

非谐振子囚禁势的重夸克偶素能谱

周源海 姜德顺 千文甲 官学惠
(辽宁大学)

摘 要

在非谐振子势: $V_c(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \lambda r^4$ 中,用广义维里-Pade'逼近法(The Hypervirial-Pade' Approach)研究了重夸克偶素能谱.当选取适当的势参数时,粲偶素族和底偶素族的计算数值与实验结果相符合.

一、引 言

夸克和反夸克对组成的束缚态——重夸克偶素的能谱和其它性质如衰变宽度等为研究夸克间的相互作用提供重要的、有用的信息.由于重夸克的质量较大,一般认为粲偶素族 $c\bar{c}$ 和底偶素族 $b\bar{b}$,用非相对论量子力学处理是合理的.即在 Schrödinger 方程的基础上,通过一些理论上的考虑或分析实验数据的规律性,唯象地引入某种囚禁势,求出能级和波函数后,再与有关实验值相比较,从而确定所选取的最佳势参数.根据这样方法,有些人曾设想过许多不同形式的囚禁势,做了大量的理论分析工作,有关此方面的文献较多.其中理论计算和能谱实验值符合得较好的有:库仑-线性迭加势^[1],对数势^[2],弱幂次势^[3]以及一些内插势^[4].这些势模型虽然都是唯象近似,且其结果也并非完全令人满意,但大体还能解释各种实验事实,这表明分析重夸克偶素能谱用非相对论量子力学处理是合理的.

此外,在模型势的谱分析中大都用数值积分法求解径向 Schrödinger 方程,并在模型势中引入适当常数使基态能级与基态实验值相一致^[5].这里,作为囚禁势我们采用非谐振子势

$$V_c(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \lambda r^4 \quad (1)$$

其中, $k = \mu\omega^2$ (μ 为夸克的折合质量, ω 为圆频率), λ 为微扰参数.在 $\lambda > 0$ 的条件下,非谐振项的贡献在通常的微扰展开中可能是形式上发散级数.但 S. Graffi 等人证明^[6]对于非谐振子势: $x^2 + \lambda x^{(m+1)}$ 当 $m \leq 2$ 时,而且仅仅在这时能量本征值的 Rayleigh-Schrödinger 微扰展开式是 Stiltjes 级数,虽然在形式上表现为发散的级数,但它的对角 Pade' 逼近子却收敛到其本征值.详细请参看参考文献 [5, 10].近年来,不少作者根据

广义维里微扰项能是:只要本文下求解束 2^{10} 的所有能谱,发法和一些

如果略不计,则

式中

由广 $\hat{H}, | \rangle$ 代 $\hat{H} - \hat{H}$

适当选择

如果

把(6)式

如果

利用(7).

能谱

广义维里——微扰理论^[6],把原子能量级数的各级展开系数,用代数方法将它们表示成非微扰项能级的解析表达式,发展了一种不用波函数的微扰展开理论^[7],这种方法的优点是:只要精度需要,就可求出任意级的能量展开系数。

本文把广义维里——微扰理论运用于重夸克偶素问题中,并在(1)式给出的模型势下求解束缚态问题。能量级数的求和是借助于 Pade' 逼近理论进行的^[8]。我们计算到所有各级能量系数,通过选取适当的参数,从而算出非谐振子囚禁势的重夸克偶素能谱,发现计算值与实验结果符合得相当好。我们将在第二节中给出本文所用的理论方法和一些有关公式,在第三节中讨论数值结果。

二、非谐振子势的广义维里——Pade' 方法

逼近法 (The

的势参数时,

如果假定重夸克对之间的相互作用势主要部分是中心势,而把自旋有关的势暂时忽略不计,则描述重夸克偶素系统的径向 Schrödinger 方程可写为

$$\hat{H}R(r) = ER(r) \quad (2)$$

式中

$$\hat{H} = -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + V(r) \quad (3)$$

$$V(r) = V_c(r) + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \quad (4)$$

衰变宽度等为

一般认为粲偶素

ger 方程的基础

禁势,求出能级

据这样方法,有

此方面的文献教

对数势^[9],弱幂次

完全令人满意,

量子力学处理是

方程,并在模型

我们采用非谐

由广义维里定理 (Hypervirial theorem)^[6] 可知,如果描述量子体系的哈密顿算符为 \hat{H} , $|l\rangle$ 代表 \hat{H} 的任一本征态,另有一与时间无关的任意算符 \hat{W} , 则对易子 $[\hat{W}, \hat{H}] = \hat{W}\hat{H} - \hat{H}\hat{W}$ 在 \hat{H} 的任意本征态中的期待值为零,即

$$\langle |[\hat{W}, \hat{H}]| \rangle = 0 \quad (5)$$

适当选择 \hat{W} 算符的形式, (5) 式将给出系统中各力学量之间的相互关系。

如果选 $\hat{W} = r^N \frac{d}{dr}$, 则 \hat{W} 与 \hat{H} 的对易关系为:

$$\left[r^N \frac{d}{dr}, \hat{H} \right] = r^N \frac{dV}{dr} + 2Nr^{N-1}V - 2Nr^{N-1}\hat{H} + \frac{1}{2\mu} (N-1)(N-2)r^{N-2} \frac{d}{dr} \quad (6)$$

(1) 把(6)式代入(5)式,得

$$2NE \langle |r^{N-1}| \rangle = 2N \langle |r^{N-1}V| \rangle + \left\langle \left| r^N \left(\frac{dV}{dr} \right) \right| \right\rangle + \frac{1}{2\mu} (N-1)(N-2) \left\langle \left| r^{N-2} \left(\frac{d}{dr} \right) \right| \right\rangle \quad (7)$$

如果再令 $\hat{W} = r^{N-1}$ 用相同方法不难求得

$$(N-1) \left\langle \left| r^{N-2} \left(\frac{d}{dr} \right) \right| \right\rangle = -\frac{1}{2} N(N-1) \langle |r^{N-3}| \rangle \quad (8)$$

利用(7)、(8)式,把 $V(r)$ 的具体表示式代入进去,可得出囚禁势(1)的束缚态能量 E 和

$\lambda > 0$ 的条件

Graffi 等人证

值的 Raylight

, 但它的对角

不少作者根据

相应的期待值 $\langle |r^N| \rangle$ 之间的相互依赖关系:

$$2EN\langle |r^{N-1}| \rangle = k(N+1)\langle |r^{N+1}| \rangle + 2(N+2)\lambda\langle |r^{N+3}| \rangle + \frac{1}{\mu}(N-1)\left[l(l+1) - \frac{1}{4}N(N-2)\right]\langle |r^{-3}| \rangle \quad (9)$$

假设能量 E 和期待值 $\langle |r^N| \rangle$ 可展开为 λ 的幂级数

$$E = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \dots = \sum_i E_i \lambda^i \quad (10)$$

$$\langle |r^N| \rangle = R_0^{(N)} + \lambda R_1^{(N)} + \lambda^2 R_2^{(N)} + \dots = \sum_i R_i^{(N)} \lambda^i \quad (11)$$

式中

$$E_0 = \left(2n + l - \frac{1}{2}\right)\omega \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

是三维谐振子的能量, $E_i (i \neq 0)$ 表示囚禁势中非谐振子项, 即微扰项的第 i 级校正. 若在 (11) 式中取 $N=0$, 由波函数的正交归一性, 可得

$$\langle |r^0| \rangle = \langle |1| \rangle = 1 = R_0^{(0)} + \lambda R_1^{(0)} + \lambda^2 R_2^{(0)} + \dots \quad (12)$$

由此不难看出

$$R_0^{(0)} = 1, \quad R_i^{(0)} = 0 \quad (\text{当 } i > 0 \text{ 时}) \quad (13)$$

把 (10) 式和 (11) 式代入 (9) 式, 并使等式两边 λ 的同次幂 (如为 α) 的系数相等, 则得出能量展开系数 E_i 和期待值 $\langle |r^N| \rangle$ 的展开系数 $R_i^{(N)}$ 之间的关系如下

$$2N \sum_{i, i(i+i=\alpha)} (E_i R_i^{(N-1)}) = k(N+1)R_{\alpha}^{(N+1)} + 2(N+2)R_{\alpha}^{(N+3)} + \frac{N-1}{\mu} \left[l(l+1) - \frac{1}{4}N(N-2) \right] R_{\alpha}^{(N-3)} \quad (14)$$

这是本文中的基本关系式. 为要在 E_i 和 $R_i^{(N)}$ 之间建立数量上的关系, 还要借助于 Hellmann-Feynman 定理, 按该定理, 若 \hat{H} 为任意参数 λ 的函数, 即 $\hat{H} = \hat{H}(\lambda)$, 则:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \left\langle \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right| \right\rangle \quad (15)$$

运用到 (1) 式所给出的囚禁势中, 把 λ 当作参数就有

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \langle |r^4| \rangle \quad (16)$$

于是利用 (10), (11) 与 (16) 式, 可得出

$$E_i = \frac{1}{i} R_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

再利用 (14) 和 (17) 式, 就可把能量和期待值的展开系数, 用已知量 E_0 表示出来. 为此, 首先令 (14) 式中的 $\alpha = 0$, 并利用对系数 $R_i^{(N)}$ 的限制条件

$$R_i^{(0)} = \delta_{i0} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i = 0) \\ 0 & (\text{当 } i \neq 0) \end{cases} \quad (18)$$

$$R_i^{(N)} = 0 \quad (\text{当 } i \text{ 为负整数时}) \quad (19)$$

可使 (14) 式变为

$R_0^{(N)}$

其次取 l

另外, 若

由 (

与奇数 l

再利用 (

开系数

其中, r

系, 利

系, 进而

现 i

$$R_0^{(N+1)} = \frac{2N}{k(N+1)} (E_0 R_0^{(N-1)}) - \frac{(N-1)}{k\mu(N+1)} \left[l(l+1) - \frac{N(N-2)}{4} \right] R_0^{(N-3)}$$

其次取 $N=1$, 上式变为

$$R_0^{(2)} = \frac{1}{k} E_0 \quad (20)$$

另外, 若在 (14) 式中取 $N=1$, 再利用 (17) 式, 可得出

$$R_i^{(2)} = -\frac{3i-1}{ik} R_{i-1}^{(1)} \quad (i \neq 0) \quad (21)$$

由 (17), (20), (21) 式可看出能量系数 E_i 只与 r 的偶数次幂的期待值的系数有关, 而与奇数次幂期待值的系数无关, 当然, 这只对 (1) 式所示的势才正确。由 (14) 和 (17) 式, 再利用 (18), (19), (20) 及 (21) 诸式, 用归纳法不难求出偶数次幂期待值 $\langle |r^{2m}| \rangle$ 的展开系数 $R_a^{(2m)}$ 的递推关系:

$$R_a^{(2m)} = \frac{2m-1}{mk} \sum_{i,j(i+j=a)} E_i R_j^{(2m-2)} - \frac{2m+1}{mk} R_{a-1}^{(2m+2)} - \frac{(m-1)}{mk\mu} \left[l(l+1) - \frac{(2m-1)(2m-3)}{4} \right] R_a^{(2m-4)} \quad (22)$$

其中, $m=2, 3, 4, \dots$; $\alpha=0, 1, 2, \dots$ 。(17) — (22) 式包含了 E_i 及 $R_i^{(N)}$ 的所有关系, 利用这些关系可以很方便地按入的幂次依次写出计算能量系数 E_i 所需要全部关系, 进而算出满足精度要求的任意级校正系数。

现在, 我们列举由 (17) — (22) 式产生的为谱分析所需要的前几级关系如下:

$$E_0 = \left(2n + l - \frac{1}{2} \right) \omega \quad (23)$$

$$E_1 = R_0^{(4)} \quad (24)$$

$$R_0^{(4)} = \frac{3}{2k} E_0 R_0^{(2)} - \frac{1}{2k\mu} \left[l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (24a)$$

$$R_0^{(2)} = \frac{1}{k} E_0 \quad (24b)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} R_1^{(4)} \quad (25)$$

$$R_1^{(4)} = \frac{3}{2k} (E_0 R_1^{(2)} + E_1 R_0^{(2)}) - \frac{5}{2k} R_0^{(6)} \quad (25a)$$

$$R_1^{(2)} = -\frac{2}{k} R_0^{(4)} \quad (25b)$$

$$R_0^{(6)} = \frac{5}{3k} E_0 R_0^{(4)} - \frac{2}{3k\mu} \left[l(l+1) - \frac{15}{4} \right] R_0^{(2)} \quad (25c)$$

$$E_3 = \frac{1}{3} R_2^{(4)} \quad (26)$$

$$R_2^{(4)} = \frac{3}{2k} (E_0 R_2^{(2)} + E_1 R_1^{(2)} + E_2 R_0^{(2)}) - \frac{5}{2k} R_1^{(6)} \quad (26a)$$

$$R_2^{(2)} = -\frac{5}{2k} R_1^{(4)} \quad (26b)$$

$$R_1^{(6)} = \frac{5}{3k} (E_0 R_1^{(4)} + E_1 R_0^{(4)}) - \frac{7}{3k} R_0^{(8)} - \frac{2}{3k\mu} \left[l(l+1) - \frac{15}{4} \right] R_1^{(2)} \quad (26c)$$

$$R_0^{(8)} = \frac{7}{4k} E_0 R_0^{(6)} - \frac{3}{4k\mu} \left[l(l+1) - \frac{35}{4} \right] R_0^{(4)} \quad (26d)$$

依次类推,我们利用一般的递推关系(17)–(22)的六个式子,算到 λ^{10} 项为止的所有能量系数的解析表达式。

前面曾提到,在(1)式所示的势中,其能量级数展开式的对角 Pade' 逼近收敛到能量的本征值^[9]。于是,非谐振子势能级可写为

$$E[L/M] = E_0 \frac{1 + \lambda p_1 + \lambda^2 p_2 + \cdots + \lambda^L p_L}{1 + \lambda q_1 + \lambda^2 q_2 + \cdots + \lambda^M q_M} = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \cdots + \lambda^{L+M} E_{L+M} \quad (27)$$

其中系数 p_1, p_2, \dots, p_L 和 q_1, q_2, \dots, q_M 由已求出的 E_1, E_2, \dots, E_{L+M} 按 Pade' 逼近理论求得^[8]。

三、数值结果和讨论

我们已算出了重夸克偶素能量到 λ^{10} 项为止的所有展开系数表达式。对(10)式的能量表示式进行 Pade' 逼近计算时显示出良好的收敛性。比如,我们在计算中发现 $E[4/4]$ 与 $E[5/5]$ 给出几乎完全相同的结果。表 1 给出了关于粲偶素族和底偶素族的能谱数值的 $E[5/5]$ 结果。所选取的势参数如下:

$$\begin{aligned} m_c &= 1.496 \text{ GeV}, & m_b &= 5.20 \text{ GeV} \\ \omega_c &= 0.160 \text{ GeV}, & \omega_b &= 0.131 \text{ GeV} \\ \lambda_c &= 0.2450 \text{ GeV}^5, & \lambda_b &= 0.2455 \text{ GeV}^5 \end{aligned}$$

表 1 非谐振子势给出的偶素谱(单位 GeV, 底划线是输入)

能级	粲偶素族		底偶素族	
	非谐振子势	实验值	非谐振子势	实验值
1S	3.095	3.095	9.434	9.435 ± 0.0004
2S	3.592	3.684	9.840	9.9930 ± 0.0010
3S	4.085	4.028	10.244	10.3232 ± 0.0007
4S	4.576	4.414?	10.646	10.547 ± 0.002
1P	3.333	3.522 ± 0.005	9.628	
2P	3.833		10.038	
3P	4.327		10.442	
4P	4.818		10.854	
1D	3.571	3.772	9.824	
2D	4.072	4.159?	10.233	
3D	4.566		10.638	
4D	5.059		11.042	

应
下划线
实验值
定为 5 S
佳质量
与实验
Schrodin
当独立
[N/N -
其
的增加,
中能量
以截断
本
单、精度
Pade' 逼
量,如 <

- [1] E. J.
[2] M.
[3] M.
[4] J. I.
G.
[5] S. C.
[6] J. C.
[7] J. J.
[8] Bak.
Pub.
[9] 宋行
[10] J. J.

THE

The
 $V_c(r) = -$
ters, we c
with the

应该指出的是, 我们的计算结果仅仅是能级间的间隔而不是绝对能量值, 表中基态底下划线为输入值。不难看出, 适当选取参数后, 非谐振子势 (1) 所给出的重夸克偶素谱同实验值符合得比较好。表中划有“?”的实验值 4.414 GeV 和 4.159 GeV, 在有的文献中标定为 $5S$ 和 $4S^{(9)}$, 而我们标定为 $4S$ 和 $2D$ 时与实验值的符合精度能提高 2 倍。所选最佳质量参数大体与其他工作中所选参数相一致。选参数时, 我们用最小二乘法使理论值与实验值的均方偏差最小。显然, 势函数的形式具有关键意义。所选参数 m, ω, λ 按 Schrödinger 方程的标度性质可约化为一个参数的问题, 但为与实验值相比较, 编程时当独立变量, 用直接优化法作回归分析, 我们发现, 对角逼近子 $[N/N]$ 和非对角逼近子 $[N/N-1]$ 参数 λ 有明显差异。

其次, 从原则上讲, 我们可计算到精度需要的任意级系数, 而实际上随着级数项数的增加, 展开系数的值也迅速增加。利用方程 (2) 的标度变换性质, 适当改变自然单位制中能量的标度, 在一定范围内避免上溢出, 上溢出使级数的任意增加受限制, 但是我们可以截断到某一级, 只要判定 $[N/N]$ 和 $[N+1/N+1]$ 给出收敛结果即可。

本文表明, 广义维里——Pade' 逼近法是研究重夸克偶素能谱的有效手段, 除计算简单、精度高等优点之外, 突出一点是在理论形式上虽采用发散微扰展开的形式, 但对角的 Pade' 逼近子 $[N/N]$ 却是收敛的。另外, 本文中采用的方法还可用于计算其他的物理量, 如 $\langle |r^N| \rangle$ 和衰变宽度等, 有关结果将另文发表。

参 考 文 献

- [1] E. Eichten et al., *Phys. Rev.*, **D17**(1980), 3090; *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 203.
- [2] M. Machacek and Y. Tomozawa, *Prog. Theor. Phys.*, **58**(1977), 1890.
- [3] M. Machacek and Y. Tomozawa, *Ann. Phys.*, (N. Y) **110**(1978), 407.
- [4] J. L. Richardson, *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 272; R. Levine and Y. Tomozawa. *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 840; G. Bhanot and S. Rudaz., *Phys. Lett.*, **78B**(1978), 119.
- [5] S. Graffi and V. Grecchi, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 1022.
- [6] J. O. Hirschfelder, *J. Chem. Phys.*, **33**(1960), 1462.
- [7] J. Killingbeck, *Phys. Lett.*, **65A**(1978), 87.
- [8] Baker. G. A, Jr and Peter. Graves-morris (1981) *Pade Approximants Part 1: Basic theory* Addison Wesley Publishing Company.
- [9] 宋行长, 强子结构讨论会文集, **158**(1980, 武汉).
- [10] J. P. Killingbeck (1983) *Microcomputer. Quantum mechanics.* Adam. Hilger. Ltd Bristol.

THE HEAVY QUARKONIUM SPECTRUM OF ANHARMONIC OSCILLATORS CONFINEMENT POTENTIAL

ZHOU YUAN-HAI JIANG DE-SUN QIAN WEN-JIA GONG XUE-HUI

(Liaoning University)

ABSTRACT

The heavy quarkonium spectra were discussed with a confinement potential of the form $V_c(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \lambda r^4$ by using the Hypervirial Pade' Approach. With choice of suitable parameters, we calculated the binding energy levels of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ systems which provide good agreement with the experimental values.

页为止的所有能

逼近收敛到能

按 Pade' 逼

对 (10) 式的

算中发现 $E[4/4]$

偶素族的能谱

族

实验值

9.435 ± 0.0004

9.9930 ± 0.0010

10.3232 ± 0.0007

10.547 ± 0.002