \mathrm{ch}\,\varphi\omega_1^3 - \mathrm{sh}\,\varphi\omega^2, \quad \tilde\omega^1 = \mathrm{ch}\,\varphi\omega^1 + \mathrm{sh}\,\varphi\omega_2^3, \\ \tilde\omega_2 = \mathrm{ch}\,\varphi\omega^2 - \mathrm{sh}\,\varphi\omega_1^3, \end{cases} \tag{5.19}$$

这样，Ω 自然变换为 $\Omega\langle\gamma\rangle$。采用证明(5.8)，(5.9)和(5.13)的方法。能够表明 $\tilde\omega_i$ 和 $\tilde\omega_i^j$ 所构成的相应的方程是可积的 $X\langle\gamma\rangle$ 一定存在，其 Gauss 曲率仍是 $1/\alpha^2$。由于

$$-(h_\mu + \tilde k_\mu)dx^\mu = \Omega^{\mathrm{II}}\langle\gamma\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde\omega_2^3 & \omega_1^2 - \tilde\omega_3^1 \\ -\omega_1^2 - \tilde\omega_3^1 & -\tilde\omega_2^3 \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

(3.8)即是

$$du\langle\gamma\rangle = \Omega^{\mathrm{II}}\langle\gamma\rangle u\langle\gamma\rangle, \tag{5.21}$$

其可积性条件正是

$$d\Omega^{\mathrm{II}}\langle\gamma\rangle = \Omega^{\mathrm{II}}\langle\gamma\rangle \wedge \Omega^{\mathrm{II}}\langle\gamma\rangle. \tag{5.22}$$

因此，线散方程的可积性条件就是经过 DT 的 Gauss-Codazzi 方程。非常类似，我们有

$$-(h_\mu + i^*\tilde k_\mu)dx^\mu = \Omega^{\mathrm{I}}\langle\gamma\rangle = \frac{1}{2\alpha}\begin{pmatrix} -i\tilde\omega^1 & \alpha\omega_1^2 + i\tilde\omega^2 \\ -\alpha\omega_1^2 + i\tilde\omega^2 & i\tilde\omega^1 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

它的 Maurer-Cartan 形式为

$$dV\langle\gamma\rangle = \Omega^{\mathrm{I}}\langle\gamma\rangle V\langle\gamma\rangle, \tag{5.24}$$

可积性条件是

$$d\Omega^{\mathrm{I}}\langle\gamma\rangle = \Omega^{\mathrm{I}}\langle\gamma\rangle \wedge \Omega^{\mathrm{I}}\langle\gamma\rangle, \tag{5.25}$$

这正是运动方程的 DT 形式. 比较(5.20)和(5.23),即得

$$\Omega^{\mathrm{II}}\langle i\gamma\rangle = \Omega^{\mathrm{I}}\langle\gamma\rangle,\quad u\langle i\gamma\rangle = V\langle\gamma\rangle. \tag{5.26}$$

当 γ 从实参数变为纯虚参数时, Ω^{II} 就变成了 Ω^{I}. 实际上, (5.24) 就是文献[3]给出的线散方程.

在正常规范下,取

$$R = \cos\chi E_1 + \sin\chi E_2, \tag{5.27}$$

RE 可写成

$$\begin{cases} d\hat{R} = -[h_\mu dx^\mu \hat{R}] + [\hat{k}_\mu dx^\mu, \hat{R}]\hat{R}, \\ \hat{R} = \cos\chi Q_1 + \sin\chi Q_2. \end{cases} \tag{5.28}$$

令 $\Gamma \equiv e^{i\chi}$, 从(5.28)可得出两个非线性方程

$$\begin{cases} d\Gamma = \dfrac{1}{2}(i\tilde{\omega}_3^1 - \tilde{\omega}_2^3) + i\omega_1^2\Gamma + \dfrac{1}{2}(\tilde{\omega}_2^3 + i\tilde{\omega}_3^1)\Gamma^2, \\ d\Gamma^{-1} = -\dfrac{1}{2}(i\tilde{\omega}_3^1 + \tilde{\omega}_2^3) - i\omega_1^2\Gamma^{-1} + \dfrac{1}{2}(\tilde{\omega}_2^3 - i\tilde{\omega}_3^1)\Gamma_0^{-2} \end{cases} \tag{5.29}$$

如果取线性方程

$$\begin{cases} d\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i\omega_1^2 & -\tilde{\omega}_2^3 + i\tilde{\omega}_3^1 \\ -\tilde{\omega}_2^3 - i\tilde{\omega}_3^1 & -i\omega_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \Gamma = u_1/u_2,\quad \Gamma^{-1} = u_2/u_1 \end{cases} \tag{5.30}$$

可以直接给出两个标量 RE (5.29). 因此, RE 的几何意义即是, $\Gamma = e^{i\chi}$ 确定了从已给定的活动标架第一轴 E_1 到 BT 的分切线的转动.

六、讨论与结论

我们利用定域对合算子 $N(x)$ 讨论了柱对称 Einstein 方程, 借助于 DT 和 BT 可给出一系列的新解, RE 的可积性保证了这些新解的存在. 对于每一个解,在对称空间中都有一个孤子面,这个解可表为其法向, 孤子面的 Gauss 曲率总是正定的. 孤子面上微分几何的第一基本形式给出了运动方程, 第二基本形式给出了 Gauss-Codazzi 方程. BT 表示了两个孤子面分切线的"转动", RE 确定了轴 E_1 到分切线的转动.

我们采用的方法可以解更一般的系统,例如, 用来处理超对称非线性 σ 模型[13], 并期望对其它约束的Einstein 方程也有效, 另外, 对该体系的无穷守恒流及 Riccati 方程还可以作进一步的探讨.

作者深深感谢王珮老师的指导.

参 考 文 献

[1] K. C. Chou, Proc. of the Symposium on Y-M Gauge Theories (Beijing December 1984) Commun. Theor. Phys. Vol. 4 No. 5(1985), 532.

[2] M. J. Tblowitz, D. T. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **31**(1973), 125; *Stud. Appl. Math.*, **53**(1974), 249.

[3] R. Sasaki, *Nucl. Phys.*, **B154**(1979), 343.

[4] B. Y. Hou, B. Y. Hou, P. Wang, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **18**(1985), 165.

[5] B. Y. Hou, B. Y. Hou. P. Wang, *Int. J. Mod. Phys.*, **1**(1986), 193.

[6] B. Y. Hou, B. Y. Hou, P. Wang, Proc. of the 3-rd Grassmann Meeting, P. 1033 (Shanghai 1983).

[7] D. Maison, *J. Math. Phys.*, Vol. **20** No. 5(1979), 871.

[8] K. Pohlmeyer, *Commun. Math. Phys.*, **46**(1976), 207.

[9] Y. S. WU, *Commun. Math. Phys.*, **90**(1983), 461.

[10] D. Levi, O. Ragnisco, A. Sym, *Lett. AL Nuo. Cim.*, **33**(1982), 401.

[11] L. L. Chau, B. Y. Hou, X. C. Song, *Phys. Lett.*, **B151**(1985), 421.

[12] S. S. Chern, C. L. Terng, *Rocky Mountain Jour. of Math.*, **10**(1980), 105.

[13] B. Y. Hou, P. Wang, Proc. of the Symposium on Y-M Gauge Theories (Beijing December 1984) Commun. Theor. Phys. **4**(1985), 729.

INTEGRABILITY PROPERTY AND GEOMETRIC INTERPRETATION OF CYLINDRICAL EINSTEIN-EQUATION

SHI JIAN-MIN

(Jiangsu Yangzhou Teachers College)

ABSTRACT

We discuss cylindrical Einstein-equation via the G-gauge covariant formulation, the basic equations are related to the first and the second fundamental differential forms on the soliton surfaces in the symmetric space. By means of the dual symmetry of the system, the linear scattering equations, Bäcklund transformatoins and Riccati-equations are established, whose integrabilities are shown. The geometric meanings of Bäcklund transformations and Riccati-equations are obtained.