第12卷 第2期 1988年3月 高能物理与核物理 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Vol. 12, No. 2 Mar., 1988

非厄密平均场的动态描述
——一个简化模型之例

徐躬耦
（南京大学　兰州大学）

摘　　要

本文把原子核的集体运动考虑为核子在其中运动的非厄密平均场的变化，给出了相应的集体运动哈密顿量.

原子核集体运动所描绘的是与平均场变化相应的核内核子协同的运动. 通常考虑绝热的与时间有关的HF近似来给出平均场运动的哈密顿量，然后再把它量子化. 更完善的处理是在不同平均场的态 $|\phi(\alpha)\rangle$ 所生成的子空间内直接求解. 这里 $|\phi(\alpha)\rangle$ 是一个过完备的非正交系，因此带来了过完备性的解除和哈密量表示的非厄密性问题，需要对这两类问题加以讨论.

对于表述线性空间中的任意态矢而言，一组完备的基矢是充分而必要的. 就一组过完备系来说，它们并不完全独立. 但可以从中挑出一组完备的彼此独立的态矢作为基矢系. 为此考虑下述本征方程，

$$\int \langle\phi(\alpha)|\phi(\beta)\rangle g_n(\beta) d\tau(\beta) = \lambda_n g_n(\alpha). \tag{1}$$

由于 $\langle\phi(\alpha)|\phi(\beta)\rangle$ 的厄密性，本征值 λ_n 是实的，本征函数 $g_n(\alpha)$ 构成一个正交系. 由于 $\langle\phi(\alpha)|\phi(\beta)\rangle$ 的正定性，$\lambda_n \geqslant 0$. 相应于 $\lambda_n = 0$，上式实际上表示 $|\phi(\alpha)\rangle$ 之间的线性相关性. 仅

$$|\varphi_n\rangle = \int |\phi(\alpha)\rangle g_n(\alpha) d\tau(\alpha), \quad \lambda_n \neq 0. \tag{2}$$

是线性独立的，而且对于费密子态矢空间来说是完备的，

$$1 = \sum_{n(\lambda_n \neq 0)} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|. \tag{2a}$$

为了保持函数空间与费密子态矢空间之间的一、一对应的关系，必须引入投影算子

$$(\alpha|\mathscr{P}|\beta) = \sum_{n(\lambda_n \neq 0)} g_n^*(\alpha) g_n(\beta), \tag{2b}$$

并在投影后的函数空间 $(\alpha|\mathscr{P}f)$ 内求解. 这样，过完备性就得到解除. 而且由于 $\mathscr{P}f$ 与 $(1-\mathscr{P})f$ 不会发生耦合，在 $\mathscr{P}f$ 空间内求解就像在全空间内求解一样[1].

正交性不是关键问题. 而且由于非正交系所具有的灵活性，还可能带来某些好处.

本文 1986 年 5 月 26 日收到.

采用非正交系，哈密顿量的矩阵表示不再是厄密的．因此，在某些情况下有可能给出三角形矩阵．众所周知，三角形矩阵的本征问题很容易解出．

采用非正交系来构成 Slater 行列式，一般情况下得到非厄密的自洽场，只在特定情况下才给出厄密的自洽场．所以，从变分原理的角度看，非厄密自洽场有可能给出更好的结果．

根据以上分析，可选非厄密平均场中的态 $|\phi(\alpha)\rangle$ 来生成所需的集体态子空间．任意集体态可表为

$$|\Psi\rangle=\int|\phi(\alpha)\rangle\mathscr{P}f(\alpha)d\tau(\alpha). \tag{3}$$

由于引入了投影算子 $\mathscr{P}$，$|\Psi\rangle$ 与 $\mathscr{P}f(\alpha)$ 一、一对应，而且对于非厄密平均场而言，连续变量 α 的变化范围一般不受限制．

对 Schrödinger 方程左乘以 $\langle\phi(\alpha)|$，得到

$$\langle\phi(\alpha)|H|\Psi\rangle-E\langle\phi(\alpha)|\Psi\rangle=0. \tag{4}$$

用下述方程定义算子 $\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ 及 $\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$，[1)]

$$\int\langle\phi(\alpha)|\phi(\beta)\rangle\mathscr{P}f(\beta)d\tau(\beta)=\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{P}f(\alpha),$$

$$\left(\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right)^{+}=\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right), \tag{5}$$

$$\int\langle\phi(\alpha)|H|\phi(\beta)\rangle\mathscr{P}f(\beta)d\tau(\beta)=\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{P}f(\alpha),$$

$$\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)=\left(\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right)^{+}$$
$$=\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{+} \tag{6}$$

则(4)式可化为

$$\left[\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)-E\right]\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{P}f(\alpha)=0, \tag{7}$$

或

$$\left[\left(\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right)^{+}-E\right]\mathscr{P}f(\alpha)=0. \tag{8}$$

上述方程组的本征解 $\mathscr{N}\mathscr{P}f_m(\alpha)$ 与 $\mathscr{P}f_m(\alpha)$ 构成一双正交系，

$$\int\mathscr{P}f_m^*(\alpha)\cdot\mathscr{N}\mathscr{P}f_n(\alpha)d\tau(\alpha)=\delta_{mn} \tag{9}$$

经过投影后的函数空间中的完备性条件则可写为

$$\sum_m\mathscr{N}\mathscr{P}f_m(\alpha')\cdot\mathscr{P}f_m^*(\alpha)=(\alpha|\mathscr{P}|\alpha'). \tag{10}$$

如果直接从线性齐次方程(7)及(8)式求出 $\mathscr{N}\mathscr{P}f_m(\alpha)$ 及 $\mathscr{P}f_m(\alpha)$，则归一化条件

1) 算子的这种连续变量表示通常称为 Dyson 表示，本文只讨论 Dyson 表示，故不加标记．

中出现一种不确定性．对 $\mathscr{N}\mathscr{D}f_m(\alpha)$ 乘以 C_m 而对 $\mathscr{D}f_m^*(\alpha)$ 乘以 $1/C_m$，上述归一化条件和完备性条件保持不变．

对任意厄密算子 G 可和(6)式一样，定义它的连续变量表示，

$$\langle\phi(\alpha)|G|\Psi\rangle=\mathscr{S}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\langle\phi(\alpha)|\Psi\rangle=\mathscr{S}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{D}f(\alpha)$$
$$=\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(\mathscr{S}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right)^+\mathscr{D}f(\alpha). \tag{11}$$

相应的平均值为

$$\langle\Psi_n|G|\Psi_n\rangle=\int\mathscr{D}f_n^*(\alpha)\,\mathscr{S}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{N}\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mathscr{D}f_n(\alpha)d\tau(\alpha), \tag{12}$$

相应的约化跃迁几率为

$$|\langle\Psi_m|G|\Psi_n\rangle|^2=\langle\Psi_m|G|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|G^+|\Psi_m\rangle$$
$$=\int\mathscr{D}f_m\mathscr{S}\mathscr{N}\mathscr{D}f_nd\tau\cdot\int\mathscr{D}f_n^*\mathscr{S}^+\mathscr{N}\mathscr{D}f_md\tau \tag{13}$$

可见归一化中所遇到的不确定性对这些可观测量的计算结果并不产生影响(参阅[2])．

设 $|\phi(\alpha)\rangle$ 表示系统的具有确定单粒子组态的态矢．由于单粒子态的非正交性，相应的平均场不是厄密的．所有单粒子态均与参数 α 有关，参数 α 反映了平均场的性质．所有单粒子态随 α 变化而协同变化时，相应地非厄密平均场亦随之变化，这就是原子核的集体运动．

现在因采用非正交系，等效哈密顿量 $\mathscr{H}$ 不厄密．这一点并不影响它所表示的问题的本质．直接求解方程(7)、(8)可给出原子核的集体运动，但有时为了作出直观的物理解释或求出一些近似解，需要区分动能与势能，就要通过变换使非厄密的等效哈密顿量厄密化．

可试找一种厄密的 v 变换使 $\mathscr{H}$ 厄密化[1)]，

$$v^{-1}\mathscr{H}v=v(\mathscr{H})^+v^{-1}, \tag{14}$$

或

$$v^{-2}\mathscr{H}v^2=(\mathscr{H})^+, \tag{15}$$

则(7)及(8)式化为

$$[(v^{-1}\mathscr{H}v)-E]v^{-1}\mathscr{N}\mathscr{D}f=0, \tag{16}$$

及

$$[(v(\mathscr{H})^+v^{-1})-E]v\mathscr{D}f=0. \tag{17}$$

它们具有完全相同的形式，故 $v^{-1}\mathscr{N}\mathscr{D}f$ 及 $v\mathscr{D}f$ 至多只差一个相乘的因子．考虑到归一化中的不确定性，可逐使

$$v^{-1}\mathscr{N}\mathscr{D}f=v\mathscr{D}f=F. \tag{18}$$

于是 Schrödinger 方程的本征解构成一正交系．此时，力学量 G 的平均值和约化跃迁几率可表为

$$\langle\Psi_n|G|\Psi_n\rangle=\int F_n^*v^{-1}\mathscr{S}vF_nd\tau, \tag{19}$$

1) 这里我们没有要求这种变换使所有厄密算子的连续变量表示厄密化，所以变换后的连续变量表示仍是 Dyson 表示．

$$|\langle\Psi_m|G|\Psi_n\rangle|^2=\left|\int F_m v^{-1}\mathscr{S} v F_n d\tau\right|^2. \tag{20}$$

现在可把(16)或(17)式作为由连续变量 α 表征的非厄密平均场的动力学方程，它决定了体系的由这种非厄密平均场的变化来描述的集体运动.

兹以一个简单的双能级单极力模型为例来说明这种处理方法. 模型的哈密顿量为

$$H=\frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_m a^{+}_{m+}a_{m+}-\sum_m a^{+}_{m-}a_{m-}\right)-\frac{K}{2}\left(\sum_m a^{+}_{m+}a_{m-}+\sum_m a^{+}_{m-}a_{m+}\right)^2. \tag{21}$$

其中算子

$$\begin{cases} K^{+}=\sum\limits_m a^{+}_{m+}a_{m-} & K=\sum\limits_m a^{+}_{m-}a_{m+} \\ N_{+}=\sum\limits_m a^{+}_{m+}a_{m+} & N_{-}=\sum\limits_m a^{+}_{m}-a_{m-} \end{cases} \tag{22}$$

构成 $U(2)$代数，算子 K^+，K，及 $\frac{1}{2}(N_{+}-N_{-})$ 则构成 $SU(2)$子代数.

设有 $(\Omega+n)$ 个粒子，它的一个状态为

$$|\phi_0\rangle=a^{+}_{m_1+}a^{+}_{m_2+}\cdots a^{+}_{m_n+}\prod_m a^{+}_{m-}|0\rangle, \tag{23}$$

因为

$$\frac{1}{2}(N_{+}-N_{-})|\phi_0\rangle=-\frac{1}{2}(\Omega-n)|\phi_0\rangle, \tag{24}$$

$$K|\phi_0\rangle=0, \tag{25}$$

故可用过完备的非正交系

$$|\phi(\alpha)\rangle=\exp[\alpha(K^{+}+K)]|\phi_0\rangle. \tag{26}$$

来表述相应的不可约表示空间中的任意态矢，

$$|\Psi\rangle=\int|\phi(\alpha)\rangle\mathscr{P}f(\alpha)d\tau(\alpha). \tag{27}$$

这里 $|\phi(\alpha)\rangle$ 可理解为在非厄密平均场中运动的单粒子态所构成的 Slater 行列式，α 的变化范围不受限制.

注意到(24)、(25)式并利用关系

$$\frac{d}{d\alpha}\langle\phi(\alpha)|\Psi\rangle=\langle\phi(\alpha)|(K^{+}+K)|\Psi\rangle, \tag{28}$$

可根据(6)式的定义求得哈密顿量的连续变量表示，

$$\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{d}{d\alpha}\right)=-\frac{\varepsilon(\Omega-n)}{2}\cos\mathrm{h}\,2\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\sin\mathrm{h}\,2\alpha\frac{d}{d\alpha}-\frac{K}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}. \tag{29}$$

为了使 $\mathscr{H}\left(\alpha,\frac{d}{d\alpha}\right)$ 厄密化，可按(14)式作变换，取

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\alpha}=\frac{\varepsilon}{2K}\sin\mathrm{h}\,2\alpha \tag{30}$$

得到

$$v^{-1}\mathscr{H}v = -\frac{K}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2} + \left[-\frac{\varepsilon}{2}(\Omega - n + 1)\cosh 2\alpha + \frac{\varepsilon^2}{8K}\sinh^2 2\alpha\right]. \tag{31}$$

这是表为非厄密平均场变化的集体运动哈密顿量．其中第一项是正定的，表示集体运动动能1)，第二项表示集体运动势能．势函数中的参量 $\frac{2K(\Omega-n+1)}{\varepsilon}$ 决定了势函数的特征．$\frac{2K(\Omega-n+1)}{\varepsilon}<1$ 时，势能极小值位于 $\alpha=0$ 处；$\frac{2K(\Omega-n+1)}{\varepsilon}>1$ 时，势能极小值位于 $\alpha \neq 0$ 处．以上两种情况相应于两种不同的相．

用(31)式解出的结果与直接对(21)式用数值法来解给出的结果[3]完全一致．

综上所述，选用在不同非厄密平均场中运动的单粒子态所构成的 Slater 行列式作为过完备非正交基，可以得到表为非厄密平均场变化的集体运动哈密顿量．本文只具体讨论了一个非常简单的例子，但从这一个例子看到了一条研究原子核集体运动的有希望的途径．

参 考 文 献

[1] 徐躬耦，高能物理与核物理，**7**(1983)，510.
Chinese Physics, **4**(1984), 94.

[2] C.T.Li, *Phys. Lett.*, **120B**(1983), 251.
K. Takada, *Nucl. Phys.*, **A439**(1985), 489.

[3] Xu Gong-ou (徐躬耦), Li Fu-Li (李福利), *Comm. Theor. Phys.*, **4**(1985), 39.

DYNAMIC DESCRIPTION OF THE NON-HERMITIAN MEAN FIELD ILLUSTRATED WITH A SCHEMATIC MODEL

Xu Gongou

(Nanjing University, Lanzhou University)

Abstract

The nuclear collective motion is described as the variation of the non-hermitian mean field, and the corresponding collective hamiltonian is obtained.

1) 如 $K<0$，应使 α 在虚轴上变化．