第 11 卷 第 5 期 高能物理与核物理 Vol. 11, No. 5
1987 年 9 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1987

内部空间局部乘积结构和杂弦作用量的一些性质

高洪波 孙翼
(中国科学技术大学，合肥)

摘 要

本文研究由 (p, q) 型超对称 σ-模型描写的杂弦作用量，模型包含 2 秩反对称张量场 (Wess-Zumino-Witten 项). 利用内部空间的局部乘积结构讨论了 W-Z-W 项的量子化及其在杂弦模型中的意义.

一、引 言

在二维世界面上，(p, q) 型的超对称 γ-模型给出杂化弦 (heterotic string) 的很好描述. 对于 $(1, 0)$ 型，可导出反常消除条件为[1]：

$$\delta b_{ij} = \frac{1}{4\pi}[\mathrm{tr}(A_{[i}M_{,j]}) - \mathrm{tr}(\omega_{[i}A_{,j]})], \tag{1}$$

这跟 Green, Schwarz[2] 从 10 维超弦中导出的反常消除条件相符(在那里，$\delta b_{ij} = 0$，即无挠率). 对于 $(2, 0)$ 型，非零的挠率使得内部空间不再是 Kähler 的，因而通常的 Alvarez-Gaume-Freedman[3] 判据不再成立，但此时标量超场具有一种手征不变性：

$$\delta\phi^i = J^i_j\phi^j, \tag{2}$$

J^i_j 是变换矩阵. 要求(2)给出的超场分量同样具有超对称变换性质将导致 J^i_j 满足

$$J^i_jJ^j_k = -\delta^i_k. \tag{3}$$

这意味着 ϕ^i 所定义的内部空间具有殆复结构 (almost complex structure)，而对于有挠联络，该殆复结构是协变常量. 可以证明，每给定一个变换(2)，就对应一个新的(世界面)超对称，而 $N \geqslant 2$ 的 σ-模型内部空间一般是厄米型 (hermitian) 的. 典型的例子是 $N = 2, 4$，此时由复结构及可积条件可导出殆乘积结构 (almost product structure)[4]，该空间称为局部乘积空间. 一类超对称 σ-模型中的局部乘积空间几何在文献[5]中有详细讨论.

本文研究由带挠率的非线性 σ-模型刻划的杂弦理论[1]，着重讨论内部空间局部乘积结构对杂弦作用量的影响. 尤其是 Wess-Zumino-Witten 项的量子化及其后果. 在第二节中介绍有关 W-Z-W 项. 亦即二秩反对称张量场与时空坐标的耦合项的一些已知事实和在杂弦模型中的地位；第三节引进必要的数学并对复结构跟乘积结构之间的关系作

本文 1986 年 5 月 27 日收到.

一讨论；第四节导出量子化条件以及讨论它在杂弦理论包括定域规范化二维超引力方案中的意义；最后是结论.

二、Wess-Zumino-Witten 项

我们定义所谓 W-Z-W 项为超对称非线性 σ-模型拉氏量中含挠率 b_{ij} 的项. 例如，在杂化超弦的 Ramond-Neven-Schwarz 形式中，有效非线性 σ-模型作用量除了有一般无质量场量外，还包含弦坐标 $\phi^i(\sigma)$ 和右运动 (right-moving) 费米子场 $\psi_A(\sigma)$. 净作用量可表成下式：

$$
\begin{aligned}
I = \int d^2\sigma \Big[& g_{ij}(\phi)\partial_\alpha\phi^i\partial_\beta\phi^j h^{\alpha\beta} \\
& + b_{ij}(\phi)\partial_\alpha\phi^i\partial_\beta\phi^j\varepsilon^{\alpha\beta} \\
& + \bar{\lambda}_i\left(\frac{1+\bar{\rho}}{2}\right)\rho^\alpha(g^{ij}\partial_\alpha + \partial_\alpha\phi^k\omega_k^{ij})\lambda_j \\
& + \bar{\psi}_A\left(\frac{1-\bar{\rho}}{2}\right)\rho^\alpha(\delta^{AB}\partial_\alpha + \partial_\alpha\phi^k A_k^{AB})\psi_B \\
& + F_{ijAB}\bar{\lambda}^i\lambda^j\bar{\psi}^A\psi^B\Big].
\end{aligned} \tag{4}
$$

上式中 $h^{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ 分别是世界面上的度规张量和 Levi-Civita 张量，$\alpha, \beta = 1, 2$；而 ρ^α 是二维 Γ 矩阵，$\rho = \bar{\rho}_0\rho_1$；$\lambda^A$ 是无质量 Gravitino；F_{ijAB} 为 Yang-Mills 场强.

(4)中含 $b_{ij}(\phi)$ 的项严格地说应该包括 Lorentz 联络 ω_k^{ij} 中的挠率部分，但为简单起见，我们仅考虑无费米子耦合的全反对称场相互作用拉氏量：

$$
\Delta I = \int d^2\sigma b_{ij}(\phi)\partial_\alpha\phi^i\partial_\beta\phi^j\varepsilon^{\alpha\beta}. \tag{5}
$$

不难看出，ΔI 在如下规范变换下不变：

$$
\delta b_{ij} = \partial_i\Lambda_j - \partial_j\Lambda_i. \tag{6}
$$

这提示人们注意到(5)式与点粒子电磁耦合作用量的类比，即 $I_{EM} = \int d\tau A_\mu(\tau)\frac{dx^\mu}{d\tau}$，所不同的是电磁场强是阿贝尔的 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，而在我们这里 b_{ij} 的场强 3-形式允许容纳整体规范不变量. 例如无反常条件要求[6]：

$$
dH = \mathrm{Tr}R\wedge R - \frac{1}{30}\mathrm{Tr}F\wedge F \tag{7}
$$

因此，即使 $dH = 0$，$H = db +$ 联络项，也可以是上式的解，只要适当填充规范群表示.

由于H有这样的自由度，我们原则上能够从 b 的作用量中得出很多拓扑不变的信息来，例如在 $M^{10} = M^4 \times K$ 的情况下，如果第一 Betti 数 $b_1(K) \neq 0$，则存在规范不变的 Wilson 圈，它在对称性破缺中起着重要作用[7]；如果 $b_2(K) \neq 0$，有 b_{ij} 的调和(harmonic) 2-形式的 Fourier 展开，其分数刻划轴子耦合 (axions)、真空畴壁 (Gomain Wall) 等[8]. 进一步，如果 $b_3(K) \neq 0$，则有所谓的拓扑量子化效应出现，这是种类似于 Witten[9] 考虑 Skyrme 模型时的量子化效应，在弦理论的框架内它使得我们有可能对相当低能情况下的

弦运动背景作细致考察，包括非微扰效应.

本文目的之一是给出 W-Z-W 项的另一种量子化机制. 有别于上面指出的"拓扑"量子化 ($b_3 \neq 0$)，我们试图提供一个较为普遍的量子化条件，它仅仅依赖于模型的几何性质，而放松了对流形上的拓扑性质的限制，有时这种限制是很难满足的.

三、内部空间的局部乘积结构

我们仍在 (p, q) 型的杂弦 σ-模型内考虑问题. 在上节中我们已经看到，该模型包含实标量场，$\phi^i(\sigma)$，它们是弦世界面到时空中的映射集合，可视为标量流形 M^d 上的一组坐标，λ^i 为其超伙伴 (Super-Partner)、ψ_A 是右手 Majorana-Weyl 旋量，该模型的一个特点是物理场的 Bose 自由度和 Fermi 自由度可以不等，因为 ψ_A 的实标量辅助场是不传播的. 这正是它称为杂弦的原因.

模型的左手和右手超荷分别记为 $Q^I, Q^{I'}, I = 1, \cdots, p, I' = 1, \cdots, q$，它们服从如下的反对易关系:

$$\{Q^I_+, Q^J_+\} = 2\delta^{IJ}P_+, \{Q^{I'}_-, Q^{J'}_-\} = 2\delta^{I'J'}P_- \ \{Q^I_+, Q^{J'}_-\} = 0. \tag{8}$$

上节的作用量是对一个左手超荷写下的，按照一般规则[1]，如果 M^d 是偶数维的，总可以在其上施加一个手征变换 $\delta\lambda^i = J^i_j\lambda^j$，如果作用量具有此对称性，易证存在一个附加的超对称变换使作用量保持不变:

$$\delta\phi^i = \varepsilon J^i_j\lambda^j, \ \delta(J^i_j\lambda^j) = -i\varepsilon\partial_+\phi^i. \tag{9}$$

如此，我们从 (1, 0) 型得到 (2, 0) 型的超对称杂弦. 有趣的是该 (2, 0) 型超对称在反对易关系 (8) 下自然导出 M^d 上的(殆)复结构. 对于取值于复流形的非线性 σ-模型，已有许多文献作过详尽的研究. 在这里不打算再作介绍. 我们要进一步给出的是具有多于一个超荷情形下的新结果. 注意到作用量(4)可写成更紧凑的超场形式:

$$I = -i\int d^2x d\theta[g_{ij}(\Phi) + b_{ij}(\Phi)]D\Phi^i D\Phi^j \tag{10}$$

$$+\text{右手旋量超场部分}.$$

上式中实标量超场 $\Phi(X^\mu, \theta) = \phi(x^\mu) + \theta\lambda(x^\mu)$. 考虑 Φ 的另一类超对称变换:

$$\begin{aligned}\delta_\eta\Phi^i &= (\eta^\alpha D_\alpha\Phi^j)f^i_j(\Phi) + (\eta^\alpha(\gamma_5 D)_\alpha\Phi^j)\underline{f}^i_j(\Phi) \\ &= -i(\eta_+ D_-\Phi^j)f^i_{+j} + i(\eta_- D_+\Phi^j)f^i_{-j}.\end{aligned} \tag{11}$$

作用量 (10)在(11) 下的不变性导致两种互不等价的殆复结构,

$$f^i_{\pm j} = \underline{f}^i_j + f^i_j \tag{12}$$

这里

$$f^i_j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \underline{f}^i_j = \begin{pmatrix} -i\gamma_5 & 0 \\ 0 & i\gamma_5 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

从超代数 (8). 易证

$$f^i_{\pm j}f^j_{\pm k} = -\delta^i_k \tag{14a}$$

$$N^k_{\pm ij} \equiv f^l_{\pm i}f^k_{\pm[j,l]} - f^l_{\pm j}f^k_{\pm[i,l]} = 0 \tag{14b}$$

(14b)是殆复结构的可积条件，因此 $f^i_{\pm j}$ 是 M^d 上的复结构. 另一个显见的事实是复结构

保挠率：

$$T_{ijk}=\frac{1}{2}T_{lm[i}f^{l}_{\pm j}f^{m}_{\pm k]}. \tag{15}$$

进一步若 $f_{\pm}$ 相互对易

$$f^{k}_{+i}f^{j}_{-k}-f^{k}_{-i}f^{j}_{+k}=0 \tag{16}$$

则可引入 $\pi^{j}_{i}\equiv-f^{k}_{+i}f^{j}_{-k}$，易见它满足

$$\pi^{k}_{i}\pi^{j}_{k}=\delta^{j}_{i}. \tag{17}$$

这样的张量称为殆乘积结构．由(14b)可导出 π 的类似可积条件

$$\pi^{l}_{j}\pi^{k}_{[i,l]}-\pi^{l}_{i}\pi^{k}_{[j,l]}=0 \tag{18}$$

(18)式使得我们能够用 $\pi^{j}_{i}=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{II} & 0\\ \hline 0 & -\mathrm{II}\end{array}\right)$ 来将度规(分块)对角化：

$$g_{ij}=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & g_{p\bar{q}} & & \\ g_{\bar{p}q} & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 0 & g_{\mu\bar{\nu}} \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & g_{\bar{\mu}\nu} & 0 \end{array}\right) \tag{19}$$

从几何上看，这个对角化的度规自然给出黎曼联络以及切向量场的分解．这种由 π^{j}_{i} 诱导的切空间分解在数学上叫做局部乘积空间[4]．此时尽管流形不再是 Kähler 的，但存在类似的势函数满足二阶微分方程

$$\left.\begin{aligned} g_{p\bar{q}}&=\partial_{p}\bar{\partial}_{\bar{q}}K(\Phi^{p},\bar{\Phi}^{\bar{q}};\Phi^{\mu},\bar{\Phi}_{\bar{\nu}})\\ g_{\mu\bar{\nu}}&=-\partial_{\mu}\bar{\partial}_{\bar{\nu}}K(\Phi^{p},\bar{\Phi}^{\bar{q}};\Phi^{\mu},\bar{\Phi}_{\bar{\nu}}).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

原则上所有超场多重态都可以从上面的方程解出，但在这里我们不感兴趣该模型的任何动力学问题．我们注意到由于空间是局部乘积的，因此类似于(19)，挠率也同样有唯一的分解式，它的分量间存在一种隐含的对称性，使得厄米流形的子流形在投影 $\frac{1}{2}(\delta^{j}_{i}\pm\pi^{j}_{i})$ 下是 Kähler 的．这是一个很好的对称性，因为它与 π 联合作用，可使挠率(模 2π)为零(故而 Kähler)．下节将指出它实际上是切空间上的 $SL(2,R)$ 的非紧子群，而它的直接效果是使 W-Z-W 项量子化．

四、量子化和杂弦作用量

本节中我们寻找一种类似于文献[9]中的量子化方案．不失一般性，我们用 Stokes 公式将(5)式表为 $\Sigma^{3}=[0,1]\times S$ 上的 3-秩反对称张量的积分：

$$\Delta I=i\int_{\Sigma^{3}}d^{2}\sigma dx\,\varepsilon^{abc}\partial_{a}\phi^{i}\partial_{b}\phi^{j}\partial_{c}\phi^{k}T_{ijk}. \tag{21}$$

这里挠率张量 T_{ijk} 形式上是 2-秩反对称张量 b_{ij} 的场强：

$$T_{ijk}=\frac{1}{2}(b_{ij,k}+b_{jk,i}+b_{ki,j}). \tag{22}$$

我们已经知道，象(21)式表示的积分在 ϕ^{i} 标量流形 M^{d} 的第三 Betti 数非零时，是拓

扑不变量(密度),即有

$$\exp(i\Delta I)=1\Rightarrow\Delta I=0(\bmod 2\pi). \tag{23}$$

若 $b_3=n$,则有 n 个互不等价的 (23) 的解,或者说, $\Delta I=2\pi n$, 此即量子化的实质. 如果我们不作 $b_3(M^d)\neq 0$ 的拓扑假设,则要想导出量子化条件就必须证明 (i)$\Delta I=0$, (ii) 存在单参数解簇. 这两件事我们可以归结于寻找 M^d 切空间上的线性变换使得其上的整 3-形式不变. 换句话说, $T(M^d)$ 上的一阶上同调群非平庸

$$\dim H^1(T(M^d))\neq 0. \tag{24}$$

注意到在乘积结构下, $T(M)$ 上的非零向量张成 $SL(N,R)$, N 为超荷数;在 $N=2$ 时,有两个分离子群: $U(1)\times U(1)$ 和 $SO(1,1)$ 分别对应于 $f_\pm$ 和 π. 问题化为找 $T(M)$ 上的 $SO(1,1)$ 变换使 T_{ijk} 保持不变.

首先,厄米型 (hermitian) 流形上的线性仿射联络在切空间上具有如下性质: 它的挠率对于复结构是"纯的" (pure[10]), 即是说(以下略去 T_{ijk} 的下标):

$$T(JX,Y)=T(X,JY) \tag{25}$$

这里 $X,Y\in T(M)$, J 是 M 上的(殆)复结构. 如果存在一个切矢量空间的变换 f, 它与 J 的联合作用使得:

$$\delta_{J\circ f}T=0, \tag{26}$$

则 f 就是我们要找的变换. 我们曾指出,在以乘积结构对超场作分解时,存在着一种隐含的对称性,它保证 M 的 $(\mathrm{II}\pm\pi)$ 投影子流形是 Kähler 的. 这使得我们可以构造如下的(单参数)变换:

$$f=\pi\circ\tilde{J}\equiv J^*, \tag{27}$$

这里 π 是(殆)乘积结构, $\tilde{J}$ 是 J 的共轭,而 J^* 定义成与 J 互不等价的(殆)复结构.

有了(27)式和(25)式,我们很容易证明(26)式. 取切空间上任意两点 X, Y, 对它们同时作用上复结构,由(25)式可得

$$\begin{aligned}T(-X,JY)&=T(J\circ(JX),JY)\\&=T(JX,J\circ(JY))=T(JX,-Y),\end{aligned} \tag{28}$$

同时由(27)可知

$$J\circ f(X)=-X,\quad J\circ f(Y)=-Y. \tag{29}$$

(28)式与(29)式直接可得(26)式.

我们已经看到,在局部乘积结构下,我们能够导出 Wess-Zumino-Witten 项的量子化,而原先的拓扑假设在一定程度上可以解除. 这一点有着唯象学上的重要意义[11], 因为在 Calabi-Yau 紧化中, $H=db$, $dH=0$, 而反常方程 $\mathrm{tr}\,R\wedge R=\frac{1}{30}\mathrm{Tr}F\wedge F$ 只存在平凡解,即 $\dim H^1(T(M))=0$, 这对如何嵌入自旋联络限制很强. 这里我们找到的变换显然具有非平凡上同调 $H^1(T(M))$ (即存在从 2-形式 b_{ij} 到其场强 3-形式的非单值映射, 不同的 T_{ijk} 期待值刻划物理不等价真空).

值得注意的是,诚如在通常量子化程序中, $\alpha\int\Sigma_{TOP}=2\pi\cdot n$ (n 为整数)意味着 $\alpha/2\pi$ 是 $\int\Sigma_{TOP}$ 的单位荷, W-Z-W 项也有一个类似的量子化荷. 它出现在 $N=1$ 定域超引力

耦合于 (1, 0) 和 (2, 0) 型 σ-模型的拉氏量中[12]. 容易验证，该 W-Z-W 荷是一 Grassmannian 数，即为费米荷，这一点无疑有助于理解文献[13]给出的 Liouville 模与 Virasoro 代数中心荷的关系.

五、结　论

在本文中，我们讨论了一种具有局部乘积结构的杂弦超对称 σ-模型. 针对带挠率的 (1, 0) 和 (2, 0) 型杂弦作用量. 利用局部乘积空间的几何性质. 对 Wess-Zumino-Witten 项的量子化及其后果作了初步探讨. 我们只涉及了 3-秩反对称张量场的不变性质，而对其存在性所满足的条件 ($b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$) 未加讨论，原因是拓扑的限制并不影响我们在 σ-模型框架内给出的结论. 我们期待着这些及其它更深入的问题能在今后得到解决.

附注　在本文投稿后，我们看到 R. Rohm 和 E. Witten 的 Princeton 预印本 (1986) "The Antisymmetric Tensor Field in String Theory"，该文提出了有关 W-Z-W 项量子化的许多新观点，有些与本文结果类似.

参　考　文　献

[1] C. M. Hull and E. Witten, *Phys. Lett.*, **160B**(1985), 398.
C. M. Hull, *Nucl. Phys.*, **B267**(1986), 266.
[2] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.*, **149B**(1984), 117.
[3] L. Alvarez-Gaumé and D. Z. Freedman, *Comm. Math. Phys.*, **80**(1981), 443.
[4] K. Yano, Differential Geometry on Complex and Almost Complex Space (Pergamon Oxford 1965).
[5] S. J. Gates, C. M. Hull and M. Rocek, *Nucl. Phys.*, **B248**(1984), 157.
[6] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B256**(1985), 46.
[7] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B258**(1985), 75.
[8] E. Witten, *Phys. Lett.*, **149B**(1984), 351.
[9] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223**(1983), 422.
[10] S. Kobayashi and K. Nomizu Foundations of Differential Geometry, Vol. I, II (Interscience Publishers, New York 1969).
[11] J. Ellis et al., CERN preprints (1986).
[12] E. Bergshoeff, E. Sezgin and H. Nishino, *Phys. Lett.*, **166B**(1986), 141.
[13] S. Jain, R. Shankar and S. R. Wadia, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 2713.

THE LOCALLY PRODUCT STRUCTURE OF INTERNAL SPACE AND SOME OF THE PROPERTIES IN HETEROTIC STRING ACTION

GAO HONG-BO　　SUN YI

(University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

This paper is devoted to a study of the heterotic string action described by a (p, q)-type supersymmetric σ-model involving a two-rank antisymmetric tensor field (Wess-Zumino-Witten term). We discussed a certain quantization procedure of W-Z-W term and its impact on heterotic string by using the locally product structure of internal compact space.