第 12 卷 第 5 期　高能物理与核物理　Vol. 12, No. 5
1988 年 9 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Sept., 1988

非中心平面对称场扰动的频散公式

张　闯　　陈思育
（中国科学院高能物理研究所，北京）

摘　　要

本文由麦克斯韦方程，得到静磁情况下非中心平面对称场的一般表达式，并从粒子横向运动方程出发，推导了非中心平面对称场扰动的频散公式.

一、引　言

在带电粒子加速器中，磁场误差对于粒子横向振荡频率的扰动是一个十分重要的问题. 磁场误差的频散公式已为多位作者研究过[1,2]. 在这些文献中推导磁场误差 $\Delta B_y(x, y, s)$ 和 $\Delta B_x(x, y, s)$ 时，都引入了中心平面对称的假定，即满足

$$\begin{aligned}\Delta B_y(x, -y, s) &= \Delta B_y(x, y, s);\\ \Delta B_x(x, y, s) &= -\Delta B_x(x, -y, s),\end{aligned}\tag{1}$$

式中，x、y 和 s 分别为水平、垂直与弧向座标.

但在实际问题中，例如在研究磁铁多极场误差和斜场校正元件等效应时，都涉及非中心平面对称场，(1) 式不再成立. 本文将循序求得静磁下非中心平面对称场的一般表达式，并从存在磁场误差的横向运动方程出发，推导出非中心平面对称场扰动的频散公式. 中心平面对称场的相应公式，可以视作其特例.

二、非中心平面对称场的一般表达式

由麦克斯韦尔方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0.\tag{2}$$

而在我们讨论的静磁情况下，$\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$，且在所研究的场区内，电流密度 $\boldsymbol{j} = 0$，因而 $\boldsymbol{B}$ 为无旋场：

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} = 0.\tag{3}$$

故存在标量势 φ，满足

本文 1987 年 8 月 18 日收到.

$$B = -\nabla\varphi. \tag{4}$$

代入(2)式，知 φ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = 0. \tag{5}$$

其解的形式为：

$$\varphi = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{(n+1)!}r^{n+1}\sin[(n+1)\theta+\Psi_n], \tag{6}$$

式中，r 和 θ 分别为极坐标系的两个坐标，B_n 和 Ψ_n 分别为磁场的 n 阶分量，即 $2(n+1)$ 极场的幅值和幅角. 由(5)式得到：

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}r^n\sin[(n+1)\theta+\Psi_n]; \\ B_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}r^n\cos[(n+1)\theta+\Psi_n]. \end{aligned} \tag{7}$$

相应直角座标系下的场分量为

$$\begin{aligned} B_x &= B_r\cos\theta - B_\theta\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}r^n\sin(n\theta+\Psi_n); \\ B_y &= B_r\sin\theta + B_\theta\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}r^n\cos(n\theta+\Psi_n). \end{aligned} \tag{8}$$

采用复数表示法：

$$\begin{aligned} \Delta B &= B - B_0 = \Delta B_y + i\Delta B_x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{i(n\theta+\phi_n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x+iy)^n e^{i\phi_n}, \end{aligned} \tag{9}$$

式中，$b_n = \dfrac{\Delta B_n}{n!}$，$\Delta B_n$ 和 ϕ_n 分别为误差场 ΔB 的第 n 阶分量的幅值和幅角.

将 $(x+iy)^n$ 作二项式展开：

$$\Delta B = \sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n\cos\phi_n\sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k x^{n-k}y^k + b_n\sin\phi_n\sum_{k=0}^{n} i^{k+1}C_n^k x^{n-k}y^k\right). \tag{10}$$

把(10)式中 ΔB 的实部与虚部分开写，得到非中心平面对称场垂直与水平方向分量的多极场表达式：

$$\begin{aligned} \Delta B_y = R_e(\Delta B) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\cos\phi_n\sum_{m=0}^{n/2}(-1)^m C_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin\phi_n\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{m+1}C_n^{2m+1}x^{n-2m-1}y^{2m+1}\right]; \\ \Delta B_x = I_m(\Delta B) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\cos\phi_n\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^m C_n^{2m+1}x^{n-2m-1}y^{2m+1}\right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\sin\phi_n\sum_{m=0}^{n/2}(-1)^m C_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

在实际计算时，n 只能取有限项. n 的上限 N 取决于场的特征和磁测的可能性. m 为正整数，如求和号上限为分数时，则取相邻较小的整数.

三、多极场扰动的频散公式

上面已经把非中心平面对称场展成多极场的形式，下面讨论多极场扰动的频散.

存在多极场扰动的横向运动方程为：

$$\frac{d^2x}{ds^2}+K_x(s)\cdot x=-\frac{\Delta B_y(x,y,s)}{B\rho}+\frac{\delta}{\rho(s)};$$
$$\frac{d^2y}{ds^2}+K_y(s)y=\frac{\Delta B_x(x,y,s)}{B\rho}, \tag{12}$$

式中

$$K_x(s)=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{B\rho}\frac{\partial B_y}{\partial x}\bigg|_{x=0,y=0},\quad K_y(s)=-\frac{1}{B\rho}\frac{\partial B_y}{\partial x}\bigg|_{x=0,y=0}$$

分别为水平和垂直方向的聚焦强度，$B\rho$ 为中心动量粒子的磁刚度，$\rho(s)$ 是轨道曲率半径，δ 为粒子的动量误差.

类似于文献[1]，采用平均方法处理方程(12)，在远离共振的情况下，粒子横向振荡的频散可表示为扰动场的积分：

$$\Delta Q_{\substack{x\\y}}=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\theta_{\substack{x\\y}}\int_0^{2\pi}d\varphi_x\int_0^{2\pi}d\varphi_y\cdot\frac{\cos\varphi_{\substack{x\\y}}}{Q_{\substack{x\\y}}\sqrt{J_{\substack{x\\y}}}}F_{\substack{x\\y}}. \tag{13}$$

其中，$Q_{\substack{x\\y}}$ 和 $\theta_{\substack{x\\y}}$ 分别为水平、垂直方向无扰动时横向振荡频数和广义方位角，

$$\theta_{\substack{x\\y}}=\int_0^s\frac{ds}{Q_{\substack{x\\y}}\beta_{\substack{x\\y}}}, \tag{14}$$

$J_{\substack{x\\y}}$ 和 $\varphi_{\substack{x\\y}}$ 分别为存在扰动场时横向振荡的归一化幅值和相角，$F_{\substack{x\\y}}$ 为扰动函数：

$$F_x=-\frac{Q_x^2\beta_x^{3/2}}{B\rho}\left[\Delta B_y(x_e+\sqrt{\beta_xJ_x}\cos\varphi_x,\sqrt{\beta_yJ_y}\cos\varphi_y,\theta_x)-\Delta B_y(x_e,0,\theta_x)\right];$$
$$F_y=\frac{Q_y^2\beta_y^{3/2}}{B\rho}\Delta B_x(x_e+\sqrt{\beta_xJ_x}\cos\varphi_x,\sqrt{\beta_yJ_y}\cos\varphi_y,\theta_x), \tag{15}$$

这里 x_e 为由于动量误差 δ 引起的粒子轨道位移.

将(11)，(15)式代入(13)式，对于水平方向，得到：

$$\Delta Q_x=\frac{Q_x}{(2\pi)^3B\rho}\int_0^{2\pi}d\theta_x\int_0^{2\pi}d\varphi_x\int_0^{2\pi}\frac{\beta_x^{3/2}\cos\varphi_x}{\sqrt{J_x}}d\varphi_y\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\cos\phi_n\right.\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^mC_n^{2m}(x_e+\sqrt{\beta_xJ_x}\cos\varphi_x)^{n-2m}(\sqrt{\beta_yJ_y}\cos\varphi_y)^{2m}\right]$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin\phi_n\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{m+1}\cdot C_n^{2m+1}(x_e+\sqrt{\beta_xJ_x}\cos\varphi_x)^{n-2m-1}\right.$$

$$\cdot (\sqrt{\beta_y J_y} \cos \varphi_y)^{2m+1} \Big] - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \phi_n x_c^n \Big\}. \tag{16}$$

对(16)式中 $(x_c + \sqrt{\beta_x J_x} \cos \varphi_x)$ 为底的幂函数作二项式展开，得到：

$$\Delta Q_x = \frac{Q_x}{(2\pi)^3 B\rho} \int_0^{2\pi} d\theta_x \int_0^{2\pi} d\varphi_x \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^{3/2} \cos \varphi_x}{\sqrt{J_x}} d\varphi_y$$
$$\cdot \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Big[b_n \cos \phi_n \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m C_n^{2m} (\sqrt{\beta_y J_y} \cos \varphi_y)^{2m}$$
$$\cdot \sum_{P=0}^{n-2m} C_{n-2m}^P (\sqrt{\beta_x J_x} \cos \varphi_x)^P x_c^{n-2m-P} \Big]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[b_n \sin \phi_n \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{m+1} \cdot C_n^{2m+1} (\sqrt{\beta_y J_y} \cos \varphi_y)^{2m+1}$$
$$\cdot \sum_{P=0}^{n-2m-1} C_{n-2m-1}^p \cdot (\sqrt{\beta_x J_x} \cos \phi_x)^P x_c^{n-2m-P-1} \Big]$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \phi_n x_c^n \Big\}. \tag{17}$$

注意到在(17)式中的第一项，当 $m = P = 0$ 时的值与最后一项相消，留下 $m = 0$，$P \neq 0$ 或 $m \neq 0$，$P = 0$ 以及 $m \neq 0$，$P \neq 0$ 的项：

$$\Delta Q_x = \frac{Q_x}{(2\pi)^3 B\rho} \int_0^{2\pi} d\theta_x \int_0^{2\pi} d\varphi_x \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^2 \cos \varphi_x}{\sqrt{\beta_x J_x}} d\varphi_x$$
$$\cdot \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[b_n \cos \phi_n \sum_{p=1}^{n} C_n^p (\sqrt{\beta_x J_x} \cos \varphi_x)^p \cdot x_c^{n-p} \Big]$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \Big[b_n \cos \phi_n \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^m C_n^{2m} (\sqrt{\beta_y J_v} \cos \varphi_y)^{2m}$$
$$\cdot \sum_{p=0}^{n-2m} C_{n-2m}^p (\sqrt{\beta_x J_x} \cos \varphi_x)^p x_c^{n-2m-p} \Big]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[b_n \sin \phi_n \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{m+1} C_n^{2m+1} (\sqrt{\beta_y J_y} \cos \varphi_y)^{2m+1}$$
$$\cdot \sum_{p=0}^{n-2m-1} C_{n-2m-1}^p \cdot (\sqrt{\beta_x J_x} \cos \varphi_x)^p x_c^{n-2m-p-1} \Big] \Big\}. \tag{18}$$

通常，加速器中磁铁长度远小于横向振荡波长，因而可以近似地认为在每个元件中 β、J、x_c 等参量保持不变。这样，在(18)式中，只有 φ_x 和 φ_y 是积分变量。于是，(18)式改写为：

$$\Delta Q_x = \frac{1}{(2\pi)^3 B\rho} \sum_i \beta_{x_i} l_i \int_0^{2\pi} d\varphi_x \int_0^{2\pi} d\varphi_y \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[b_n \cos \phi_n$$

$$\cdot \sum_{p=1}^{n} C_n^p(\sqrt{\beta_x J_x})^{p-1}\cos^{p+1}\varphi_x x_c^{n-p}\Big] + \sum_{n=2}^{\infty}\Big[b_n\cos\psi_n$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}(-1)^m C_n^{2m}(\sqrt{\beta_y J_y}\cos\varphi_y)^{2m} \sum_{p=0}^{n-2m} C_{n-2m}^p(\sqrt{\beta_x J_x})^{p-1}\cos^{p+1}\varphi_x$$

$$\cdot x_c^{n-2m-p}\Big] + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[b_n\sin\psi_n\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{m+1}C_n^{2m+1}(\sqrt{\beta_y J_y}\cos\varphi_y)^{2m+1}$$

$$\cdot \sum_{p=0}^{n-2m-1} C_{n-2m-1}^p(\sqrt{\beta_x J_x})^{p-1}\cos^{p+1}\phi_x x_c^{n-2m-p-1}\Big]\Big\}_i. \tag{19}$$

式中，i 为扰动元件的序号，l_i 是第 i 个元件长度，而 β_{xi}、β_{yi}、J_{xi}、J_{yi} 和 x_{ci} 等，是在该元件处的相应参量.

我们来做(19)式中关于 φ_x 和 φ_y 的积分. 由积分公式:

$$I_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^j\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{当 } j \text{ 为奇数时;} \\ 1 & \text{当 } j = 0 \text{ 时;} \\ \dfrac{(j-1)(j-3)\cdots 1}{j(j-2)\cdots 2} & \text{当 } j \text{ 为偶数时,} \end{cases} \tag{20}$$

注意到在(19)式中，包含 $\sin\psi_n$ 的项对 $d\varphi_y$ 的积分中，被积函数为 $\cos^{2m+1}\varphi_y$. 由(20)式知，其在区间 $[0, 2\pi]$ 内的积分为零. 这说明，多极场的斜场分量扰动粒子的横向振荡，“试图”改变其振荡频率，但在一个振荡周期内的平均效应为零.

与此同时，在(19)式中，当 p 为偶数时，所有积分为零，我们引 $p = 2j+1$，得到:

$$\Delta Q_x = \frac{1}{2\pi B\rho}\sum_i \beta_{x_i} l_i\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[b_n\cos\psi_n\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} c_n^{2j+1}(\sqrt{\beta_x J_x})^{2j}x_c^{n-2j-1}I_{2j+2}\Big]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\Big[b_n\cos\psi_n\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}(-1)^m c_n^{2m}(\sqrt{\beta_y J_y})^{2m}$$

$$I_{2m}\sum_{j=0}^{\frac{n-2m-1}{2}} C_{n-2m}^{2j+1}(\sqrt{\beta_x J_x})^{2j}x_c^{n-2m-2j-1}I_{2j+2}\Big]\Big\}_i. \tag{21}$$

在(21)式中，当 $n = 2$ 时第二项中对于 j 的求和上限小于下限，说明该项的值为零，而第一项对于 n 的求和号内的量，相当于第二项 n 的求和号内当 $m = 0$ 时的量，因而这两项可合并写，(21)式简化为

$$\Delta Q_x = \frac{1}{2\pi B\rho}\sum_i \beta_{x_i} l_i\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[b_n\cos\psi_n\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^m C_n^{2m}(\sqrt{\beta_y J_y})^{2m}$$

$$\cdot I_{2m}\sum_{j=0}^{\frac{n-2m-1}{2}} C_{n-2m}^{2j+1}(\sqrt{\beta_x J_x})^{2j}x_c^{n-2m-2j-1}I_{2j+2}\Big]\Big\}_i. \tag{22}$$

用类似的方法，可以得到 ΔQ_y 的公式:

$$\Delta Q_y = -\frac{1}{2\pi B\rho}\sum_i \beta_{y_i} l_i \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \cos\phi_n \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^m C_n^{2m+1}(\sqrt{\beta_y J_y})^{2m}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot I_{2m+2}\sum_{j=0}^{\frac{n-2m-1}{2}} C_{n-2m-1}^{2j}(\sqrt{\beta_x J_x})^{2j} x_c^{n-2m-2j-1} I_{2j}\right]\right\}_i. \qquad (23)$$

在实际问题中，n 取有限项计算．在一般情况下，n 取 10 项左右是足够的．

从(22)和(23)式可以看出，非中心平面对称场引起的频散，取决于其正场分量 $b_n\cos\phi_n$。当 $\phi_n = 2l\pi$ (l 为整数)时，(22)和(23)式就退化为中心平面对称场下的相应公式．

参　考　文　献

[1] A. W. Chao, M. J. Lee, and P. L. Morton: "Higher Order Multipole Magnet Tolerances", IEEE Trans. NS-22, Vol. 3(1975), 6.

[2] R. Servranchx: "Magnetic Field Quality Requirments for PEP", IEEE Trans. NS-24, Vol. 3(1977), 6.

A GENERAL FORMULA OF TUNE SPREAD CAUSED BY MIDDLE PLANE ASYMMETRICAL MAGNETIC FIELD ERRORS

ZHANG CHUANG　　CHEN SIYU

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

The betatron tune spread caused by magnetic field errors in accelerators is a very important parameter. In this paper a expression of middle plane asymmetrical magnetic field errors is obtained based on the Maxwell equations, and a general formula of tune spread is derived starting from the transverse equations o motion.