第 11 卷 第 4 期　　高能物理与核物理　　Vol. 11, No. 4
1987 年 7 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 1987

k 能级 Lipkin 模型的玻色子表示[1)]

杨亚天　　杨 溢
（兰 州 大 学）

徐 躬 耦
（兰州大学、南京大学）

摘　　要

本文用相干态方法给出了费米子系统 k 能级 Lipkin 模型的玻色子表示，这个方法不仅适用于和 $S_p(2k)$ 群相应的 Lipkin 模型，也适用于和其它半单李群相应的可解模型．本文特别指出了模（Norm）算子是相应的动力学群和它的最大稳定子群的 Casimir 算子的函数．

一、引　　言

反映核子、核子对和核子集团集体激发的原子核的集体运动具有整数角动量的性质，可以用玻色变量来描述．事实上 Bohr 和 Mottelson[1] 很早就曾用四极声子模型来描述原子核的四极振荡，法兰克福学派[2]进一步发展了这个模型．嗣后又有人提出了截止的四极声子模型[3,4]，认为原子核的集体运动在一定的近似下可用 $SU(6)$ 李代数来描述．与此同时玻色子展开技术[5]也得到了迅速的发展．近十年来，Arima、Iachello 等人[6]提出了互作用玻色子模型（IBM），非常成功地解释了原子核的低激发能谱，更引起了人们对研究费米子系统的玻色子表示问题的兴趣，以图从微观上理解该模型的理论基础．

本文仅讨论一个简单的可解模型，它可以严格地进行处理，这将有助于对上述问题的探索．由于本文讨论的是可以用半单李群来描述的可解模型，所以我们用 Gilmore 和冯达旋[7]所发展起来的相干态理论来严格地处理．Dobaczewski[8] 曾讨论过类似的问题，但他并没有从物理上讨论过 $S_p(2k)$ 群所对应的集体运动，也没有给出相应的 Holstein-Primakoff 表示(以后简称 H-P 表示)．为此，我们必须首先简单回顾一下相干态理论，在此基础上再给出 k-能级 Lipkin 模型的 Dyson 表示和 H-P 表示．作为一个应用，具体讨论了 $S_p(4)$ 模型，它和 Klein 等人[9]所给出的结果完全一致．最后指出模（Norm）算子是大群和它的最大稳定子群的 Casimir 算子的函数这一重要和普遍的性质．

---

1) 本课题为中国科学院自然科学基金支持项目．
本文 1985 年 7 月 10 日收到．

二、相干态的玻色子表示

如果一组费米子算子形成封闭的李代数,而哈密顿量只包含这一组算子,我们就称用这种近似的哈密顿量所描述的模型为可解模型. 这些算子可写为 Cartan 的标准形式

$$[H_i,\ H_j]=0,\ i,j=1,2,\cdots,k, \tag{2.1a}$$

$$[H_i,E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha,\ i=1,\cdots,k, \tag{2.1b}$$

$$[E_\alpha,\ E_\beta]=\begin{cases}N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}, & \text{若 } \alpha+\beta \text{ 是根}\\ 0, & \text{若 } \alpha+\beta \text{ 不是根}\end{cases} \tag{2.1c}$$

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=\alpha^i H_i, \tag{2.1d}$$

其中 $\alpha\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 称为根向量.

我们用 $|j,\nu\rangle$ 来表示该李群某一不可约子空间的完备基矢, j 是标记这一不可约表示的一组量子数$(j_1,\cdots j_k)$, ν 表示标记该完备基所需要的其它量子数. 我们再用$|j,\mathrm{ext}\rangle$ 表示不可约表示 j 的极态 (extremum state), 如最高权态或最低权态, 则其余的状态均可由阶梯算子 $E_{-\alpha}$ 或 E_α 相继作用在极态上而得到. 这样得到的是该不可约表示的分立完备基.

另一方面我们也可以利用相干态[7]构成同一不可约子空间.

对于任一半单李群 $\mathbf{G}$ 都存在着一个最大稳定子群 $\mathbf{H}$, 其群元 h 作用到极态上除多出一个相因子外,不改变极态.

$$h|j,\mathrm{ext}\rangle=|j,\mathrm{ext}\rangle e^{i\varphi(h)},\ h\in\mathbf{H} \tag{2.2}$$

$\mathbf{H}$ 的生成元由 $H_i(i=1,\cdots,k)$ 和满足条件 $(\alpha,j)=0$ 的阶梯算子 E_α 组成[8]. 任意群元 g 可表为[7]

$$g=\Omega h,\ g\in\mathbf{G}, \tag{2.3}$$
$$h\in\mathbf{H},\ \Omega\in\mathbf{G}/\mathbf{H}.$$

不可约表示 j 的荷载空间可由群元 g 作用在 $|j,\mathrm{ext}\rangle$ 上生成.

$$\begin{aligned}g|j,\mathrm{ext}\rangle&=\Omega h|j,\mathrm{ext}\rangle=\Omega|j,\mathrm{ext}\rangle e^{i\varphi(h)}\\&=|j,\Omega\rangle e^{i\varphi(h)},\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中

$$|j,\Omega\rangle\equiv\Omega|j,\mathrm{ext}\rangle \tag{2.5}$$

称为相干态. 略去对计算矩阵元无关紧要的相因子, 不可约表示 j 的荷载空间可由 $|j,\Omega\rangle$ 来表述.

一般,Ω 可写为

$$\Omega=\exp\left[\sum_{(\alpha,j)>0}(D_\alpha E_\alpha+D_{-\alpha}E_{-\alpha})\right], \tag{2.6}$$

$D_\alpha,D_{-\alpha}$ 是复的群参量.

若把最低权态 $|j,\min\rangle$ 选作极态,则由于

$$E_{-\alpha}|j,\min\rangle=0,\ (\alpha,j)>0 \tag{2.7}$$

可将(2.6)式分解[8],并略去相因子而将(2.5)写为

$$|j,\{C_\alpha\}\rangle=\exp\left[\sqrt{2}\sum_{(\alpha,j)>0}C_\alpha E_\alpha\right]|j,\min\rangle, \tag{2.8}$$

其中群参数 C_α 在无界流形中取值．这就是不可约子空间的连续变量表示，或连续基表示．这种基是不正交归一的过完备基．由于以下的讨论只限于某一特定的不可约表示，故可将(2.8)式中的 j 略去，而写成

$$\left.\begin{aligned}&|\{C_\alpha\}\rangle=\exp\left[\sqrt{2}\sum_{(\alpha,j)>0}C_\alpha E_\alpha\right]|\phi_0\rangle\\&|\phi_0\rangle\equiv|j,\min\rangle\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

于是在这一不可约子空间中的任意状态 $|\Psi\rangle$ 可写为[4]

$$|\Psi\rangle=\int d\tau\exp\left[\sqrt{2}\sum_{(\alpha,j)>0}C_\alpha E_\alpha\right]|\phi_0\rangle f(\{C_\alpha\}) \tag{2.10}$$

或[4]

$$|\Psi\rangle=U|F), \tag{2.11}$$

$$U\equiv(0|\exp\left[\sum_{(\alpha,j)>0}b_\alpha E_\alpha\right]|\phi_0\rangle, \tag{2.12}$$

$$|0)\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^K\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{(\alpha,j)>0}C_\alpha^*C_\alpha\right], \tag{2.13}$$

$$|F)\equiv F(\{b_\alpha^+\})|0), \tag{2.14}$$

$$b_\alpha\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(C_\alpha^*+\frac{\partial}{\partial C_\alpha}\right),\quad b_\alpha^+\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(C_\alpha-\frac{\partial}{\partial C_\alpha^*}\right) \tag{2.15}$$

这里 U 就是 Usui 算子，b 和 b^+ 满足玻色子算子的对易关系，

$$[b_\alpha,b_{\alpha'}^+]=\delta_{\alpha,\alpha'}, \tag{2.16}$$

且有

$$b_\alpha|0)=0, \tag{2.17}$$

所以 $|0)$ 可解释为玻色子的真空态，b 和 b^+ 是消灭和产生玻色子的算子．以上这些就是大家所熟知的玻色子展开公式，它给出了从费米子态 $|\Psi\rangle$ 到玻色子态 $|F)$ 的变换关系．但问题在于有一些玻色子态 $|F_u)$，它满足

$$U|F_u)=0, \tag{2.18}$$

在费米子空间没有物理对应，是非物理态，在计算时需加以排除．

以上我们得出了状态的对应．下面讨论算子的对应．我们定义与费米子空间的算子相对应的玻色子空间的算子的 Dyson 表示 $\mathscr{G}^{(D)}$ 为：

$$U^+GU=\mathscr{G}^{(D)}U^+U=\mathscr{G}^{(D)}\mathscr{N} \tag{2.19}$$

其中 $\mathscr{N}$ 是模 (Norm) 算子

$$\mathscr{N}\equiv U^+U. \tag{2.20}$$

由(2.18)，我们有

$$\mathscr{N}|F_u)=0,\text{ 或 }(F_u|\mathscr{N}=0 \tag{2.21}$$

可引入一个物理态的投影算子 $\mathscr{P}$，而把 $\mathscr{N}$ 写为

$$\mathscr{N}=\mathscr{N}_0\mathscr{P}=\mathscr{P}\mathscr{N}_0, \tag{2.22}$$

态，存在着 $\mathscr{N}_0^{-1}$ 和 $\mathscr{N}_0^{\pm\frac{1}{2}}$．我们可以定义玻色子算子的 H-P 表示

$$\mathscr{G}^{(HP)}=\mathscr{N}_0^{-\frac{1}{2}}\mathscr{G}^{(D)}\mathscr{N}_0^{\frac{1}{2}} \tag{2.23}$$

由(2.19)和(2.23)式易证G的对易关系对$\mathscr{G}^{(D)}$和$\mathscr{G}^{(HP)}$来说都保持.

若 $G\to\mathscr{G}^{(D)}$, $G^+\to(\mathscr{G}^+)^{(D)}$, 由(2.19)可知

$$\mathscr{N}_0(\mathscr{G}^{(D)})^+=(\mathscr{G}^+)^{(D)}\mathscr{N}_0 \tag{2.24}$$

或

$$(\mathscr{G}^{(D)})^+=\mathscr{N}_0^{-1}(\mathscr{G}^+)^{(D)}\mathscr{N}_0, \tag{2.25}$$

一般来说

$$[(\hat{\mathscr{G}}^{(D)})^+,\mathscr{N}_0]\neq 0,\quad (\mathscr{G}^{(D)})^+\neq(\mathscr{G}^+)^{(D)} \tag{2.26}$$

但对 H-P 表示可证

$$(\mathscr{G}^+)^{(HP)}=(\mathscr{G}^{(HP)})^+. \tag{2.27}$$

这样,在费米子空间的厄米算子(如哈密顿量等)一般来说其 Dyson 表示并不厄米,而其 H-P 表示仍是厄米的.因此,在 Dyson 表示中需要考虑双正交基,而在 H-P 表示中仍有通常的正交基.但不论在哪个表示中都必须计算模算子$\mathscr{N}$,由此可以看出计算$\mathscr{N}$的重要性.

三、k能级 Lipkin 模型的 Dyson 表示

这是双能级 Lipkin 模型到k能级的一个简单推广.在这个模型里,设核子的单粒子能级是k条等间隔、等简并度的能级,能级间隔均为ε,每一条能级的角动量都是J,简并度为

$$\Omega=2J+1, \tag{3.1}$$

并假定核子间只存在单极力和单极对力的相互作用.这一模型虽然不能反映真实核的情况(如能级的等间隔、等简并度不能反映实际的壳结构,另有单极力和单极对力而没有包括四极对力和很重要的四极力反映不出能量随角动量的变化关系),但它在一定程度上还是模拟了粒子-空穴激发(虽然只有单极的)与对激发之间相互竞争和制约的关系,也模拟了壳结构中多能级的复杂性,并由于该模型具有 $S_P(2k)$ 动力学对称性,可以进行严格地处理,毫无近似地显示出费米子系统中集体自由度和玻色子的对应关系,这一方法也适用于具有其他动力学对称群(李群)的费米子系统,有一定的普遍意义,所以我们在这里对它进行较详细的论述.

我们用 $a_{pM}^+(a_{pM})$ 表示产生(消灭)第p个能级上角动量投影为M(因角动量都是J,可略去不写)的核子的算子,它们满足反对易关系:

$$\{a_{pM},a_{p'M'}^+\}=\delta_{pp'}\delta_{MM'}, \tag{3.2}$$

考虑如下的产生单极对的算子 A_{pq}^+ 和产生集体单极激发的算子 B_{pq}^+:

$$A_{pq}^+=\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{pq}}}\sum_M a_{pM}^+a_{qM}^+, \tag{3.3}$$

$$B_{pq}^+=\sum_M\left(a_{pM}^+a_{qM}-\frac{1}{2}\delta_{pq}\right)=E_{pq}^+-\frac{1}{2}\Omega\delta_{pq}, \tag{3.4}$$

其中

$$a^{+}_{p\bar{M}} \equiv (-)^{J+M} a_{p,-M}, \tag{3.5}$$

$$E^{+}_{pq} \equiv \sum_{M} a^{+}_{pM} a_{qM}. \tag{3.6}$$

显然

$$A^{+}_{pq} = A^{+}_{qp}, \quad B^{+}_{pq} = B_{qp} \tag{3.7}$$

它们满足如下的对易关系

$$[A_{rs}, A^{+}_{pq}] = -[(1+\delta_{pq})(1+\delta_{rs})]^{-1/2}\{\delta_{rp}B^{+}_{qs} + \delta_{sp}B^{+}_{qr} + \delta_{rq}B^{+}_{ps} + \delta_{sq}B^{+}_{pr}\}, \tag{3.8}$$

$$[B^{+}_{pq}, A_{rs}] = -(1+\delta_{rs})^{-1/2}\{\delta_{rp}(1+\delta_{sq})^{1/2}A_{qs} + \delta_{sp}(1+\delta_{rq})^{1/2}A_{rq}\}, \tag{3.9}$$

$$[B^{+}_{pq}, B^{+}_{rs}] = \delta_{qr}B^{+}_{ps} - \delta_{ps}B^{+}_{rq}. \tag{3.10}$$

$A^{+}_{pq}, A_{pq}; B^{+}_{pq}, B_{pq}$（或 E^{+}_{pq}，E_{pq}）形成李代数，和标准形式比较可看出

$$\begin{array}{ll} B^{+}_{ii}\ (\text{或}\ E^{+}_{ii})\ i = 1, 2, \cdots, k & \text{相应于}\ H_i \\ B^{+}_{pq}\ (B_{qp})\ p \neq q & \text{相应于}\ E_\alpha, E_{-\alpha},\ \alpha = e_p - e_q \\ A^{+}_{rs},\ A_{rs},\ r \neq s & \text{相应于}\ E_\alpha, E_{-\alpha},\ \alpha = e_r + e_s \\ A^{+}_{rr},\ A_{rr}, & \text{相应于}\ E_\alpha, E_{-\alpha}, \alpha = 2e_r \end{array} \tag{3.11}$$

这里

$$(e_r, e_s) = \delta_{rs},$$

这是一个 $S_p(2k)$ 代数，其中的 $B^{+}_{pq}(B_{pq})$ 则形成一个 $U(k)$ 子代数．在这一模型中哈密顿量可写为

$$\begin{aligned} H = &\sum_{p=1}^{k} p\varepsilon E^{+}_{pp} - \sum_{p,q} \mu_{pq}E^{+}_{pq} \sum_{rs} \mu_{rs}E_{rs} \\ &- \frac{1}{2}\left(\sum_{p,q} K_{pq}E^{+}_{pq} \sum_{rs} K_{rs}E^{+}_{rs} + h \cdot c\right) \\ &- \sum_{pq} \lambda_{pq}A^{+}_{pq} \sum_{rs} \lambda_{rs}A_{rs}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中第一项是单粒子能量，第二、三项是单极-单极力，第四项是单极对力．其动力学群包含有总核子数不变的 $U(1)$ 子群．

若仅考虑偶偶核的激发谱，这相当于取

$$j = \left(\frac{\Omega}{2}, \cdots, \frac{\Omega}{2}\right),$$

则可取核子真空态为极态

$$|\phi_0\rangle = |\min\rangle = |0\rangle, \tag{3.13}$$

因为 $\alpha = e_p + e_q$ 和 $\alpha = 2e_p$ 满足 $(\alpha, j) > 0$ 的条件故由(2.11)—(2.16)式，我们有

$$|\Psi\rangle = U|F), \quad U = (0|\exp\left[\sum_{p\leqslant q} b_{pq}A^{+}_{pq}\right]|0\rangle \tag{3.14}$$

其中 $b_{pq}(b^{+}_{pq})$ 是代表单极对的玻色子的消灭(产生)算子．由于(3.7)，我们有

$$b_{pq} = b_{qp}, \tag{3.15}$$

$$[b_{pq}, b^{+}_{rs}] = (1+\delta_{pq})^{-1}(\delta_{pr}\delta_{qs} + \delta_{ps}\delta_{qr}). \tag{3.16}$$

过简单运算我们求出 A 和 B 相应的 Dyson 表示为

$$\mathscr{A}^{(D)}_{pq} = b_{pq}, \tag{3.17}$$

$$\mathscr{A}^{+(D)}_{pq} = \Omega b^{+}_{pq} - (1+\delta_{pq})^{-1/2} \sum_{sl} [(1+\delta_{ps})(1+\delta_{ql})(1+\delta_{ls})]^{\frac{1}{2}} b^{+}_{ps} b^{+}_{ql} b_{sl}, \tag{3.18}$$

$$B^{+(D)}_{pq}(=B^{(D)}_{qp}) = \sum_{s} [(1+\delta_{sq})(1+\delta_{sp})]^{\frac{1}{2}} b^{+}_{ps} b_{qs} - \frac{\Omega}{2}\delta_{pq}, \tag{3.19}$$

$$\varepsilon^{+(D)}_{pq}(=\varepsilon^{(D)}_{qp}) = \sum_{s} [(1+\delta_{sq})(1+\delta_{sp})]^{\frac{1}{2}} b^{+}_{ps} b_{qs}. \tag{3.20}$$

这里我们要指出

$$B^{+(D)}_{pq} = B^{(D)}_{qp} = (B^{(D)}_{pq})^{+}, \tag{3.21}$$

它恰好是满足条件 $(\alpha \cdot j) = 0$ 的那些 E_α 与 H_i 构成的最大稳定子群 $U(k)$ 的生成元. 而

$$(\mathscr{A}^{+}_{pq})^{(D)} \neq (\mathscr{A}^{(D)}_{pq})^{+}. \tag{3.22}$$

四、k 能级 Lipkin 模型的 H-P 表示

为此需先求 $\mathscr{N}_0$,由(2.24)式我们知道

若 $$(\mathscr{G}^{(D)})^{+} = (\mathscr{G}^{+})^{(D)},\ 则\ [\mathscr{N}_0, \mathscr{G}^{+(D)}] = 0 \tag{4.1}$$

因此由(3.21)式我们有

$$[B^{+(D)}_{pq}, \mathscr{N}_0] = 0. \tag{4.2}$$

因为 $B^{+(D)}_{pq}$ 是子群 $U(k)$ 的任一生成元,所以 $\mathscr{N}_0$ 只能是 $U(k)$ 和 $S_p(2k)$ 群的 Casimir 算子的函数. 对 $S_p(2k)$ 的某一确定的不可约表示,它的 Casimir 算子可以用量子数 j 来代替. 于是 $\mathscr{N}_0$ 可写为

$$\mathscr{N}_0 = \mathscr{N}_0(j; C_1, C_2, \cdots C_k), \tag{4.3}$$

其中 C_i 是由算子 $B^{+(D)}_{pq}$ (或 $\varepsilon^{+(D)}_{pq}$) 所构成的 $U(k)$ 子代数的 i 阶 Casimir 算子. 如

$$C_1 = \sum_{s=1}^{k} \varepsilon^{+(D)}_{ss} = 2\sum_{i \leqslant l} b^{+}_{il} b_{il} \equiv 2\hat{n}, \tag{4.4}$$

它是玻色子数 n 的两倍,而相应的费米子算子

$$\sum_{i=1}^{k} E_{ii} = \sum_{i,M} a^{+}_{iM} a_{iM} \equiv \hat{n}_F \tag{4.5}$$

是总核子数算子 $\hat{n}_F$. n_F 确定必然导致 n 确定.

$U(k)$ 子群的不可约表示可以用一组配分数 $[f]$ (或杨图)来标记. 若用 $|[f]m)$ 表示该不可约表示的完备基,其中 m 是在 $[f]$ 表示中标记一组完备基所需要的全部量子数,则因 $\mathscr{N}_0$ 是 $U(k)$ 的 Casimir 算子的函数, $|[f]m)$ 一定是 $\mathscr{N}_0$ 的本征函数,本征值为 $\mathscr{N}_0(j;[f])$ 和 m 无关. 由于

$$C_1|[f]m) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^{+(D)}_{ii}|[f]m) = \sum_{i=1}^{k} f_i|[f]m), \tag{4.6}$$

结合(4.4)得到：

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 2n, \tag{4.7}$$

n 是总玻色子数．由于一个玻色子的状态属于表示[2]，而且[11]

$$[f_1, f_2, \cdots, f_k] \otimes [2] = \sum_i \oplus [f_1, \cdots, f_i + 2, \cdots f_k], \tag{4.8}$$

其中⊗和⊕表示直积和直和，所以我们可以用

$$\lambda_i = \frac{1}{2} f_i \tag{4.9}$$

来代替 f_i 去标记 $U(k)$ 的不可约表示

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k, \\ \sum \lambda_i = n. \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

定义算子 $\mathscr{D}$ 为

$$\mathscr{D} = \frac{1}{4} C_2 - \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{k-1}{2}\right) C_1, \tag{4.11}$$

其中 C_1 由(4.4)式给出，C_2 为

$$C_2 = \sum_{rl} \varepsilon_{rl}^{+(D)} \varepsilon_{rl}^{(D)}, \tag{4.12}$$

则有

$$\begin{aligned} \mathscr{D}([\lambda]) &\equiv ([\lambda]m|\mathscr{D}|[\lambda]m') \\ &= \delta_{mm'}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i^2 + \frac{k+1-2i}{2}\lambda_i\right)\right. \\ &\quad \left. -\left(\Omega + \frac{k-1}{2}\right) n\right\}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

于是(3.18)可变为

$$\mathscr{A}_{pq}^{+(D)} = b_{pq}^{+} - [\mathscr{D}, b_{pq}^{+}]. \tag{4.14}$$

由(2.24)，(3.17)和(4.14)得

$$\mathscr{N}_0 b_{pq}^{+} = \{b_{pq}^{+} - [\mathscr{D}, b_{pq}^{+}]\}\mathscr{N}_0. \tag{4.15}$$

计算上式的矩阵元，并注意到 $\mathscr{N}_0, \mathscr{D}$ 只是 $U(k)$ 的 Casimir 算子的函数，故有

$$\begin{aligned} &\mathscr{N}_0([\lambda])([\lambda']m'|b_{pq}^{+}|[\lambda]m) \\ &= \{1 - \mathscr{D}([\lambda']) + \mathscr{D}([\lambda])\}\mathscr{N}_0([\lambda])([\lambda']m'|b_{pq}^{+}|[\lambda]m). \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$([\lambda']m'|b_{pq}^{+}|[\lambda]m) \neq 0 \tag{4.17}$$

件下，我们得到

$$\mathscr{N}_0([\lambda']) = \{1 - \mathscr{D}([\lambda']) + \mathscr{D}([\lambda])\}\mathscr{N}_0([\lambda]), \tag{4.18}$$

由 Littlewood 规则[12]可知，满足(4.17)的条件是

$$[\lambda'] = [\lambda] \otimes [1], \tag{4.19}$$

于是(4.18)变为

$$\mathscr{N}_0(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_{i-1},\lambda_i+1,\cdots,\lambda_k)$$
$$=\{1-\mathscr{D}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_i+1,\cdots,\lambda_k)$$
$$+\mathscr{D}(\lambda_1,\cdots\lambda_{i-1},\lambda_i,\cdots\lambda_k)\}\mathscr{N}_0(\lambda_1,\cdots\lambda_k), \tag{4.20}$$

再考虑到(4.13),上式化为

$$\mathscr{N}_0(\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_i+1,\lambda_{i+1},\cdots\lambda_k)$$
$$=(\Omega-2\lambda_i+i-1)\mathscr{N}_0(\lambda_1,\cdots,\lambda_k). \tag{4.21}$$

注意到

$$\mathscr{N}_0([0])=(0|\mathscr{N}_0|0)=(0|U^+U|0)=1, \tag{4.22}$$

我们由(4.21)的递推关系可直接求得

$$\mathscr{N}_0([\lambda])=\prod_{i=1}^{k}\frac{(\Omega+i-1)!!}{(\Omega-2\lambda_i+i-1)!!}. \tag{4.23}$$

有了 $\mathscr{N}_0$ 的表达式后,即可求出 H-P 表示:

$$\mathscr{A}_{pq}^{+(HP)}=\mathscr{N}_0^{-\frac{1}{2}}\mathscr{A}_{pq}^{+(D)}\mathscr{N}_0^{\frac{1}{2}}. \tag{4.24}$$

计算上式矩阵元得到

$$([\lambda']m'|\mathscr{A}_{pq}^{+(HP)}|[\lambda]m)=(\Omega-i+2\lambda_i-1)^{1/2}([\lambda']m'|b_{pq}^+|[\lambda]m),$$

或写成算子形式

$$\mathscr{A}_{pq}^{+(HP)}=\sum_{i=1}^{k}[\hat{\lambda}_i,b_{pq}^+]\,Y_i([\hat{\lambda}]), \tag{4.25}$$

其中算子 $\hat{\lambda}_i$ 定义为

$$\hat{\lambda}_i|[\lambda]m)=\lambda_i|[\lambda]m), \tag{4.26}$$
$$Y_i([\hat{\lambda}])=(\Omega+i-2\hat{\lambda}_i-1)^{1/2}, \tag{4.27}$$

于是我们有

$$\mathscr{A}_{pq}^{+(HP)}=\sum_{i=1}^{k}[\hat{\lambda}_i,b_{pq}^+](\Omega+i-2\hat{\lambda}_i-1)^{1/2}, \tag{4.28}$$

$$\mathscr{A}_{pq}^{(HP)}=\sum_{i=1}^{k}(\Omega+i-2\hat{\lambda}_i-1)^{1/2}[b_{pq},\hat{\lambda}_i], \tag{4.29}$$

$$B_{pq}^{+(HP)}=\sum_{s=1}^{k}[(1+\delta_{ps})(1+\delta_{qs})]^{1/2}b_{ps}^+b_{qs}$$
$$-\frac{\Omega}{2}\delta_{pq}=B_{pq}^{+(D)}. \tag{4.30}$$

这样我们就得到了 k 能级 Lipkin 模型的全部 H-P 表示

五、$\mathscr{N}_0$ 的一般性质

我们对 k 能级的 Lipkin 模型证明了 $\mathscr{N}_0$ 是 $S_p(2k)$ 群及其最大稳定子群 $U(k)$ 的 Casimir 算子的函数。 或其本征值是 i 和 λ 的函数。本节我们将指出对可解模型来说这

一性质是普遍的，即 $\mathscr{N}_0$ 是动力学群及其最大稳定子群的 Casimir 算子的函数．下面我们来证明这一点．

设作用在费米子空间的群 G 的生成元可写成(2.1)的标准形式，Usui 算子为

$$U = (0|\exp\left[\sum_{(\alpha,j)>0} \hat{b}_\alpha E_\alpha\right]|\phi_0\rangle, \tag{5.1}$$

这里 $|\phi_0\rangle$ 是在费米子空间里不可约表示 j 的最低权态．它具有如下性质：

$$E_\alpha|\phi_0\rangle = 0, \qquad \text{当 } (\alpha,j) \leqslant 0 \text{ 时} \tag{5.2a}$$

$$E_\alpha|\phi_0\rangle \neq 0, \qquad \text{当 } (\alpha,j) > 0 \text{ 时} \tag{5.2b}$$

由(6.1)，

$$U^+ = \langle\phi_0|\exp\left[\sum_{(\beta,j)>0} b_\beta^+ E_{-\beta}\right]|0), \tag{5.3}$$

这里用了费米子算子的如下性质

$$E_\beta^+ = E_{-\beta}. \tag{5.4}$$

利用公式

$$e^C X e^{-C} = X + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} [C,[C,[\cdots[C,X]\cdots]]]_m \tag{5.5}$$

以及(2.19)和(6.2)，很容易求出 E_α, $E_{-\alpha}$, H_i 的 Dyson 表示分别为

$$\varepsilon_\alpha^{(D)}|_{(\alpha,j)=0} = \sum_{(\beta,j)>0} \mathscr{N}_{-\beta,\alpha} b_\beta^+ b_{\beta-\alpha}, \tag{5.6}$$

$$\varepsilon_{-\alpha}^{(D)}|_{(\alpha,j)=0} = \sum_{(\beta,j)>0} \mathscr{N}_{-\beta,-\alpha} b_\beta^+ b_{\beta+\alpha}, \tag{5.7}$$

$$\mathscr{H}_i^{(D)} = \sum_{(\beta,j)>0} \beta_i b_\beta^+ b_\beta, \quad i = 1,2,\cdots k \tag{5.8}$$

显然 $\mathscr{H}_i^{(D)}$ 是厄米算子

$$(\mathscr{H}_i^{(D)})^+ = \mathscr{H}_i^{(D)}. \tag{5.9}$$

再利用结构常数 $\mathscr{N}_{\alpha,\beta}$ 的性质，易证

$$(\varepsilon_{-\alpha}^{(D)}|_{(\alpha,j)=0})^+ = \varepsilon_\alpha^{(D)}|_{(\alpha,j)=0}. \tag{5.10}$$

(6.9)和(6.10)告诉我们，最大稳定子群的生成元的 Dyson 表示保持费米子空间原有的共轭关系，根据(2.24)式，它可以和 $\mathscr{N}_0$ 互易，于是推出 $\mathscr{N}_0$ 是大群 $G^{(D)}$ 和最大稳定子群 $H^{(D)}$ 的 Casimir 算子的函数，或 $\mathscr{N}_0$ 的本征值是 j 和标记最大稳定子群的不可约表示的量子数 λ 的函数．这一性质对于计算 $\mathscr{N}_0$ 是有帮助的．

对冯达旋教授的有益讨论表示感谢．

参　考　文　献

[1] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear structure*, (W. A. Benjamin Inc. 1975).
[2] J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Nuclear Models*, (North Holland, Amsterdam 1970).
[3] D. Jenssen, R. V. Jolos and F. Donau, *Nucl. Phys.*, **A224**(1974), 93.
[4] Xu Gong-ou, *Nucl. Phys.*, **A421**(1984), 275c.
[5] P. Ring and P. Schuck, The nuclear many body problem (Springer Verlag, 1980), Chapter 9.
[6] A. Arima and F. Iachllo, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 1069; *Ann. of Phys.* (N. Y.), **99**(1976), 253; **111**

(1978), 201; **123**(1979), 468.

[7] R. Gilmore and D. H. Feng, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **9**(1983), 479, R. Gilmore, Lie groups, Lie algebras and some of their applications, (Wiley, New York, 1974).

[8] J. Dobaczewski, *Nucl. Phys.*, **A369**(1982), 213, 237, **A380**(1982), 1.

[9] A. Klein, T. D. Cohen and C. T. Li, *Ann. of Phys.* (*N. Y.*), **141**(1982), 382;
A. Klein, H. Rafelski and J. Rafelski, *Nucl. Phys.*, **A355**(1981), 189;
T. D. Cohen and A. Klein, *Nucl. Phys.*, **A390**(1982), 1.

[10] Xu Gong-ou and Li Fuli, *Commun. in Theor. Phys.* (Beijing, China), **4**(1985), 39.

[11] J. Deenen and C. Quesne, *J. Math. Phys.*, **23**(1982), 878; 2004.

[12] D. E. Littlewood, The theory of group characters, (Oxford University Press, Oxford 1950).

[13] 万哲先，李代数，(科学出版社，1978 年).

BOSON REPRESENTATION OF THE k-LEVEL LIPKIN MODEL

YANG YA-TIAN YANG YI

(*Lanzhou University*)

XU GONG-OU

(*Lanzhou University, Nanjing University*)

ABSTRACT

The boson representation of k-level Lipkin model for a fermion system was given by using the theory of coherent states. The method discussed in this paper can be used not only for the k-level Lipkin model corresponding to S_p $(2k)$ group, but also for other solvable model corresponding to other semisimple Lie groups. It was pointed out that the norm operator is a function of the Casimir operators of dynamical group and its maximum stationary subgroup.