第12卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 6
1988年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1988

阿贝尔手征群陪集纯规范场的量子化

井思聪
(理论物理分中心 CCAST (World Laboratory) 中国科学技术大学)

阮图南
(中国科学技术大学)

摘　　要

由于费米场路径积分测度在手征变换下的改变，使得阿贝尔手征群陪集纯规范场理论生成泛函的作用量中出现一个附加项(称为手征反常项)．本文完成了这一理论的路径积分量子化，证明了这一手征反常项使得生成泛函重新具有 B.R.S. 不变性，由此用泛函微分技术导出了与经典 PCAC 方程精确一致的 Ward 恒等式．

一、引　　言

文献[1]曾就一般李群 G 的情形讨论了陪集纯规范场理论的路径积分量子化问题．但是当 G 是手征群时，由于生成泛函中费米场路径积分测度在手征群下的改变[2]，使得通常规范理论的 B.R.S. 不变性受到破坏，因而有必要进一步讨论这一特殊情形下陪集纯规范场的量子化问题．

考虑最简单的手征群 $G=U(1)\times U(1)_5$，取子群 $H=U(1)$，在子群 H 上定域不变的拉氏函数可写为

$$\mathscr{L}^{(A)}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)\psi-m\bar{\psi}\psi, \tag{1.1}$$

其中 A_μ 是子群 H 上的矢量规范场，$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$．引入陪集空间纯规范场 $\phi_0(x)\in G/H$，它可以参数化为 $\phi_0(x)=e^{i\theta(x)\gamma_5}$，对费米场作如下的变换：

$$\psi'(x)=e^{i\theta(x)\gamma_5}\psi(x),\ \bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{i\theta(x)\gamma_5}, \tag{1.2}$$

则拉氏函数 $\mathscr{L}^{(A)}$ 可以写为

$$\mathscr{L}^{(A)}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\bar{\psi}'\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu-i\gamma_5\partial_\mu\theta)\psi'-m\bar{\psi}'e^{-2i\theta\gamma_5}\psi'. \tag{1.3}$$

为方便起见，可以略去上式中的撇号，并将上式记为

$$\mathscr{L}^{(B)}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu-i\gamma_5\partial_\mu\theta)\psi-m\bar{\psi}e^{-2i\theta\gamma_5}\psi. \tag{1.4}$$

容易证明，拉氏函数 $\mathscr{L}^{(B)}$ 在群 G 上是定域规范不变的．显然，当 $\theta(x)=0$ 时，$\mathscr{L}^{(B)}$ 就回到了 $\mathscr{L}^{(A)}$．可以看出，$\mathscr{L}^{(A)}$ 与 $\mathscr{L}^{(B)}$ 之间仅相差一个规范变换，所以我们称 $\theta=0$ 的规范为可重正规范[3]．

本文1987年10月4日收到．

相应于拉氏函数 $\mathscr{L}^{(A)}$ 的生成泛函可以简写为(暂时略去规范固定项等)

$$Z^{(A)}=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu]e^{i\int d^4x\mathscr{L}^{(A)}} \tag{1.5}$$

显然，$Z^{(A)}$ 与 $\mathscr{L}^{(A)}$ 一样，在子群 H 上是定域不变的．按照通常的观点，相应于拉氏函数 $\mathscr{L}^{(B)}$ 的生成泛函似乎也可以简写为

$$Z^{(B)\prime}=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta]e^{i\int d^4x\mathscr{L}^{(B)}}, \tag{1.6}$$

其中 $[d\theta]$ 是陪集纯规范场的不变测度[1]．此时，虽然 $\mathscr{L}^{(B)}$ 在群 G 上是定域不变的，但是 $Z^{(B)\prime}$ 在群 G 上并不具有相应的 B.R.S. 不变性，这是因为(1.6)式的积分测度在群 G 的变换之下要改变．因此，由生成泛函 $Z^{(B)\prime}$ 出发利用通常的 Faddeev-Popov 技巧进行路径积分量子化就遇到了困难．

本文由生成泛函 $Z^{(A)}$ 出发，严格地导出了在群 G 上定域不变的生成泛函 $Z^{(B)}$．这一结果与(1.6)式相比，在作用量上多了一项，由于这一项与轴矢 Ward 恒等式的 Adler 反常有关，因此我们称它为手征反常项．我们利用新的生成泛函 $Z^{(B)}$，完成了阿贝尔手征群陪集纯规范场的量子化，同时证明了 $Z^{(B)}$ 在群 G 上重新具有 B.R.S. 不变性，由此通过熟知的泛函微分技术，用非微扰方法得到了 Ward 恒等式．这一恒等式与由 $Z^{(B)}$ 的作用量出发直接求出的经典 PCAC 方程完全一致．这样，我们就得到一个经典与量子完全一致的轴矢流散度方程．在这个意义上可以说，我们得到一个无反常的理论．

本文的安排如下：第二节导出生成泛函 $Z^{(B)}$ 的表达式；第三节完成理论的路径积分量子化；第四节证明生成泛函 $Z^{(B)}$ 在群 G 上具有 B.R.S. 不变性；最后一节用经典和量子(非微扰)的方法导出一致的 Ward 恒等式，并对所得的结果作一些简单的讨论．

二、生成泛函 $Z^{(B)}$ 的导出

在子群 $H=U(1)$ 上，拉氏函数(1.1)描写通常的规范理论，它的量子化可按 Faddeev-Popov 方式进行：

$$Z^{(A)}=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu]\delta(F_A)\Delta_A e^{i\int d^4x\mathscr{L}^{(A)}}, \tag{2.1}$$

式中选取了规范条件 $F_A[A_\mu]=0$，例如 $F_A=\partial_\mu A_\mu=0$，Δ_A 为 Faddeev-Popov 行列式，满足如下的条件

$$\Delta_A\int[d\mu(h)]\delta(F_A^h)=1,\quad F_A^h=F_A[h(\partial_\mu-ieA_\mu)h^{-1}], \tag{2.2}$$

其中 $h=e^{i\beta}$ 是 $U(1)$ 群的元素，$[d\mu(h)]$ 是群上不变测度

$$[d\mu(h)]=[d\beta]. \tag{2.3}$$

为了研究生成泛函(2.1)在变换(1.2)之下的行为，我们先引入陪集空间 G/H 的不变测度

$$[d\mu(\phi_0)]=[d\theta], \tag{2.4}$$

使得

$$\int[d\theta]\delta(\theta)=1. \tag{2.5}$$

将(2.5)式插入(2.1)式右端，得到

$$Z^{(A)}=\int[d\psi d\bar{\psi}dA_{\mu}d\theta]\delta(F_{A})\delta(\theta)\Delta_{A}e^{i\int d^4x\mathscr{L}(A)}. \tag{2.6}$$

Fujikawa 曾指出费米场路径积分测度 $[d\psi d\bar{\psi}]$ 在手征变换下要改变[2]，但他是在欧氏空间对无穷小变换进行讨论的．我们也可以直接在闵氏空间讨论这个问题，为此可将变换(1.2)写为

$$\psi'_{\sigma}(x)=\int d^4x'(e^{i\theta(x)\gamma_5})_{\sigma\rho}\delta(x-x')\psi_{\rho}(x'), \tag{2.7}$$

对 $\bar{\psi}'_{\sigma}(x)$ 也有类似的表达式．引用分立的指标 x、x'，我们有

$$\psi'_{\sigma}(x)=\sum_{x'}A(x,x')_{\sigma\rho}\psi_{\rho}(x'), \tag{2.8}$$

其中

$$A(x,x')_{\sigma\rho}=(e^{i\theta(x)\gamma_5})_{\sigma\rho}\delta_{x,x'}. \tag{2.9}$$

由于在路径积分中费米场用 Grassmann 数表示，所以积分测度 $[d\psi]$ 在变换(2.8)之下变为

$$[d\psi']=\prod_{x}d\psi'(x)=(\mathrm{Det}A(x,x'))^{-1}\prod_{x}d\psi(x)=(\mathrm{Det}A)^{-1}[d\psi]. \tag{2.10}$$

因为 $A(x,x')$ 是么正矩阵，可对角化，它的行列式可以写为

$$\det A=\mathrm{Det}[(e^{i\theta(x)\gamma_5})_{\sigma\rho}\delta_{x,x'}]=e^{i\mathrm{Tr}\theta\gamma_5}, \tag{2.11}$$

这里引用了形式记号

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\theta\gamma_5&=\mathrm{tr}\gamma_5\sum_{x}\theta(x)=\mathrm{tr}\gamma_5\sum_{x}\theta(x)\delta_{x,x'}|_{x'=x}\\&=\int d^4x\,\mathrm{tr}\theta(x)\gamma_5\delta(x-x')|_{x'=x}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

由于 $\mathrm{Tr}\theta\gamma_5$ 是个 $0\times\infty$ 型的不确定的量，在计算时必须要规定一种正确的极限步骤，也就是说要进行正常化，以使计算的结果有明确的物理含义．我们采用如下的正常化算子

$$e^{i\frac{\not{D}^2(x)}{M^2}}\Big|_{M\to\infty}=1 \tag{2.13}$$

来计算 $\mathrm{Tr}\theta\gamma_5$，其中 $\not{D}(x)=\gamma_{\mu}(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}(x))$ 是由拉氏函数(1.1)决定的 Dirac 算子，于是

$$\mathrm{Tr}\theta\gamma_5=\int d^4x\,\mathrm{tr}\theta(x)\gamma_5e^{i\frac{\not{D}^2(x)}{M^2}}\delta(x-x')\Big|_{\substack{x'=x\\M\to\infty}}, \tag{2.14}$$

将(2.14)式中的 δ 函数用平面波展开式代入进行计算，可得

$$\mathrm{Tr}\theta\gamma_5=-\frac{ie^2}{16\pi^2}\int d^4x\theta(x)F_{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}(x), \tag{2.15}$$

其中 $\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$，将以上结果代入(2.10)式，可得

$$[d\psi']=[d\psi]e^{i\int d^4x\frac{ie^2}{16\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}}. \tag{2.16}$$

类似地，在变换(1.2)之下，测度 $[d\bar{\psi}]$ 变为

$$[d\bar{\psi}']=[d\bar{\psi}]e^{i\int d^4x\frac{ie^2}{16\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}}. \tag{2.17}$$

因此，$[d\phi d\bar{\phi}]$ 在变换(1.2)之下可以写为

$$[d\phi d\bar{\phi}] = [d\phi' d\bar{\phi}'] e^{i\int d^4x \frac{-ie^2}{8\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}}. \tag{2.18}$$

由(1.3)和(2.18)式可知，在变换(1.2)之下，生成泛函(2.6)可以写为

$$Z^{(A)} = \int [d\phi' d\bar{\phi}' dA_\mu d\theta]\delta(F_A)\delta(\theta)\Delta_A \exp\left\{i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \bar{\phi}'\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu - i\gamma_5\partial_\mu\theta)\phi' - m\bar{\phi}'e^{-2i\theta\gamma_5}\phi' - \frac{ie^2}{8\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right)\right\}. \tag{2.19}$$

略去撇号，将上式记为 $Z^{(B)}$，即有

$$Z^{(B)} = \int [d\phi d\bar{\phi} dA_\mu d\theta]\delta(F_A)\delta(\theta)\Delta_A e^{i\int d^4x(\mathscr{L}^{(B)}+\theta G)}, \tag{2.20}$$

其中 $G = \frac{-ie^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$. 对比(1.6)式和(2.20)式，可见后者比前者在作用量上多了一项 θG. 当 $\theta = 0$ 时，即在可重正规范下，这一项自动为零. 显然，若在(2.20)式中完成对 θ 的积分，就得到生成泛函 $Z^{(A)}$. 所以，我们称(2.20)式为可重正规范下的生成泛函. 由于 θG 与 Adler 反常有关，故可称为手征反常项.

值得指出的是，我们用(2.14)式来计算 $\mathrm{Tr}\theta\gamma_5$，其中 θ 可以是有限的变换参数，这只对 $U(1)$ 这样的阿贝尔群才正确. 当 G 是非阿贝尔手征群 $SU(N)\times SU(N)$ 时，(2.14)式应推广为[5]

$$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5 = \int_0^1 dt\int d^4x e^{t\alpha\cdot Y}\mathrm{tr}\alpha(x)\gamma_5\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\not{D}_L(x)\not{D}_R(x)}{M^2}} + e^{i\frac{\not{D}_R(x)\not{D}_L(x)}{M^2}}\right)\delta(x-x')\big|_{\substack{x'=x\\ M\to\infty}} \tag{2.21}$$

其中 $\alpha(x) = \frac{\alpha^i(x)\lambda_i}{2}$ 是手征变换参数，$\not{D}_L(x)$和 $\not{D}_R(x)$分别是左、右手 Dirac 算子：

$$\not{D}_L(x) = \gamma_\mu(\partial_\mu + V_\mu(x) + A_\mu(x)),\quad \not{D}_R(x) = \gamma_\mu(\partial_\mu + V_\mu(x) - A_\mu(x)), \tag{2.22}$$

而 $V_\mu(x)$ 和 $A_\mu(x)$分别是矢量和轴矢量规范场. 另外，$\alpha\cdot Y = \int d^4y\alpha^i(y)Y_i(y)$，其中 $Y_i(y)$ 是赝标规范算符. 由于在(2.21)式中出现了五重积分，所以这种正常化方法可称为五维正常化.

三、路径积分量子化

前一节中我们由生成泛函 $Z^{(A)}$ 出发，引入陪集纯规范场 $\theta(x)$，对费米场进行(1.2)式的变换，得到可重正规范下的生成泛函 $Z^{(B)}$. 现在我们由可重正规范 $F_A[A_\mu]=0$、$\theta=0$ 过渡到任意规范条件

$$F_B^i[\phi, A_\mu, \theta] = 0.\quad (i=1,2) \tag{3.1}$$

引入 Faddeev-Popor 行列式 $\Delta_B(\phi, A_\mu, \theta)$，满足条件

$$\Delta_B\int [d\mu(g)]\delta(F_B^g) = 1, \tag{3.2}$$

其中 $[d\mu(g)]$ 是群 $G=U(1)\times U(1)_5$ 的不变测度，$g = e^{i\alpha\gamma_5}e^{i\beta}$ 是群G的元素，

$$[d\mu(g)] = [d\beta d\alpha],\quad F_B^g = F_B\left[e^{i\alpha\gamma_5}e^{i\beta}\phi,\ A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\beta,\ \theta+\alpha\right], \tag{3.3}$$

而 Δ_B 是规范不变的,即 $\Delta_B^g = \Delta_B$. 可以将 Δ_B 表示为

$$\Delta_B = \mathrm{Det}M,\ M = (M_{ij}(x, y)) = \left(\frac{\delta F_B^{ig}(x)}{\delta u_j(y)}\right)_{g=1}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\delta F_B^{1g}(x)}{\delta\beta(y)} & \dfrac{\delta F_B^{1g}(x)}{\delta\alpha(y)} \\ \dfrac{\delta F_B^{2g}(x)}{\delta\beta(y)} & \dfrac{\delta F_B^{2g}(x)}{\delta\alpha(y)} \end{pmatrix}_{g=1}. \tag{3.4}$$

其中 $\delta u_1(x) = \delta\beta(x)$, $\delta u_2(x) = \delta\alpha(x)$.

将(3.2)式插入(2.20)式,可得

$$Z^{(B)} = \int [d\psi d\bar\psi dA_\mu d\theta]\delta(F_A)\delta(\theta)\Delta_A e^{i\int d^4x(\mathscr{L}^{(B)}+\theta G)}\int [d\mu(g)]\delta(F_B^g)\Delta_B$$

$$= \int [d\mu(g) d\psi d\bar\psi dA_\mu d\theta]\delta(F_A)\delta(\theta)\delta(F_B^g)\Delta_A\Delta_B e^{i\int d^4x(\mathscr{L}^{(B)}+\theta G)}. \tag{3.5}$$

上式被积函数中只有 $\delta(F_B^g)$ 这个因子含有群元素 g,为了消去这个群元素,可作如下的积分变数变换:

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}e^{i\beta}\psi,\ \bar\psi' = \bar\psi e^{-i\beta}e^{i\alpha\gamma_5},\ A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\beta,\ \theta' = \theta + \alpha. \tag{3.6}$$

在这个变换下, Δ_A 和 Δ_B 不变,而

$$F_B^g = F[\psi',\ A'_\mu,\ \theta'] \equiv F'_B,$$

$$\delta(F_A) = \delta(F_A[A_\mu]) = \delta\left(F_A\left[A'_\mu - \frac{1}{e}\ \partial_\mu\beta\right]\right),\ \delta(\theta) = \delta(\theta' - \alpha)$$

$$\mathscr{L}^{(B)} = -\frac{1}{4}\ F'^2_{\mu\nu} - \bar\psi'\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA'_\mu - i\gamma_5\partial_\mu\theta')\psi' - m\bar\psi' e^{-2i\theta'\gamma_5}\psi' = \mathscr{L}^{(B)\prime},$$

$$\theta G = -\frac{ie^2}{8\pi^2}\ (\theta' - \alpha)F'_{\mu\nu}\tilde F'_{\mu\nu} \equiv \theta' G' + \frac{ie^2}{8\pi^2}\ \alpha F_{\mu\nu}\tilde F_{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

同时,显然有 $[dA_\mu d\theta] = [dA'_\mu d\theta']$,但是,

$$[d\psi d\bar\psi] = [d\psi' d\bar\psi']e^{2i\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5}. \tag{3.8}$$

在计算 $\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5$ 时,我们注意到现在的等效拉氏函数是 $\mathscr{L}^{(B)} + \theta G$, 所以必须用下式来代替(2.14)式[5]:

$$2\ \mathrm{Tr}\alpha\gamma_5 = \int d^4x \mathrm{tr}\alpha(x)\gamma_5\left(e^{i\frac{\not{D}_L(x)\not{D}_R(x)}{M^2}} + e^{i\frac{\not{D}_R(x)\not{D}_L(x)}{M^2}}\right)\delta(x - x')_{\substack{x'=x \\ M\to\infty}}, \tag{3.9}$$

其中 $\not{D}_L(x) = \gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x) - i\partial_\mu\theta(x))$, $\not{D}_R(x) = \gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x) + i\partial_\mu\theta(x))$ 是由拉氏函数 $\mathscr{L}^{(B)}$ 所决定的左、右手 Dirac 算子. 完成(3.9)式的计算可得

$$2\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5 = -\frac{ie^2}{8\pi^2}\int d^4x\alpha F_{\mu\nu}\tilde F_{\mu\nu}. \tag{3.10}$$

因此,在变换(3.6)之下,生成泛函(3.5)可以写为

$$Z^{(B)} = \int [d\mu(g) d\psi' d\bar\psi' dA'_\mu d\theta']\delta\left(F_A\left[A'_\mu - \frac{1}{e}\ \partial_\mu\beta\right]\right)$$

$$\times\ \delta(\theta' - \alpha)\delta(F'_B)\Delta_A\Delta_B e^{i\int d^4x(\mathscr{L}^{(B)\prime}+\theta' G')}. \tag{3.11}$$

略去所有的撇号之后,我们有

$$Z^{(B)}=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta]\delta(F_B)\Delta_B e^{i\int d^4x(\mathscr{L}^{(B)}+\theta G)}$$

$$\cdot\int[d\mu(g)]\delta\left(F_A\left[A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\beta\right]\right)\delta(\theta-\alpha)\Delta_A. \tag{3.12}$$

由于 $[d\mu(g)]=[d\beta d\alpha]$，利用(2.2)和(2.5)式，可有

$$\int[d\beta d\alpha]\Delta_A\delta\left(F_A\left[A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\beta\right]\right)\delta(\theta-\alpha)=1. \tag{3.13}$$

于是，我们得到

$$Z^{(B)}=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta]\delta(F_B)\Delta_B e^{i\int d^4x(\mathscr{L}^{(B)}+\theta G)}. \tag{3.14}$$

这样，我们就完成了任意规范下理论的路径积分量子化.

四、B.R.S. 不变性

引入鬼粒子场 $\xi^i(x)$、$\eta^i(x)$，$(i=1,2)$，可以把(3.14)式写为

$$Z^{(B)}=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta d\xi^i d\eta^i]\exp i\left\{\int d^4x\left[\mathscr{L}^{(B)}+\theta G-\frac{1}{2\alpha}(F_B^i)^2\right]\right.$$

$$\left.+\int d^4xd^4y\xi^i(x)M_{ij}(x,y)\eta^j(y)\right\}. \tag{4.1}$$

其中 $M_{ij}(x,y)$ 由(3.4)式给出. 为了书写简便起见，引入下述记号:

$$[d\mu]=[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta d\xi^i d\eta^i], \tag{4.2}$$

$$S_{\text{eff}}=\int d^4x\left[\mathscr{L}^{(B)}+\theta G-\frac{1}{2\alpha}(F_B^i)^2\right]+\int d^4xd^4y\xi^i(x)M_{ij}(x,y)\eta^j(y).$$

于是，(4.1)式可以写为

$$Z^{(B)}=\int[d\mu]e^{iS_{\text{eff}}}. \tag{4.3}$$

容易证明生成泛函(4.3)具有 B.R.S. 不变性. 为此，引入如下的 B.R.S. 变换:

$$\delta\phi(x)=i(\eta_1(x)+\gamma_5\eta_2(x))\delta\lambda\phi(x),$$

$$\delta\bar{\phi}(x)=i\bar{\phi}(x)(-\eta_1(x)+\gamma_5\eta_2(x))\delta\lambda,$$

$$\delta A_\mu(x)=\frac{1}{e}\partial_\mu\eta_1(x)\delta\lambda,\ \delta\theta(x)=\eta_2(x)\delta\lambda,$$

$$\delta\xi^i(x)=-\frac{1}{\alpha}F_B^i(x)\delta\lambda,\ \delta\eta^i(x)=0. \tag{4.4}$$

其中 $\delta\lambda$ 是 Grassmann 常数. 由(4.4)式可见，$A_\mu(x)$、$\theta(x)$和 $\xi^i(x)$的变换都是平移，而 $\eta^i(x)$ 是不变的，所以这些场量的路径积分测度是不变的. 另外，$\phi(x)$ 和 $\bar{\phi}(x)$ 的变换也可以表示为

$$\phi'(x)=e^{i(\eta_1(x)+\gamma_5\eta_2(x))\delta\lambda}\phi(x),\quad \bar{\phi}'(x)=\bar{\phi}(x)e^{i(-\eta_1(x)+\gamma_5\eta_2(x))\delta\lambda}, \tag{4.5}$$

于是费米场积分测度的变化为

$$[d\phi'd\bar{\phi}']=[d\phi d\bar{\phi}]e^{-2i\mathrm{Tr}\eta_2\delta\lambda\gamma_5}. \tag{4.6}$$

利用(3.9)式计算 $\mathrm{Tr}\eta_2\delta\lambda\gamma_5$，可得

$$2\,\mathrm{Tr}\eta_2\delta\lambda\gamma_5=\frac{-ie^2}{8\pi^2}\int d^4x\eta_2(x)F_{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}(x)\delta\lambda. \tag{4.7}$$

此外，在变换(4.4)之下，$\mathscr{L}^{(B)}$ 是不变的，用手征反常项 θG 的改变为

$$\delta\int d^4x\theta(x)G(x)=\frac{-ie^2}{8\pi^2}\int d^4x\eta_2(x)F_{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}(x)\delta\lambda. \tag{4.8}$$

因此，手征反常项的改变正好抵消了费米场积分测度的改变．所以，为了证明生成泛函(4.3)具有 B.R.S 不变性，只需要证明

$$\int d^4x\frac{-1}{2\alpha}(F_B^i)^2+\int d^4xd^4y\xi^i(x)M_{ij}(x,\ y)\eta^j(y)$$

在变换(4.4)之下不变就行了，而这个证明与通常规范理论的证明完全一样．这样，我们就证明了生成泛函(4.3)具有 B.R.S. 不变性．

五、Ward 恒等式

由生成泛函(3.14)式中的有效拉氏函数

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}^{(B)}+\theta G=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu$$
$$-i\gamma_5\partial_\mu\theta)\psi-m\bar{\psi}e^{-2i\theta\gamma_5}\psi-\frac{ie^2}{8\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{5.1}$$

出发，直接求陪集纯规范场 θ 的运动方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\theta}=\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\partial_\mu\theta}, \tag{5.2}$$

可得

$$\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)=2im\bar{\psi}\gamma_5e^{-2i\theta\gamma_5}\psi-\frac{ie^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{5.3}$$

这恰好是坐标表象的轴矢 Ward 恒等式，或 PCAC 方程，其中 $\frac{-ie^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ 是 Adler 反常项．当 $\theta=0$ 时，(5.3)式变为

$$\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)=2\ im\bar{\psi}\gamma_5\psi-\frac{ie^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{5.4}$$

不难看出，这正是由拉氏函数 $\mathscr{L}^{(A)}$ 出发进行微扰计算所得到的反常 Ward 恒等式．

由(5.1)式出发，求出规范场 A_μ 的运动方程

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}+\frac{ie^2}{2\pi^2}\partial_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}=ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{5.5}$$

由此可得矢量流守恒方程

$$\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)=0. \tag{5.6}$$

这样，我们利用场量的经典运动方程，很容易地得到了坐标表象的矢量和轴矢量 Ward 恒等式．

另一方面，利用非微扰的泛函微分技术，也可以从 B.R.S. 不变的生成泛函(4.3)得到矢量和轴矢量 Ward 恒等式．为此，相应于场量 ψ、$\bar{\psi}$、A_μ 和 θ，分别引入外源 $\bar{\chi}$、χ、J_μ

和 J，从而将(4.3)式写为

$$Z[J]=\int[d\mu]e^{iS_{\text{eff}}[J]}, \tag{5.7}$$

其中

$$S_{\text{eff}}[J]=S_{\text{eff}}+\int d^4x(\bar{\phi}\chi+\bar{\chi}\phi+J_\mu A_\mu+J\theta). \tag{5.8}$$

根据 Grassmann 数积分公式

$$\int d\xi^i\xi^j=\delta_{ij}. \tag{5.9}$$

由(5.7)式可得

$$\int[d\mu]\xi^i(x)e^{iS_{\text{eff}}[J]}=0. \tag{5.10}$$

由此利用 B.R.S. 变换(4.4)和通常的泛函微分技术，不难得到矢量和轴矢量 Ward 恒等式:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle T\phi(z)j_\mu(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0=&\delta(x-z')\langle T\phi(z)\bar{\phi}(x)\rangle_0-\delta(x\\&-z)\langle T\phi(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0,\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle T\phi(z)j_{5\mu}(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0=&2\,im\langle T\phi(z)\bar{\phi}(x)\gamma_5e^{-2i\theta(x)\gamma_5}\phi(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0\\&-\frac{ie^2}{8\pi^2}\langle T\phi(z)F_{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0\\&-\delta(x-z')\langle T\phi(z)\bar{\phi}(x)\gamma_5\rangle_0\\&-\delta(x-z)\langle T\gamma_5\phi(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $j_\mu=i\bar{\phi}\gamma_\mu\phi$，$j_{5\mu}=i\bar{\phi}\gamma_\mu\gamma_5\phi$. 将这两个式子与(5.6)和(5.3)式对比，可见它们是一致的. 当 $\theta=0$ 时，(5.12)式变为

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle T\phi(z)j_{5\mu}(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0=&2\,im\langle T\phi(z)\bar{\phi}(x)\gamma_5\phi(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0\\&-\frac{ie^2}{8\pi^2}\langle T\phi(z)F_{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0\\&-\delta(x-z')\langle T\phi(z)\bar{\phi}(x)\gamma_5\rangle_0\\&-\delta(x-z)\langle T\gamma_5\phi(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0\end{aligned} \tag{5.13}$$

此式与(5.4)式也是一致的. 这样，我们利用经典的方法和量子(非微扰)的方法得到了一致的 Ward 恒等式. 在这个意义上说，生成泛函(43)给出了一个无反常的理论.

总结起来，在本文中我们考虑了费米场泛函积分测度在手征变换下的改变，从而得到一个包含手征反常项在内的新的联合不变的生成泛函，它具有 B.R.S. 不变性，并且给出完全一致的经典与量子 Ward 恒等式. 也可以类似地考虑非阿贝尔手征群陪集纯规范场理论的量子化问题，这方面的结果我们将在另一篇文章中进行讨论.

参考文献

[1] 周光召、阮图南，理论粒子物理会议文集，广州(1980) 902.

[2] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett*, **42**(1979), 1195.

[3] 周光召、杜东生、阮图南，中国科学，**22**(1979)142.

[4] V.N.Popov and L.D. Faddeev, *Phys. Lett.*, **258**(1967), 29.

[5] 阮图南、井思聪，“规范理论生成泛函的联合不变性与手征反常项”，待发表.

ON THE QUANTIZATION OF PURE GAUGE FIELDS ON COSET SPACE OF ABELIAN CHIRAL GROUP

JING SICONG

(Center of Theoretical Physics, CCAST (World Laboratory and University of Science and Technology of China, Hefei)

RUAN TUNAN

(University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

Owing to the change of the path-integral measure for fermion fields under chiral transformation, an additional term (we called it the chiral anomalous term) is added to the action of generating functional of the pure gauge fields theories on coset space of Abelian chiral group. The path-integral quantization of this theory is realized and the invariance of the generating functional under B.R.S. transformation is restored with the aid of the chiral anomalous term. By using the functional derivative technique, the Ward identities are also deduced, which are quite consistent with the classical CVC and PCAC equations.