第 12 卷 第 6 期　　高能物理与核物理　　Vol. 12, No. 6
1988 年 11 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Nov., 1988

相对论微观光学势的自洽计算*

朱　萍　马中玉　顾英圻　卓益忠
（中国原子能科学研究院，北京）

摘　　要

本文以 Walecka 模型及非线性 σ 模型自洽计算了 ^{16}O、^{40}Ca 的相对论微观光学势．得到的标量势和矢量势符号相反，大小约为几百 MeV，与核子的质量可以相比拟．为了与非相对论光学势比较，给出了 Schrödinger 等价势．这个等价势在很大的能量范围（$E = 200$MeV 以下）内适用，相对论计算自然地得到较强的能量相关的自旋-轨道耦合势，与唯象分析一致．本文用自洽计算的实部势及最低级的虚部势计算了核子—核散射微分截面及极化率，得到与实验较好的符合．非线性 σ 模型给出合理的核的不可压缩系数，从而考虑了核的表面效应，改善了计算的光学势．

一、引　　言

光学模型是分析核反应实验数据的最基本工具之一，光学势的微观计算为光学模型提供了一个理论依据．

非相对论的光学势微观计算是依据二核子相互作用势及多体的 Schrödinger 方程[1,2]．由于核体系中核子的结合能比其质量要小得多，过去的研究认为，相对论效应是很小的，只需作为修正来考虑．然而，近年来越来越多的证据[3,4]表明：核子之间存在着很大的相互抵消的 Lorentz 标量势与矢量势；核子的结合能是很大的标量势能与矢量势能的相互抵消的结果，对于通常的核体系，标量势和矢量势与核子的质量可以比拟．因此，即使对通常的核体系，也有必要研究相对论效应．最简单的相对论量子理论是 Walecka 模型[5]，核子通过交换 σ 介子与 ω 介子相互作用，采用平均场近似，将介子场算符以其基态期望值来代替．Walecka 模型给出的核物质的不可压缩系数太大，应用到有限核，计算得到每核子的结合能过小[6]．为改进这个不足，A. Bouyssy 等[7]引进了非线性 σ 模型，考虑到多体力效应，唯象地引入 σ 介子的非线性自相互作用，并以此模型研究了核物质及双满壳层核基态性质，得到了更满意的结果．

相对论唯象光学势在符合弹性散射截面的同时，很好地预言了有关极化可测量[8,9]．在相对论唯象研究的成功鼓舞下，本文以 Walecka 模型与非线性 σ 模型自洽计算了双满

* 本工作得到中国科学自然科学基金资助．
本文 1987 年 3 月 9 日收到．

壳层核 ^{16}O、^{40}Ca 的相对论微观光学势实部模型的参数通过符合饱和核物质性质，同时考虑双满壳层核束缚态性质来确定．为与非相对论光学势比较，给出了这些核的 Schrödinger 等价中心势与自旋-轨道势．并以这样自洽计算得到的实部势加最低级虚部势计算了核子-核弹性散射截面与极化角分布．我们将在第二节中给出计算的理论框架与公式，第三节中给出如何确定模型参数，第四节是关于光学势和核子-核弹性放射截面与极化角分布的计算结果及讨论．

二、理论框架及计算公式

在 Walecka 模型下，核子通过交换 σ 介子和 ω 介子相互作用，在研究有限核时还必须考虑 ρ 介子与光子，其有效 Lagrangian[7] 为：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = & \Psi(i\gamma_\mu\partial^\mu - M) + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - u(\sigma) - g_s\Psi\psi\sigma \\
& - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\nu V_\mu V^\mu - g_\nu\Psi\gamma_\mu\Psi V^\mu - \frac{1}{4}\boldsymbol{B}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{B}^{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{2}m_\rho^2\boldsymbol{b}_\mu\cdot\boldsymbol{b}^\mu - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Psi\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{b}^\mu\psi \\
& - \frac{1}{2}e\Psi\gamma_\mu(1+\tau_3)\psi a_\mu.
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中：

$$u(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{3}b\sigma^3 + \frac{1}{4}c\sigma^4, \tag{2}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu V_\mu, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{b}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{b}_\mu, \tag{4}$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu. \tag{5}$$

ψ 为核子场算符，a_μ 为电磁场算符，σ、v_μ、$\boldsymbol{b}_\mu$ 分别为 σ、ω、ρ 介子场算符，M 为核子质量，m_i、g_i 为相应的介子质量及介子与核子相互作用耦合常数，b、c 是 σ 介子的非线性自相互作用参数，若 $b=0$、$c=0$，即为 Walecka 模型．平均场近似下，σ、ω、ρ 介子及电磁场算符取为基态期望值，分别是：$\langle\sigma\rangle=\sigma$、$\langle v_\mu\rangle=\delta_{\mu0}V_0$、$\langle\boldsymbol{b}_\mu\rangle=\delta_{i3}\delta_{\mu0}b_0$、$\langle a_\mu\rangle=\delta_{\mu0}a_0$．这些基态期望值、在核物质情况下是常数，对于双满壳层的球形核是径向坐标的函数．

通过对场量的变分，得到球形核中核子所满足的 Dirac 方程为：

$$
\begin{aligned}
& [-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \gamma_0(M + g_s\sigma(r)) + g_\nu V_0(r) + \frac{1}{2}g_\rho\tau_3 b_0(r) \\
& + e(1+\tau_3)a_0(r)]\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha.
\end{aligned} \tag{6}
$$

$E_\alpha = M + \varepsilon_\alpha$，$\varepsilon_\alpha$ 是核子的束缚能级，介子场与电磁场的期望值所满足的方程为：

$$\frac{d^2\sigma(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\sigma(r)}{dr} - \frac{\partial u}{\partial\sigma}(r) = g_s(\rho_s^{(p)}(r) + \rho_s^{(n)}(r)), \tag{7}$$

$$\frac{d^2V_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV_0(r)}{dr} - m_v^2 V_0(r) = -g_v(\rho_B^{(p)}(r) + \rho_B^{(n)}(r)), \tag{8}$$

$$\frac{d^2b_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{db_0(r)}{dr} - m_b^2 b_0(r) = -\frac{1}{2} g_\rho(\rho_B^{(p)} - \rho_B^{(n)}(r)), \tag{9}$$

$$\frac{d^2a_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{da_0(r)}{dr} = -e\rho_B^{(p)}(r). \tag{10}$$

其中:

$$\rho_s^{(i)} = \sum_\alpha \Psi_\alpha \phi_\alpha, \tag{11a}$$

$$\rho_B^i = \sum_\alpha \Psi_\alpha \gamma_0 \phi_\alpha, \tag{11b}$$

$i = p(n)$ 分别为质子和中子.

求和是对所有质子或中子的占据态. 将核子波函数写为:

$$\phi_\alpha = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} G_\alpha(r) \\ -iF_\alpha(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r} \end{pmatrix}\Omega_\alpha, \tag{12}$$

G_α、F_α 是径向波函数，Ω_α 是波函数的角度、自旋与同位旋部分，则 ρ_s、ρ_B 为:

$$\rho_s^{(i)} = \sum_\alpha \frac{1}{4\pi}\frac{G_\alpha^2 - F_\alpha^2}{r}, \tag{13a}$$

$$\rho_B^{(i)} = \sum_\alpha \frac{1}{4\pi}\frac{G_\alpha^2 + F_\alpha^2}{r}, \tag{13b}$$

由等式(6)得 G_α、F_α 所满足的方程为:

$$\frac{dG_\alpha}{dr} + k\frac{G_\alpha}{r} = (E_\alpha + M + U - V - V_c)F_\alpha, \tag{14a}$$

$$\frac{dF_\alpha}{dr} - k\frac{F_\alpha}{r} = (M - E_\alpha + U + V + V_c)G_\alpha. \tag{14b}$$

其中:

$$U = g_s\sigma(r), \tag{15a}$$

$$V = g_v\sigma_0(r) + \frac{1}{2}\tau_3 g_\rho b_0(r), \tag{15b}$$

$$V_c = \frac{1}{2}(1 + \tau_3)e a_0(r). \tag{15c}$$

用叠代的方法自洽求解等式(7—10)与(14)便能求得单粒子能级，标量势，矢量势 V、V_c 及其它性质. 在平均场近似下 U、V、V_c 与核子的状态无关. 因此，对于散射态，核子在相同的势场下运动，入射核子所满足的 Dirac 方程亦为(6)式，只是能量 ε_α 是入射核子的能量. 标量势 U 与矢量势 V 为平均场近似下的相对论光学势实部. 为了与非相对论光学势比较，在 Dirac 方程中消去小分量，得到入射能量为 ε 的核子波函数的大分量所满足的方程为:

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2M} + u_c'(r,\varepsilon,\boldsymbol{\nabla}) + U_{s0}(r,\varepsilon)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\right]\phi_>(\boldsymbol{r}) = \frac{(M+\varepsilon-V_c)^2 - M^2}{2M}\phi_>(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

这是 Schrödinger 类型的方程，但中心势 u_c' 中包含有算符 ∇，是非定域的，我们作以下变换:

$$\psi_>(\boldsymbol{r}) = S(r)^{\frac{1}{2}}\phi(\boldsymbol{r}) \tag{17a}$$

$$S(r) = \frac{2M + \varepsilon - V(r) + U(r)}{2M + \varepsilon} \tag{17b}$$

对于散射问题，我们所关心的是波函数在无穷远处的渐近行为，而 $S(r)$ 在 r 很大时趋向于1，故 $\psi_>(\boldsymbol{r})$ 与 $\phi(\boldsymbol{r})$ 是等价的，两者有一样的相移，$\phi(\boldsymbol{r})$满足 Schrödmger 等价方程:

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2M} + U_c(r,\varepsilon) + U_{s0}(r,\varepsilon)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\right]\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{(M+\varepsilon-V_c)^2 - M^2}{2M}\phi(\boldsymbol{r}) \tag{18}$$

这样我们得到入射能量为 ε 的核子的 Schrödmger 等价中心势与自旋-轨道势:

$$u_c(r,\varepsilon) = u(r) + V(r) + \frac{u^2(r) - V^2(r)}{2M} + \frac{\varepsilon}{M}V(r) + u_D(r,\varepsilon) \tag{19a}$$

$$u_{s0}(r,\varepsilon) = -\frac{1}{2Mr}\frac{1}{S(r)}\frac{ds(r)}{dr} \tag{19b}$$

$$u_D(r,\varepsilon) = \frac{1}{2M}\left\{-\frac{1}{2r^2S(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dS(r)}{dr}\right) + \frac{3}{4}\frac{1}{S(r)}\left(\frac{dS(r)}{dr}\right)^2\right\} \tag{19c}$$

(19c) Darwin 项 u_D 是很小的，在以后的计算中不考虑.

三、参数的确定

计算中我们选取核子，ω 介子和 ρ 介子的质量为它们的实验值: $M = 938.9\text{MeV}$、$m_v = 783\text{MeV}$、$m_\rho = 770\text{MeV}$，则方程(6—9)及(14)式的解依赖于介子耦合常数 g_s、g_v、g_ρ、σ 介子的质量 m_s 和非线性参数 b、c. 我们通过符合饱和核物质性质，同时考虑到有限核性质确定这些参数.

相对论平均场理论在核物质情况下变得极其简单. 对于 Walecka 模型，$b = 0$，$c = 0$. 在饱和核物质下，符合饱和性质 $p = 0$，并同时使得每核子的平均结合能为 15.75MeV，便能确定 c_s^2 与 $c_v^2(c_i^2 = M^2g_i^2/m_i^2)$[5]，$c_\rho^2$ 由符合饱和核物质的对称能 $a_4 = 33\text{MeV}$ 来确定. 饱和核物质密度在实验得到的 $k_F = 1.36\pm6\text{fm}^{-1}$ 范围内选取，计算发现有限核中心密度分布依赖于 k_F 值，以较大的 k_F 对应的参数计算得到核密度分布在核中心区域过于集中. 为得到合适的有限核密度分布，我们取饱和核物质的 k_F 为 1.32fm^{-1}. 在核物质的计算中，结果只依赖于无量纲参数 c_s^2、c_v^2，而与介子质量无关，但对有限核则不然，σ 介子质量 m_s 的选取影响核表面密度分布. 在取定 c_s^2 后，我们以符合 ^{40}Ca 的电荷分布之均方根半径来确定 m_s. 我们以这样的方法得到的 Walecka 模型参数为表(1)中列出的参数 I，相应的饱和核物质的不可压缩系数 k 也被列出.

Walecka 模型给出的饱和核物质的不可压缩系数过大，非线性 σ 模型考虑到多体力作用，引入了非线性自相互作用，引进了参数 b、c，从而通过调节参数可以得到合适的不可压缩系数. 但非线性 σ 模型引入了两个参数，故由饱和核物质的性质不能唯一确定所有的参数，参数的选择带有一定的任意性. 为得到合适的非线性 σ 模型参数，我们选取不同 c_v^2 及不可压缩系数得到多组参数，并以这些参数计算了轻核的束缚态性质，通过比较

发现，表(1)列出的参数 II 给出束缚态的性质最好．以参数 I，II 计算得到的 ^{40}Ca 的基态能级在表(2)中列出．以下我们以这两组参数计算光学势并讨论之．

四、光学势的计算结果与讨论

我们用四阶 Rung-Kutta 法解 Dirac 方程，用 Noumerov 方法解非线性 σ 方程．对线性 σ, V_0、b_0、a_0 方程，利用静态的 Green 函数能求得解析表达式[11]，如 V_0 有，

$$V_0(r)=\int_0^\infty g_v(\rho_B^{(p)}(r)+\rho_B^{(n)}(r))G(r,r',m_v)r'^2dr' \tag{20a}$$

$$G(r,\ r',\ m_v)=\frac{1}{m_v r' r}\sin(m_v r_<)\exp(-m_v r_>) \tag{20b}$$

$r_>$ 和 $r_<$ 分别表示取 r 与 r' 中的大者和小者，我们用 8 点高斯积分求(20a)式的积分．选取能产生合理的基态能级的 Woods-Saxson 位作为初始势．

图(1)是计算得到的 ^{40}Ca 质子标量势 u 与矢量势 V．自洽计算得到的势在核内有明显的起伏，体现了壳效应的存在．标量势与矢量势的值约为几百 MeV，但符号相反．参数 I 计算给出的势更强，这是由于大的介子-核子耦合常数所致．图(2)是不同入射能量下的 ^{40}Ca 质子 Schrödinger 等价中心势．中心势中包含着标量势与矢量势的相互抵消，在入射能量较低时，中心势是吸引的，随入射能量的增加，中心势由吸引转变为排斥，并在 $E\gtrsim 150$MeV 时，出现"酒瓶底"形状，这是因为中心势中包含着标量势与矢量势的平方项所致．中心势可改写成：

$$U_e(r,\varepsilon)=(U(r)+V(r))\left(1+\frac{U(r)-V(r)}{2M}\right)$$

量 $\left(1+\dfrac{U(r)+V(r)}{2M}\right)$ 在中心区域是 0.6 左右，而在表面附近趋向于 1，又由于 $U(r)-V(r)<0$、$V(r)>0$、$|U(r)-V(r)|$ 与 $V(r)$ 有类似的随 r 变化的趋势、故随入射能量

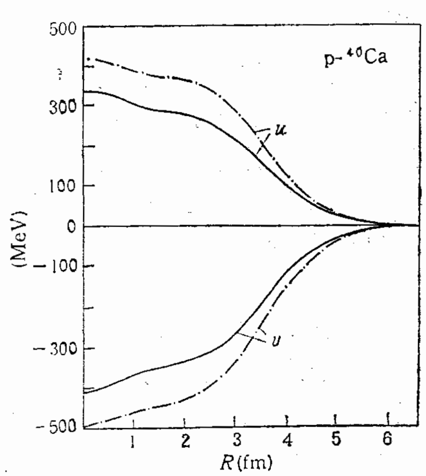

图 1 ^{40}Ca质子标量势与矢量势
—·—参数 I；——参数 II

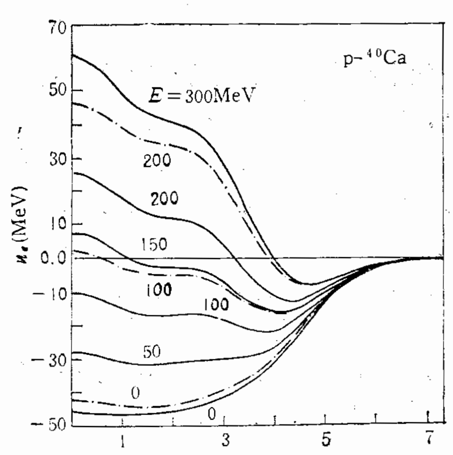

图 2　^{40}Ca质子 Schrödinger 等价中心势图注与图 1 同

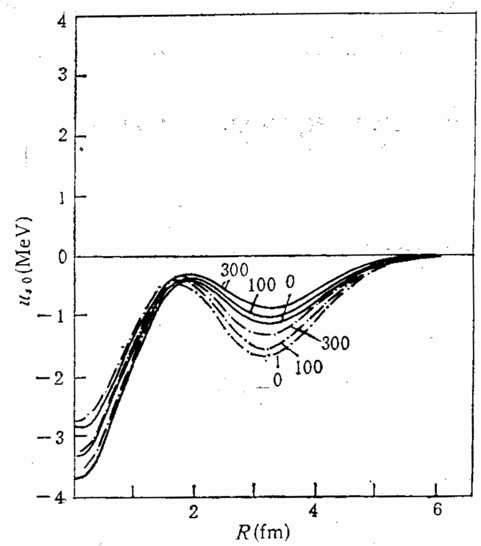

图 3　^{40}Ca 质子 Schröding 等价自旋-轨道势图注与图 1 同

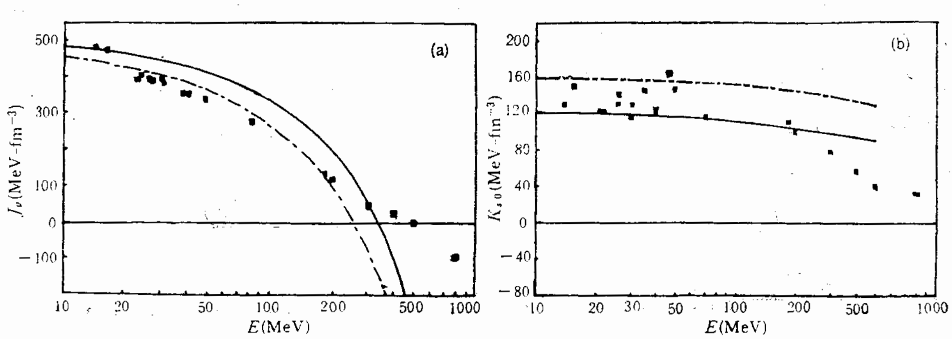

图 4　^{40}Ca 质子 Schrödinger 等价势体积分的计算值与唯象值[8] 图注与图 1 同

a. 中心势　b. 自旋——轨道势

的增加中心势由吸引变为排斥时，中心区域比表面附近光通过零值，从而出现了“酒瓶底”形状。中心势的这些特征与符合弹性散射截面得到的唯象势一致[8-10]。我们的计算给出的中心势对能量的依赖取决于矢量势（见等式(19)），以参数 I 计算得到较强的矢量势，使相应的中心势随能量的增加更快。图(4a)给出了以参数 I、II 计算得到的 ^{40}Ca 质子中心势的体积分与相应的唯象值，以参数 II 计算得到的中心势随能量上升比较缓慢，在能量较高时仍与唯象值符合得较好。

图 (3) 给出了计算得到的不同入射能量下的 ^{40}Ca 质子 Schrödinger 等价自旋-轨道势。自旋-轨道势依赖于 $U(r) - V(r)$ 的微分。而自洽计算的标量势与矢量势在核内有明显的起伏，故自旋-轨道势有较大的振荡。图 (4b) 给出了计算得到的 ^{40}Ca 质子自旋-轨道势的体积分与相应的唯象值。参数 I 对应的饱和核物质的不可压缩系数较大，大的不可压缩系数意味着标量数与矢量数随密度的变化剧烈。因此，参数 I 计算得到的标量势与矢量势在核边界有很大的斜度，相应的自旋-轨道势太强。

与非相对论的 Skyrme 力 Hartree-Fock 计算[2]相比较，我们的计算给出的 Schrödinger 等价中心势随能量增加上升要缓慢些，与唯象势符合的能量范围更大. 同时，相对论计算自然地给出了强的自旋-轨道势，并且是能量相关的，这与唯象势一致，非相对论的微观计算不能给出这种能量相关性质. 为进一步证实我们的计算的合理性，同时对不同模型得到的势作进一步比较，我们用以上自洽计算得到的实部势及

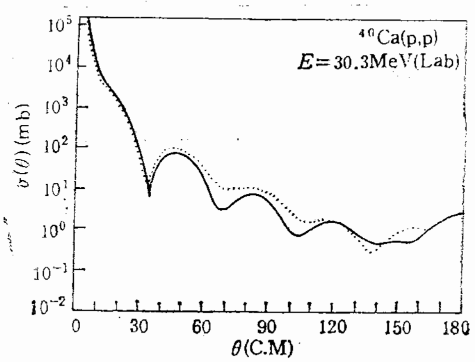

图 5　p-^{40}Ca弹性散射截面角分布计算值与实验值[12]

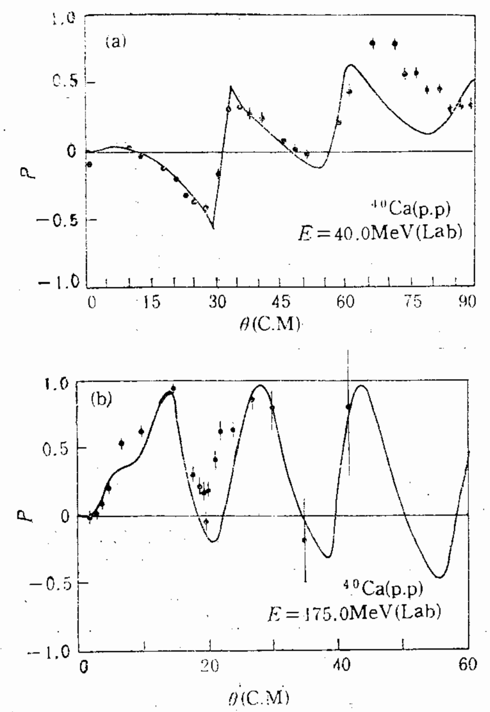

图 6　p-^{40}Ca 弹性散射极化角分布计算值与实验值[13,14]

由文献[11]给出的考虑到极化图贡献的最低级虚部势，计算了核子-核弹性散射截面与极化角分布. 图 (5) 给出了以参数 II 计算得到的入射量为 30.3 MeV 的 p-^{40}Ca 弹性散射截面角分布及相应的实验值[12]. 参数 I、II 的理论计算与实验值都有较好的符合，以参数 II 计算得到的结果与实验值符合得更好些，因篇幅关系我们仅给出了参数 II 的结果. 图 (6)给出了用参数 II 计算得到的入射能分别为 40MeV 与 175MeV 的 p-^{40}Ca 弹性散射极化角分布与相应的实验值[13,14]. 用参数 II 计算极化与实验符合比参数 I 有明显改善，这是因为非线性 σ 模型得到合适的不可压缩系数，从而考虑了核的表面效应，改善了自旋-轨道耦合势.

总之，在相对论框架下，以低级的近似，简单的计算得到比非相对论高级近似更好的结果是十分令人鼓舞的. Walecka 模型与非线性 σ 模型给出的中心势对能量的依赖是线性的，这在能量较低时与唯象分析一致，但在能量较高时，$E>200$MeV，上升太快. Clark 等人的唯象研究[8]表明，标量势与矢量势是能量相关的，并随入射能量的增加而减小. 平均场近似不能反映这个特点，使中心势随入射能量增加上升太快. 考虑更高级近

表 1　模型参数

	k_F	C_s^2	C_v^2	C_ρ^2	$\bar{b}$	$\bar{c}$	m_s(MeV)	K(MeV)
I	1.32	340.2	258.9	78.39	0	0	500	546
II	1.32	311.3	196.0	93.48	-3.176×10^{-3}	-3.986×10^{-3}	485	230

似，如 Hartree-Fock 近似，可以改进势的高能行为[15].

表 2 ^{40}Ca 单粒子能级理论值与实验值[7]

	质子			中子		
	I	II	实验值	I	II	实验值
$1s_{1/2}$	46.2	42.1	50±11	54.4	50.4	50
$1p_{3/2}$	29.6	27.7	34±6	37.5	35.6	30
$1p_{1/2}$	24.2	24.4		32.2	32.2	27
$1d_{5/2}$	14.0	13.7	15.5	21.5	21.2	21.9
$2s_{1/2}$	7.5	9.2	10.9	14.8	16.6	18.2
$1d_{3/2}$	6.2	8.7	8.3	13.5	16.1	16.5

参 考 文 献

[1] J. P. Jeukenne, A. Lejeune and C. Mahaux, *Phys. Rep.*, **C25**(1976), 83, *Phys. Rev.*, **C16**(1977), 80

[2] 袁海骥等，高能物理与核物理，**10**(1986)，335.

[3] K. Erkelenz, *Phys. Rep.*, **C13**(1974), 191.

[4] K. Holinde, *Phys. Rep.*, **C68**(1981), 121.

[5] J. D. Walecka, *Ann. of Phys.*, **83**(1974), 491.

[6] J. Boguta, *Nucl. Phys.*, **A372**(1981), 386.

[7] A. Bouyssy, S. Marccos and Phan Van Thieu, *Nucl. Phys.*, **A422**(1984), 541.

[8] B. C. Clark, *Development of the Dirac Scattering Approach, Invited talk presented at the Los Alamos Workship on Relativistic Dynamic and Quark-Nuclear Physics*, June2-June12, 1985.

[9] A. M. Kobos, *Nucl. Phys.*, **A445**(1985), 605.

[10] H. O. Meyer et al., *Phys. Rev.*, **C24**(1981), 1782.

[11] C. J. Horowitz, *Nucl. Phys.*, **A412**(1984), 255. *Nucl. Phys.*, **A368**(1981), 503.

[12] B. W. Ridley and J. F. Turner, *Nucl. Phys.*, **58**(1964), 497.

[13] L. N. Blumberg, E. E. Gross, A. van der Woude, A. Zucker and R. H. Bassel, *Phys. Rev.*, **147**(1966), 812.

[14] A. Johansson et al., *Arkiv For Fysik*, **19**(1961), 541.

[15] Z. Y. Ma, P. Zhu, Y. Q. Gu and Y. Z. Zhuo, *Contribution To 'Physics at Tanden' Beijing International Symposium*, May26-May30, 1986.

SELF-CONSISTENT CALCULATION OF RELATIVISTIC MICROSCOPIC OPTICAL POTENTIAL

Zhu Ping Ma Zhongyu Gu Yingqi Zhuo Yizhong

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

The real relativistic microscopic optical potentials for ^{16}O and ^{40}Ca have been calculated self-consistently in the framework of the Walecka model and the non-linear σ model. To compare with nonrelativistic optical potentials, the Schrödinger equivalent potentials are obtained. The differential cross sections and polarizations for the nucleon-nucleus elastic scatterings also have been calculated. It is found that the optical potentials obtained in the framework of the non-linear σ model are better than that in the Walecka model.