

QCD 手征对称性动力学破缺 的有效势研究

朱超原 胡诗可

(四川大学)

摘 要

本文从无质量夸克的 QCD 拉氏量出发,引入双线性外源,导出了作为复合算子(夸克传播子和胶子传播子)泛函的有效势表示.从而得出传播子的 Dyson-Schwinger 方程.方程具有两组解,一组解保持手征对称性,另一组解使手征对称性自发破缺.通过讨论方程的渐近解,发现当耦合常数 $\alpha > \frac{1}{4}$ 时, QCD 手征对称性将自发破缺;当 $\alpha < \frac{1}{4}$ 时 QCD 手征对称性仍然保持.利用求得的夸克自能的渐近行为和 π 介子衰变常数 f_π 的实验值,估计了夸克产生的动力学质量和用其它理论方法与实验方法估计得的夸克质量相符,并对结果进行了讨论.

引 言

通常理论的拉氏量具有某种定域和整体对称性,而理论的真空却不一定具有这种对称性,即对称性是自发破缺的.在自发破缺规范理论的基础上建立的弱电统一模型已取得了很大的成功,而作为强作用规范理论的 QCD 也取得了重要的成就.引入 Higgs 标量场对于自发破缺的对称性并不一定是必要的,对于后者只要求一个具有非零真空期待值的标量算子. Higgs 标量场虽然提供了一种产生费米子和规范玻色子质量的机制,但这种标量场本身的质量与数目却不能确定. Higgs 标量粒子至今还未在实验中发现,这就进一步促使人们希望从动力学角度来解决弱电统一理论中的对称性自发破缺的问题.同时很自然的,希望把这种动力学对称性破缺引入到 QCD 中,以说明在强作用下由动力学对称性破缺产生的夸克质量问题.

场论的有效位势首先由 Jona-Lasinio, Coleman 和 E. Weinberg^[1] 用来研究对称性自发破缺. Jackiw^[2] 进一步用路径积分方法得到了有效位势的级数展式. Cornwall, Jackiw 和 Tomboulis^[3] 又进一步推广了有效势的形式,使其作为复合算子的生成泛函,这种形式的有效势更便于用来讨论动力学对称性破缺.他们用这种有效势讨论了 $O(2) \times U(1)$ 模型,发现存在动力学对称性破缺. Richard. W Haymaker 和 Juan Perez-Mercader^[4] 用

1986年5月6日 4239.

有效势讨论了 QED 手征对称性的动力学破缺,发现耦合常数超过某一临界值时,通常的真空将是不稳定的。K. T. Mahanthappa 和 J. Randa^[5] 用有效势讨论了无标量粒子的 $SU(2) \times U(1)$ 和手征对称性同时破缺。近年来由于 QCD 的建立和发展, QCD 的动力学对称性破缺问题引起了人们的注意和进行探讨。H. Pagels^[6] 曾应用动力学微扰论和重正化群方程讨论了 QCD 中的动力学质量。Lay-Nam Chang 和 Ngee-Pong Chang^[7] 也用重正化群方法讨论了 QCD 中的动力学对称性破缺,计算出由破缺产生的质量 M 和单圈截割 A_c 成正比。

一、有效势的计算

从无质量费米子场,胶子场的原始 QCD 拉氏量出发。在生成泛函的表示中除标准单源外,还加上双线性复合外源 $\int d^4x d^4y \bar{\psi}(x) K(x, y) \psi(y)$ 和

$$\int d^4x d^4y A_\mu^a(x) L_{ab}^{\mu\nu}(x, y) A_\nu^b(y),$$

前者对应费米子,后者对应胶子场。

原始拉氏量除具有 $SU(3)_c$ 色对称性,还保持手征对称性。原始 QCD 拉氏量为:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i\bar{\psi}(\not{\partial} - igT^a \gamma_\mu A^{\mu a})\psi, \quad (1.1)$$

其中 $[T^a, T^b] = ij^{abc} T^c$, $F_{\mu\nu}^a$ 是场强。由文献[3]类似计算得格林函数生成泛函的表示为:

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J; K, L] = \int [d\bar{\psi} d\psi dA] \exp \left\{ \frac{i}{2} A(D^{-1} - 2iM + L)A + i\bar{\psi}(i\not{\partial} - K)\psi + i\bar{\eta} + i\bar{\psi}\eta + i\bar{\eta}\psi + iJA \right\}, \quad (1.2)$$

其中略写了积分号,旋量和色空间求和指标。 $\bar{\eta}, \eta, J$ 为单外源, K, J 为双线性外源。而

$$D_{ab}^{\mu\nu}(K) = \delta_{ab}[-K^2 g^{\mu\nu} + K^\mu K^\nu (1 - \alpha^{-1})],$$

$$M_{ab}^{\mu\nu}(K) = (\partial_x^\mu M(x-y))(\partial_y^\nu M(y-x)) g^2 f^{acb} f^{ca} b,$$

$$M(x-y) = -\int d^4K \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{K^2} \exp[-iK \cdot (x-y)],$$

$$I_1 = -gf_{abc}(\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{g^2}{4} f_{abef} f_{acfd} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu e} A^{\nu f} + g\bar{\psi}\gamma_\mu T^a \psi A^{\mu a}.$$

在(1.2)中由 $Z = \exp(iW)$ 引入连通格林函数生成泛函 W , 然后对 W 进行 Legendre 变换,再变为正规顶角生成泛函 Γ , 由 $\Gamma[\phi] = -v(\phi) \int d^4x$ 定义有效势,最后得有效势表示为:

$$V[S, G] = i \int [dp] \text{Tr} [Ln S^{-1}(p) + \gamma \cdot p S(p)] + (4(-i)) \int [dp] \text{Tr} [Ln G^{-1}(p) + D^{-1}(p) G(p)]$$

通常的粒子的动力扰动和 $ig^{[7]}$ 也和单

$$\begin{aligned}
 & + \frac{g^2}{4} f^2 \int [dp][dq] [\text{Tr}G(p)\text{Tr}G(q) - \text{Tr}G(p)G(q)] \\
 & + \frac{g^2}{2} f^2 \int [dp][dq] \{ (2p+q)_\mu(2q+p)_\nu [G(p)G(p+q)G(q)]^{\mu\nu} \\
 & - (p+q)_\mu(p+2q)_\nu G^{\mu\nu}(p) [G(p+q)G(q)]^{\alpha\beta} \} \\
 & + \frac{g^2}{2} \text{Tr}(T^a T^a) \int [dp][dq] \text{Tr}(\gamma_\mu S(p)\gamma_\nu S(q)) G^{\mu\nu}(p-q) \\
 & + f^2 \int [dp] \text{Tr}M(p)G(p), \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

其中除单圈贡献外还有图 1 所示的两圈贡献, S, G 分别为待定费米子, 胶子传播子.

$$[dp] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 d^4p.$$

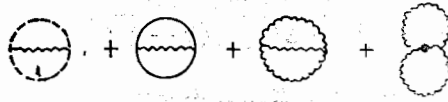


图 1 对有效势有贡献的两圈图

二、传播子的近似解

物理的有效势应使 $V[S, G]$ 为稳定, 这要求 $V[S, G]$ 对 S 与 G 的一阶变分为零:

$$\frac{\delta V[S, G]}{\delta S(p)} = 0, \quad \frac{\delta V[S, G]}{\delta G(p)} = 0, \tag{2.1}$$

同时二阶变分大于零. 由(1.3)和(2.1)可导出费米场与胶子场传播子的 Dyson-Schwinger 方程:

$$S^{-1}(p) = \boldsymbol{\gamma} \cdot p - ig^2 \int [dk] \text{Tr}[(T^a | T^a) \boldsymbol{\gamma}_\mu S(k) \boldsymbol{\gamma}_\nu G^{\mu\nu}(p-k)] \tag{2.2a}$$

$$\begin{aligned}
 8G^{-1}(p)^{\mu\nu} = & 8D^{-1}(p)^{\mu\nu} + ig^2 f^2 \int [dq] (g^{\mu\nu} \text{Tr}G(q) - G(q)^{\mu\nu}) \\
 & + ig^2 f^2 \int [dq] \{ (2p+q)^\rho(2q+p)^\mu G(p+q)^{\nu\sigma} G(q)_{\sigma\beta} + (2q+p)^\nu \\
 & \times (2p+q)^\alpha G_{\alpha\lambda}(q) G(p+q)^{\lambda\mu} + (2p-q)_\beta(p+q)_\alpha G(p-q)^{\alpha\mu} G(q)^{\nu\beta} \\
 & - (p+q)^\mu(p+2q)^\nu G(p+q)^{\alpha\beta} G(p)_{\beta\alpha} \\
 & - (p+q)_\beta(p+q)_\alpha G(p-q)^{\beta\alpha} G(p)^{\mu\nu} \} \\
 & + ig^2 \int [dq] \text{Tr}(T^a T^a) \text{Tr}(\boldsymbol{\gamma}^\mu S(p+q)\boldsymbol{\gamma}^\nu S(q)) + 2ig^2 f^2 M(p)^{\mu\nu} \tag{2.2b}
 \end{aligned}$$

其中 $f^2 = f_{abcd} f^{abcd} = 24$, $\text{Tr}(T^a T^a) = 4$.

为求出 D-S 方程传播子近似解, 采用 Landau 规范 (α 规范参数为 0). 对夸克和胶子传播子用

除标准

为:

(1.1)

的表示

(1.2)

而

Legend-

得有效

$$S^{-1}(p) = D(p^2)\gamma \cdot p - B(p^2),$$

$$G^{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) A(p^2) \quad (2.3)$$

的形式。系数 D, B, A 为待定，并是动量 p^2 的标量函数。对应只考虑胶子传播子的横向部分。在 Landau 规范下：

$$[G^{-1}(p)^{\mu\nu} - D^{-1}(p)^{\mu\nu}]_{\alpha=0} = (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \left(1 - \frac{5}{A(p^2)} \right).$$

将(2.3)代入(2.2)，并将积分转到欧氏空间，得出方程：

$$B(p^2) = 4g^2 \int [dk_E] \frac{B(k^2)A[(p-k)^2]}{D^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2}, \quad (2.4a)$$

$$[D(p^2) - 1]p^2 = \frac{g^2}{3} \int [dk_E] \left[12p \cdot k + 8 \frac{(k \cdot p)^2 - k^2 p^2}{(p-k)^2} \right]$$

$$+ \frac{D(k^2)A[(k-p)^2]}{(K^2 D^2(k^2) + B^2(k^2))(p-k)^2}, \quad (2.4b)$$

$$p^2 \left[1 - \frac{1}{A(p^2)} \right] = 9g^2 p^2 \int [dq_E] \frac{A(q^2)}{q^2} + g^2 p^2 \int [dq_E] \frac{A[(q-p)^2]A(q^2)}{(q-p)^2 q^2}$$

$$\times \left\{ 11p^2 + 5q^2 + 2p \cdot q - 11 \frac{(p \cdot q - p^2)^2}{(q-p)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{[q \cdot (q-p)]^3}{q^2(q-p)^2} \right\} + 4g^2 \text{Tr}(T^a T^a) \int [dq_E]$$

$$\times \frac{4B(q^2)B[(q-p)^2] + 2q - (q-p)D(q^2)D[(q-p)^2]}{[D^2(q^2)q^2 + B^2(q^2)][(q-p)^2 D^2((q-p)^2) + B^2((q-p)^2)]}$$

$$+ 2g^2 p^2 \int [dq_E] \frac{q \cdot (q-p)}{q^2(q-p)^2}. \quad (2.4c)$$

从(2.4)可看出 $B(p^2) = 0$, $D(p^2)|_{B=0} = D_0(p^2)$, $A(p^2)|_{B=0} = A_0(p^2)$ 构成一组方程为手征对称性保持。 $B(p^2) \neq 0$ 为手征对称性破缺解。在三中我们采用^[5]：

$$Q = V[S, G, B \neq 0] - V[S_0, G_0; B = 0]$$

来判定哪一个解是物理真空？即使 $V[S, G]$ 为极小。在三中判定 Q 正负号只需：

$$\delta A(p^2) = A(p^2) - A_0(p^2), \quad \delta D(p^2) = D(p^2) - D_0(p^2) \quad (2.5)$$

由于传播子精确求解很困难，我们采用合理近似来解 $\delta A(p^2)$ 和 $\delta D(p^2)$ 。取 $D_0(p^2) = A_0(p^2) = 1$, $D(p^2) = A(p^2) \cong 1$ ，后面将看到此法可行。它对应 H. Pagels 微扰论的最低阶近似^[6]。通过计算表明：

$$B(p^2) = 4g^2 \int [dk_E] \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2}, \quad (2.6)$$

$$\delta D(p^2)p^2 = \frac{g^2}{3} \int [dk_E] \left[12p \cdot k + 8 \frac{(k \cdot p)^2 - k^2 p^2}{(p-k)^2} \right] \frac{\delta A[(p-k)^2]}{(p-k)^2 [k^2 + B^2(k^2)]}, \quad (2.7a)$$

$$\delta A(p^2)p^2 \frac{(2\pi)^4}{g^2} = \pi^2 \int_0^{p^2} dq^2 \delta A(q^2) \left[24 \frac{1}{4} + 11 \frac{q^2}{p^2} \right] + \pi^2 \int_{p^2}^{\infty} dq^2$$

(2.3)

$$\begin{aligned} & \times \delta A(q^2) \left(16 \frac{p^2}{q^2} + 21 \right) + \frac{8}{3} \int q^3 dq 4\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{q^2 + B^2(q^2)} (-\delta D(q^2)) \\ & \times \frac{q \cdot (q-p)}{(q-p)^2 + B^2[(q-p)^2]} + I(p), \end{aligned} \quad (2.7b)$$

均横向

其中

$$I(p) = \frac{8}{3} \int q^3 dq (4\pi) \int_0^\pi \sin^2 \theta \frac{\left[B((q-p)^2) - \left(1 - \frac{q-p}{q^2} \right) B(q^2) \right]}{\left[q^2 + B^2(q^2) \right] \left[(q-p)^2 + B^2((q-p)^2) \right]}.$$

用□算子作用(2.6)两端得 $B(p^2)$ 微分方程, 进一步由文献[3]和[4]中方法得渐近解:

(2.4a)

$$B(p^2) = \begin{cases} m_1 \left(\frac{p^2}{m_1^2} \right)^{-\frac{1}{2} - (\frac{1}{4} - \alpha)^{1/2}}, & (p^2 \gg m_1^2) \\ m_1 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \frac{p^2}{m_1^2} \right), & (p^2 \ll m_1^2). \end{cases} \quad (2.8)$$

2.4b)

式中 $\alpha = \frac{g^2}{4\pi^2}$ 为耦合常数, m_1 为手征对称性破缺产生的质量. 令 $p^2/m_1^2 = x, q^2/m_1^2 = y$.下面讨论 $\alpha > \frac{1}{4}$ 的情形. 将(2.8)变为无量纲方程:

$$B(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} - i\lambda, & (x \gg 1) \\ 1 - \frac{\alpha}{2} x, & (x \ll 1) \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 $\lambda = \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}}$. 下面运算中对 $B(x), \delta A(x)$ 和 $\delta D(x)$ 在 $x < 1$ 用 $x \ll 1$ 渐近解.

2.4c)

而对 $x > 1$ 用 $x \gg 1$ 渐近解. 此时方程(2.7)的无量纲形式变为:

程为

$$\begin{aligned} x \delta D(x) &= \frac{g^2}{3} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int dy y \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \left[6b \cos \theta + 2b^2 \frac{\cos^2 \theta - 1}{a - b \cos \theta} \right] \\ & \times \frac{\delta A(a - b \cos \theta)}{(a - b \cos \theta)(y + B^2(y))} \end{aligned} \quad (2.10a)$$

2.5)

)=
约最

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^4}{g^2} x \delta A(x) &= \pi^2 \int_0^x dy \delta A(y) \left[24 \frac{1}{4} + 11 \frac{y}{x} \right] + \pi^2 \int_x^\infty dy \delta A(y) \left(16 \frac{x}{y} + 21 \right) \\ & + \frac{8}{3} \int y dy (2\pi) \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{y + B^2(y)} \delta D(y) \frac{\left(\frac{b}{2} \cos \theta - y \right)}{(a - b \cos \theta) + B^2(a - b \cos \theta)} \\ & + 2(x) \end{aligned} \quad (2.10b)$$

2.6)

.7a)

$$I(x) = \frac{8}{3} \int y dy (2\pi) \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \frac{B(y) \left[B(a - b \cos \theta) - \left(1 - \sqrt{\frac{x}{y}} \cos \theta \right) B(y) \right]}{\left[y + B^2(y) \right] \left[a - b \cos \theta + B^2(a - b \cos \theta) \right]}$$

其中 $a = x + y, b = 2\sqrt{xy}$. (2.10) 仍讨论渐近解.(1) 首先讨论 $x \gg 1$ 时, 通过计算有:

$$I(x) \stackrel{x \gg 1}{\sim} \frac{4}{3} \pi^2 x^{-1} \left\{ \frac{1}{2i\lambda} + \int_0^1 dy y \frac{B^2(y)}{y + B^2(y)} \right\} + \frac{16}{3} \pi^2 x^{-1-2i\lambda} X$$

$$\times \left\{ \frac{1}{1-2i\lambda} + \frac{1}{2(1+2i\lambda)} + \frac{1}{4(2+2i\lambda)} + \frac{1}{8i\lambda} - \frac{1}{2(2+2i\lambda)} \right\} + O(x^{-\frac{5}{2}}), \quad (2.11)$$

$$\delta A(x) \stackrel{x \gg 1}{\sim} A x^{-2-2i\lambda}, \quad \delta D(x) \stackrel{x \gg 1}{\sim} D x^{-2-2i\lambda}, \quad (2.12)$$

将(2.11)和(2.12)代入(2.10), 经过较长的计算得:

$$\int_0^1 dy \delta A(y) + A \frac{1}{2i\lambda + 1} = 0 \quad (2.13a)$$

$$11 \left[\int_0^1 dy y \delta A(y) + \frac{A}{2i\lambda} \right] + \frac{4}{3} \left[\int_0^1 y dy \frac{-B^2(y) - y \delta D(y)}{y + B^2(y)} - \frac{D+1}{2i\lambda} \right] = 0 \quad (2.13b)$$

$$\frac{4A}{\alpha} = A \left[\frac{-5 + \frac{7}{4}}{1 + 2i\lambda} - \frac{11}{2i\lambda} + \frac{16}{2 + 2i\lambda} \right] + \frac{4}{3} D \left[\frac{1}{2i\lambda} - \frac{2}{1 + 2i\lambda} + \frac{1}{2 + 2i\lambda} \right]$$

$$+ \frac{16}{3} \left[\frac{1}{1 - 2i\lambda} + \frac{1}{2(1 + 2i\lambda)} + \frac{1}{4(2 + 2i\lambda)} + \frac{1}{8i\lambda} - \frac{1}{2(2 + 2i\lambda)} \right] \quad (2.13c)$$

$$D = \frac{\alpha}{3} (2 + 2i\lambda) A \left[\frac{7}{12} + \frac{3}{2} \frac{1}{2 + 2i\lambda} - \frac{1}{2} \frac{1}{3 + 2i\lambda} \right]. \quad (2.13d)$$

由(2.13c,d)可解出 A 和 D 为耦合常数 α 的函数.

(2) 再讨论 $x \ll 1$ 时, 通过计算有

$$I(x) \stackrel{x \ll 1}{\sim} \frac{8}{3} \pi^2 \int_0^1 y dy \frac{B(y)}{y + B^2(y)} \left[\frac{-\frac{\alpha}{2} x}{x + y + B^2(x+y)} \right] + \frac{8}{3} \pi^2 \int_1^\infty y dy$$

$$\times \int_1^\infty y dy \frac{B(y)}{y + B^2(y)} \left[(x+y)^{-\frac{1}{2}-i\lambda} - B(y) \left[\frac{1}{y} - \frac{x}{2y^2} \right] \right]$$

$$= 0(x) \quad (2.14)$$

$$\delta A(x) \stackrel{x \ll 1}{\sim} a_1 x + a_2 x^2, \quad \delta D(x) \stackrel{x \ll 1}{\sim} d_1 x + d_2 x^2, \quad (2.15)$$

将(2.14)和(2.15)代入(2.10), 利用 $1/(x + B^2(x)) \stackrel{x \ll 1}{\sim} 1 + \frac{\alpha}{2} x$, 和(2.13)式得

$$\int_0^1 y^2 \frac{dy}{[y + B^2(y)]^2} \delta D(y) + D \frac{1}{1 + 2i\lambda} = 0 \quad (2.16)$$

将(2.15)代入(2.13)和(2.16)得:

$$a_1 = -\frac{18A}{1 + 2i\lambda} - \frac{32}{11} \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{D+1}{2i\lambda} - \frac{\alpha}{10} d_1 - \frac{D}{1 + 2i\lambda} \right] + \frac{24A}{2i\lambda},$$

$$a_2 = \frac{24A}{2i\lambda + 1} + \frac{48}{11} \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{D+1}{2i\lambda} - \frac{\alpha}{10} d_1 - \frac{D}{1 + 2i\lambda} \right] - \frac{36}{2i\lambda} A,$$

$$d_2 = -\frac{5D}{1+2i\lambda} - d_1(\alpha + 5/4) \quad (2.17)$$

2.11)

d_1 为任意, 由物理的有效势应为实, 即从 $ImQ = 0$ 可导出 d_1 的虚部, 由

(2.11)

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{4}^+} Q = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{4}^-} Q$$

(2.12)

可导出 d_1 的实部。其中 A, D 由方程 (2.13c, d) 决定。由三中式可得

$$Re d_1 = \frac{1 - \sin(2\lambda \ln \lambda)}{2\lambda} \left[0.45 + \frac{11}{96\pi^2} \right] \frac{1}{0.55} \quad (2.18)$$

2.13a)

$\Lambda \rightarrow \infty$.

2.13b)

三、真空稳定性

在二中我们得到 $B(p^2) = 0$ 和 $B(p^2) \neq 0$ 分别对应手征对称性保持和破缺。从计算

$$Q = V[S, G; B \neq 0] - V[S_0, G_0; B = 0] \quad (3.1)$$

若 $Q < 0, B(p^2) \neq 0$ 的解使有效势 V 为极小, 手征对称性破缺。若 $Q > 0, B(p^2) = 0$ 的解使有效势 V 极小, 手征对称性仍然保持。令

2.13c)

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 \quad (3.2)$$

2.13d)

得:

$$Q_1 = -12 \int [dp_E] \left\{ \ln \frac{D(p^2)}{D_0(p^2)} + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{B^2(p^2)}{p^2 D^2(p^2)} \right) + \left[\frac{D(p^2)p^2}{D^2(p^2)p^2 + B^2(p^2)} - \frac{1}{D_0(p^2)} \right] \right\} \quad (3.3a)$$

$$Q_2 = 4 \int [dp_E] \left[-4 \ln \frac{A(p^2)}{A_0(p^2)} + 3(A(p^2) - A_0(p^2)) \right] \quad (3.3b)$$

$$Q_3 = -\frac{g^2 f^2}{4} \int [dp_E][dq_E] \left[7 - \frac{(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} \right] \frac{1}{p^2 q^2} [A(p^2)A(q^2) - A_0(p^2)A_0(q^2)] \quad (3.3c)$$

2.14)

2.15)

$$Q_4 = \frac{g^2 f^2}{2} \int [dp_E][dq_E] \left\{ -\frac{4(p \cdot q)^3}{p^2 q^2} + 4(p \cdot q) + 6q^2 - \frac{6(p \cdot q)^2}{p^2} + 2 \frac{[(p \cdot q)^2 - p^2 q^2]^2}{p^2 q^2 (p+q)^2} \right\}$$

2.16)

$$\times \frac{[A_0(p^2)A_0((p+q)^2)A_0(q^2) - A(p^2)A((p+q)^2)A(q^2)]}{p^2 q^2 (p+q)^2} \quad (3.3d)$$

$$Q_5 = -\frac{g^2}{2} \text{tr}(T^a T^a) \int [dp_E][dq_E] \left\{ \left(D(p^2)D(q^2) \left[4p \cdot q + \frac{8p \cdot (p-q)9 \cdot (p-q)}{(p-q)^2} \right] \right. \right.$$

$$\left. + 12B(p^2)B(q^2) \right) \frac{A[(p-q)^2]}{[D^2(p^2)p^2 + B^2(p^2)][D^2(q^2)q^2 + B^2(q^2)]} - A_0[(p-q)^2]$$

$$\times \frac{4p \cdot q + 8p \cdot (p-q)q \cdot (p-q)/(p-q)^2}{D_0(p^2)D_0(q^2)p^2 q^2 (p-q)^2} \left. \right\} \quad (3.3e)$$

$$Q_0 = -g^2 f \int [dp_E][dq_E] \frac{q^2 - \frac{(p \cdot q)^2}{p^2}}{p^2 q^2 (p - q)^2} [A(p^2) - A_0(p^2)] \quad (3.3f)$$

将 Q 化为无量纲形式,并用与二节一致的近似:

$$\begin{cases} \ln \frac{D(x)}{D_0(x)} \cong \ln(1 + \delta D(x)) \cong \delta D(x), \\ \ln \frac{A(x)}{A_0(x)} \cong \delta A(x), \\ \ln \left(1 + \frac{B^2(x)}{x}\right) = -\ln \left[1 - \frac{B^2(x)}{x + B^2(x)}\right] \cong \frac{B^2(x)}{x + B^2(x)}, \end{cases} \quad (3.4)$$

从而得出:

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^2 Q / m_1^4 = & -3 \int x dx \left[2\delta D(x) + \frac{x\delta D(x)}{x + B^2(x)} \right] \\ & + \int x dx \frac{B^2(x)}{x + B^2(x)} + \int dx \left(-\frac{8}{3}\right) x \delta A(x) \\ & - \frac{27}{32} \frac{\alpha}{\pi^2} \int dx dy 2\delta A(y) \\ & + \left(-\frac{\alpha}{8\pi^2}\right) \int dx dy \frac{1}{x^2 y} \{ [2xy - (x - y)^2](x + y) \\ & + |x - y|^3 \} \delta A(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

积分 $\int_0^A dx (A \rightarrow \infty)$ 在 $[0, 1]$ 区间内用(2.15), 在 $[1, A]$ 区间内用(2.12), 当 $A \rightarrow \infty$ 时 Q 为有限量,即

$$\begin{aligned} Q(2\pi)^2 / m_1^4 = & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} - \left(\frac{22}{99} - \frac{46\alpha}{4\pi^2 \times 99} \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{D_2}{2\lambda} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{10} \operatorname{Re} d_1 - \frac{D_1 + 2\lambda D_2}{1 + 4\lambda^2} \right] + \frac{11\alpha}{24\pi^2} \frac{A_1 + 2\lambda A_2}{1 + 4\lambda^2} \\ & - \left(-\frac{8}{3} + \frac{23\alpha}{24\pi^2} \right) \frac{A_2}{2\lambda} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{9}{5} \right) \operatorname{Re} d_1 + \frac{21}{2} \frac{D_1 + 2\lambda D_2}{1 + 4\lambda^2} \\ & + \frac{4\alpha}{4\pi^2} \frac{(1 - 4\lambda^2)}{(1 + 4\lambda^2)^2} + \frac{1}{2\lambda} \\ & \times \sqrt{\left(9D_2 + \frac{8}{3} A_2 \right)^2 + \left(1 - 9D_1 - \frac{8}{3} A_1 + \frac{11\alpha}{24\pi^2} \right)^2} \\ & \times \cos(\lambda \ln A + \varphi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $A = A_1 + iA_2, D = D_1 + iD_2$, 由(2.13c,d)决定 (A_1, A_2, D_1, D_2 均为实数), 并用 $A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \varphi)$. 如果选取:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \cos(\lambda \ln A + \varphi) = [-1, 0 + \varepsilon] \quad (\varepsilon > 0 \text{ 小量}) \quad (3.7)$$

那么 $\alpha_0 = \left[\frac{1}{4}, 2 \right]$, 当 $\alpha > \alpha_0$ 时, $Q < 0$. 如果选

$$(3.3f) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \cos(\lambda \ln A + \varphi) = (0 + \varepsilon, 1], \quad (\varepsilon > 0 \text{ 小量})$$

当 $\alpha > \alpha_0 = [56, 270]$ 时, $Q < 0$. 但由 $B(x) (x \ll 1)$ 近似解要求 α 越小, 结论越可靠. 所以 $\alpha_0 = \frac{1}{4}$ 为最好, 即 $\alpha > \frac{1}{4}$ 时, $Q < 0$ 手征对称性自发破缺.

下面讨论 $\alpha < \frac{1}{4}$ 时, Q 值的计算, 令 $\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$ 同 $\alpha > \frac{1}{4}$ 情况一样的计算得:

$$(3.4) \quad B(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}-\lambda} & (x \gg 1) \\ 1 - \frac{\alpha}{2} x & (x \ll 1) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\delta A(x) \stackrel{x \gg 1}{\approx} A x^{-2-2\lambda}, \quad \delta D(x) \stackrel{x \gg 1}{\approx} D x^{-2-2\lambda}. \quad (3.9)$$

$$\delta A(x) \stackrel{x \ll 1}{\approx} a_1' x + a_2' x^2, \quad \delta D(x) \stackrel{x \ll 1}{\approx} d_1' x + d_2' x^2. \quad (3.10)$$

$$(3.5) \quad Q(2\pi)^2/m_1^4 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} - \left(\frac{32}{99} - \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{46}{99} \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{D+1}{2\lambda} - \frac{\alpha}{10} d_1' - \frac{D}{1+2\lambda} \right] + \frac{11\alpha}{24\pi^2} \frac{A}{1+2\lambda} - \left(-\frac{8}{3} + \frac{23\alpha}{24\pi^2} \right) \frac{A_2}{2\lambda} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{9\alpha}{5} \right) d_1' + \frac{21}{21} \frac{D}{1+2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \left[-9D + 1 - \frac{8}{3} A + \frac{11\alpha}{24\pi^2} \right] + \frac{\alpha}{4\pi^2} \left(\frac{1}{1+2\lambda} \right)^2 \quad (3.11)$$

∞ 时 Q

其中 d_1' 由 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Q = 0$ 得出 $d_1' = 67 \times 8/66$. 而 D, A 满足 (2.13c, d) 式中

$$i\lambda \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} = \lambda$$

即可. 从 (3.11) 发现 $\alpha < \frac{1}{4}$ 时, $Q > 0$. 从而得到 $\alpha > \frac{1}{4}$ 手征对称性破缺, $\alpha < \frac{1}{4}$ 手征对称性保持.

四、夸克动力学质量的估计

从三中我们看到 $\alpha > \frac{1}{4}$ 时, 手征对称性发生了动力学自发破缺, 并使夸克产生了动力学质量 m_1 . 为了估计 m_1 的大小, 使用参考文献 [6] π 介子衰变常数 f_π 可用夸克传播子的自能项 $B(x)$ 的积分表为:

(3.6), 并用

$$(3.7) \quad f_\pi^2 = \frac{N}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \frac{x \left[B^2(x) - \frac{x}{2} \frac{dB(x)}{dx} B(x) \right]}{[x + B^2(x)]^2} \quad (4.1)$$

其中 x 为 Wick 转动后动量平方, $N = 3$ 是颜色自由度. 采用 H. Pagels 的动力学微扰论低阶近似, 将 $B(x)$ 的渐近解 (2.8) 代入 (4.1) 计算, 得出:

$$\begin{aligned}
 f_{\pi}^2 &= \frac{3m_1^2}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^1 du \frac{u \left(1 - \frac{\alpha}{2} u\right) \left(1 - \frac{\alpha}{4} u\right)}{\left[u + \left(1 - \frac{\alpha}{2} u\right)\right]^2} \right. \\
 &\quad \left. + \int_1^{\infty} du \frac{uu^{-\lambda-\frac{1}{2}} u^{-\lambda-\frac{1}{2}} (5/4 + \lambda/2)}{[u + u^{-1-2\lambda}]^2} \right\} \\
 &= \frac{3m_1^2}{(2\pi)^2} \left\{ -\frac{3\alpha}{4(1-\alpha)} + \frac{2+\alpha}{2(1-\alpha)^2} \ln(2-\alpha) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4-\alpha}{4(1-\alpha)^2(2-\alpha)} + \frac{5+2\lambda}{4(1+2\lambda)} \right\}. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

式中 $\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$, 取 $\alpha = \frac{1}{4}$ 时, 得到 u, d 夸克的动力学质量为:

$$m_1 = \frac{f_{\pi}}{0.33} = 280 \text{ MeV}, \quad (4.3)$$

其中 f_{π} 实验值为 93 MeV. 这和文献[6]中利用动力学微扰论估计出的 u, d 夸克的动力学质量 $m_D = 273 \text{ MeV}$ 很接近, 并和由 π 介子电磁形状因子 $-q^2 F_{\pi}(q^2)$ 的实验估计 $m_D = 300 \text{ MeV}$ 和由 e^+e^- 湮灭实验估计 $m_D = 244 \text{ MeV}$ 也接近.

需要指出的是, 文献[6]在利用公式(4.1)估计 m_b 值时, 系将 $B(x)$ 在大动量区域的渐近解形式直接外推到低动量区域, 而我们对 $B(x)$ 分别用大动量和低动量区域渐近解, 这样得出的估计值要合理些.

五、结 论

从上面的讨论看出, 利用推广的含复合算子的有效势和传播子的 D-S 方程, 我们可以讨论 QCD 中手征对称性动力学破缺问题. 并指出在 QCD 中当耦合常数超过某一临界值时, 的确存在手征对称性的自发破缺. 由于目前对传播子的 D-S 方程精确求解比较困难, 虽然在求解中采用了动力学微扰论近似, 并只讨论了传播子的 D-S 方程的渐近解, 但根据这些传播子的渐近解和求得的临界耦合常数值所计算出的夸克动力学质量, 和其它理论方法(包括重正化群方法和动力学微扰论), 以及实验方法所估计得夸克质量却很接近, 说明上述的计算和分析是合理的.

感谢吕晓夫同志参与对本工作有益讨论.

参 考 文 献

- [1] G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cimento*, 34(1964), 1790; S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.*, D7(1973), 1888.
- [2] R. Jackiw, *Phys. Rev.*, D9(1974), 1686.
- [3] J. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, *Phys. Rev.*, D10(1974), 2428.
- [4] R. W. Haymaker and J. Perez-Mercader, *Phys. Rev.*, D27(1983), 1353.
- [5] K. T. Mahanthappa and J. Randa, *Phys. Rev.*, D27 (1983), 2500.

[6]
[7]

E

sour
of fe
for t
break
ling
 $\alpha < 1$
and
quar
expe

- [6] H. Pagels and S. Stokar, *Phys. Rev.*, D20(1979), 2947.
 [7] Lay-Nam Chang, Ngee-Pong Chang, *Phys. Rev.*, D29(1984), 312.

EFFECTIVE-POTENTIAL STUDY OF DYNAMICAL CHIRAL SYMMETRY BREAKING IN QUANTUM CHROMODYNAMICS

ZHU CHAO-YUAN HU SHI-KE

(Sichuan University)

(4.2)

ABSTRACT

(4.3)

力学

 $m_D =$ 域的
近解,

们可

一临

比较

丘解,

和其

却很

Starting from the QCD lagrangian with massless fermions and using the bilinear external sources, we derive the effective potential as a functional of composite operators, i.e., functional of fermion propagator and gluon propagator, and then derive the Dyson-Schwinger equation for the propagators. There exist two sets of solution, the chiral-symmetry solution and chiral-breaking solution. By studying the asymptotic solution of equation, we find that for the coupling constant beyond a critical value ($\alpha=1/4$), a chiral-breaking solution is found, while for $\alpha < 1/4$ the chiral-symmetry conserves. Using the asymptotic behavior of the quark self-energy and the experimental value for π ion decay constant f_π , we estimate the dynamical generated quark mass value, which is in agreement with the values obtained from other theoretical and experimental methods. Significance of the results are discussed.