

Z_2 Higgs 场-规范场体系实空间 重整化群方法研究

卞建国

(黑龙江大学物理系, 哈尔滨)

摘 要

本文用 Migdal-Kadanoff 重整化群方法研究了与 Higgs 场耦合的 Z_2 格点规范理论体系的相结构, 得出了 Higgs 相与 confinement 相连通的结论. 工作在四维中进行.

一、引 言

近年来, 人们用 Migdal-Kadanoff 重整化群方法^[1]大量地研究了格点规范理论中的纯物质场体系和纯规范场体系^[2], 但对物质场和规范场耦合体系研究的甚少. Kadanoff 研究了夸克-规范场体系^[3]. 由于方法过于简单, 只给出了物质场与规范场相退耦的重整化递推关系. 后来 S. Caracciolo 和 P. Menotti 用四个费米子组成费米圈^[4], T. Matsui 引入次邻近耦合^[5], 都考虑了费米子场对 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 规范场的影响. 但都没有考虑规范场对费米子场的影响.

Higgs 标量场与规范场耦合体系的重整化群方法研究方面的文章还没有看到. 本文正是在这一方面作了一点工作.

二、模 型

对于任何真实理论的研究, 都必须考虑物质场的影响. 物质场包括量子色动力学中的夸克; Weinberg-Salam 弱电统一理论中的 Higgs 标量场、轻子和夸克. 在一定的范围内, 这些物质场对规范场施加一个动力学的影响. 因此, 研究 Higgs 场和规范场的耦合体系是有充分的意义的. 本文所研究的模型已经被用精确的方法^[6]、Monte Carlo 方法^[7]、Hamiltonian 计算^[8]、平均场方法研究过^[9].

我们要研究的模型被定义如下:

在 d 维空间中, 每个坐标上定义 Ising 物质场: $\sigma(\mathbf{r}) = \pm 1$

在每条链上定义 Ising 规范场: $U_n(\mathbf{r}) = \pm 1$

作用量为:

$$S = \beta \sum_{\mathbf{r}, u} [\sigma(\mathbf{r}) u_u(\mathbf{r} + u) \sigma(\mathbf{r} + u)] + K \sum_{\mathbf{r}, uv} [u_u(\mathbf{r}) u_v(\mathbf{r} + u) u_u(\mathbf{r} + v) u_v(\mathbf{r})] \quad (2.1)$$

作用量 (2.1) 式在任意定域规范变换下是不变的:

$$u_u(\mathbf{r}) \rightarrow u_u(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) u_u(\mathbf{r}) v^{-1}(\mathbf{r} + u) \\ \sigma(\mathbf{r}) \rightarrow \sigma'(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}).$$

三、二维空间递推关系

重整化群方法的一般思想已在参考文献中被阐述, 我们不必重复. 我们的目的是找出两个递推关系:

$$K(\lambda a) = R_K^{\lambda}[K(a), \beta(a)] \quad \beta(\lambda a) = R_{\beta}^{\lambda}[K(a), \beta(a)] \quad (3.1)$$

其中 λ 表示点阵间距由 a 变到 λa , $K(a)$ 与 $\beta(a)$ 是原来的耦合常数, $K(\lambda a)$ 与 $\beta(\lambda a)$ 是重整化后的耦合常数. R 的下标 K, β 表示两个群有区别.

为了阐述方便, 我们先在二维空间进行, 然后推广到四维. 取 $\lambda = 2$.

配分函数为

$$Z = \sum_{\{\sigma, u\}} e^{\beta \sum_{\mathbf{r}, u} [\sigma(\mathbf{r}) U_u(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r} + u)] + K \sum_{\mathbf{r}, uv} [U_u(\mathbf{r}) U_v(\mathbf{r} + u) U_u(\mathbf{r} + v) U_v(\mathbf{r})]} \quad (3.2)$$

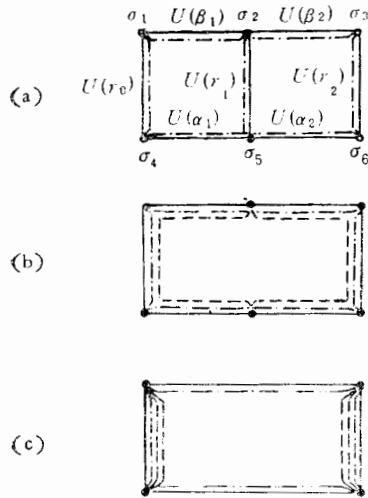


图 1

——— 对应 β - - - - 对应 $\bar{\beta}$
 - · - · - · 对应 $\text{th}^{-1} \text{th}^2 \beta$

我们的步骤是: 1. 取两个邻近的基本元格, 考虑两元格公共链上的规范场求和; 2. 将求和后的新的 Higgs 场耦合进行飘移; 3. 对未进行飘移的方向的 Higgs 场耦合按一维进行求和. 看图 1(a). 我们用实线表示自由规范场, 小点表示 Higgs 场, 点划线表示与 Higgs 场相互作用的规范场和相应的耦合常数 β . 设

$$U(\alpha) = U(\alpha_1) U(r_0) U(\beta_1) \\ U(\beta) = U(\beta_2) U(r_2) U(\alpha_2) \quad (3.3)$$

考虑求和

$$I = \sum_{U(r_1)} e^{K[U(\alpha)U(r_1)] + K[U(\beta)U(r_1)] + \beta[\sigma_2 U(r_1)\sigma_3]} \quad (3.4)$$

首先写:

$$K[U] = K_0 + KU \quad (3.5)$$

U 为基本元格四条链上的规范场乘积. K_0 为一个常数, 对相变性质无影响. 其次写

$$e^{K|U|} = a_0 + a_1 U, \quad a_0 = e^{K_0} \text{ch} K, \quad a_1 = e^{K_0} \text{sh} K. \quad (3.6)$$

$$\text{同理:} \quad \beta[\sigma_2 U(r_1) \sigma_5] = \beta_0 + \beta \sigma_2 U(r_1) \sigma_5 \quad (3.7)$$

$$e^{\beta[\sigma_2 U(r_1) \sigma_5]} = b_0 + b_1 \sigma_2 U(r_1) \sigma_5 \quad (3.8)$$

(2.1) 其中 $b_0 = e^{\beta_0} \text{ch} \beta$, $b_1 = e^{\beta_0} \text{sh} \beta$.

这样,完成对 $U(r_1)$ 的求和,得

$$I = 2a_0^2 b_0 + 2a_0 a_1 b_1 \sigma_2 U(\beta) \sigma_5 + 2a_0 a_1 b_1 \sigma_2 U(\alpha) \sigma_5 + 2a_1^2 b_0 U(\alpha) U(\beta) \quad (3.9)$$

设上式等于

$$\begin{aligned} I &= e^{\bar{K}_0 + \bar{K} U(\alpha) U(\beta) + \bar{\beta}_0 + \bar{\beta} \sigma_2 U(\alpha) \sigma_5 + \bar{\beta}_0 + \bar{\beta} \sigma_2 U(\beta) \sigma_5} \\ &= \bar{a}_0 \bar{b}_0^2 + \bar{a}_1 \bar{b}_1^2 + (\bar{a}_0 \bar{b}_0 \bar{b}_1 + \bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{b}_0) \sigma_2 U(\beta) \sigma_5 \\ &\quad + (\bar{a}_0 \bar{b}_1 \bar{b}_0 + \bar{a}_1 \bar{b}_0 \bar{b}_1) \sigma_2 U(\alpha) \sigma_5 + (\bar{a}_0 \bar{b}_1^2 + \bar{a}_1 \bar{b}_0^2) U(\alpha) U(\beta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $\bar{a}_0 = e^{\bar{K}_0} \text{ch} \bar{K}$, $\bar{a}_1 = e^{\bar{K}_0} \text{sh} \bar{K}$, $\bar{b}_0 = e^{\bar{\beta}_0} \text{ch} \bar{\beta}$, $\bar{b}_1 = e^{\bar{\beta}_0} \text{sh} \bar{\beta}$.

是找 比较 (3.10) 与 (3.9), 算得. $\bar{K} = \text{th}^{-1} x$, $\bar{\beta} = \text{th}^{-1} y$ (3.11)

$$(3.1) \quad x = \frac{1 + a^4 - 2b^2 a^2}{2(1 - b^2) a^2} - \sqrt{\left[\frac{1 + a^4 - 2b^2 a^2}{2(1 - b^2) a^2} \right]^2 - 1}$$

$$) \text{ 与} \quad y = \frac{1 + a^2}{2ab} - \sqrt{\left[\frac{1 + a^2}{2ab} \right]^2 - 1}$$

$$a = \text{th} K, \quad b = \text{th} \beta.$$

\bar{K}_0 和 $\bar{\beta}_0$ 与相变无关, 不需求出. 图 1(b) 对应于 (3.10). $\bar{\beta}[\sigma_2 U(\beta) \sigma_5]$ 和 $\bar{\beta}[\sigma_2 U(\alpha) \sigma_5]$ 两项的出现破坏了原来的耦合形式, 必须作飘移. 即作变换

$$(3.2) \quad \bar{\beta}[\sigma_2 U(\beta) \sigma_5] + \bar{\beta}[\sigma_2 U(\alpha) \sigma_5] \rightarrow 2\bar{\beta}[\sigma_3 U(r_2) \sigma_6]$$

最后按一维情形直接对 σ_2 和 σ_5 求和. 这样, 我们完成了 x 方向的抽取变换. 我们得到新的耦合常数:

$$K \rightarrow \bar{K}$$

; 2. x 方向: $\beta \rightarrow \text{th}^{-1} \text{th}^2 \beta$; Y 方向: $\beta \rightarrow 2\bar{\beta} + \beta$ 采取同样的步骤, 进行 y 方向的抽取变换, 得

$$\beta_{1x} = \text{th}^{-1} \text{th}^2 \beta, \quad \beta_{1y} = \beta + 2\bar{\beta}[K, \beta], \quad K_1 = \bar{K}[K, \beta]$$

$$\beta_{2x} = \beta_{1x} + 2\bar{\beta}[K_1, \beta_{1x}], \quad \beta_{2y} = \text{th}^{-1} \text{th}^2 \beta_{1y}, \quad K_2 = \bar{K}[K_1, \beta_{1x}]$$

这里, 我们用下标 1、2... 表示完成对 $x, y \dots$ 方向抽取变换后的耦合常数, 用下标 $x, y \dots$ 表示相应方向的耦合常数.

(3.3) 四、推广到四维

考虑到我们的递推关系是各向异性的, 在推广到四维时, 可选 xy 平面和 x 方向为代表.

(3.4) 我们的步骤是, 选 xy 平面, 将与该平面垂直的平面的规范场相互作用移到相应的表面, x 和 y 方向的抽取变换如二维情形. 再重复别的平面和别的方向得:

$$(3.5) \quad K_1^{xy} = \bar{K}[K, \beta] \quad \beta_{1x} = \text{th}^{-1} \text{th}^2 \beta$$

$$\text{次写} \quad K_2^{xy} = \bar{K}[K_1^{xy}, \beta_{1x}] \quad \beta_{2x} = \beta_{1x} + 2\bar{\beta}[K_1^{xy}, \beta_{1x}]$$

$$\begin{aligned} K_3^{xy} &= 2K_2^{xy} & \beta_{3x} &= \beta_{2x} + 2\bar{\beta}[2K_1^{xy}, \beta_{2x}] \\ K_4^{xy} &= 2K_3^{xy} & \beta_{4x} &= \beta_{3x} + 2\bar{\beta}[4K_1^{xy}, \beta_{3x}] \end{aligned} \quad (4.1)$$

上标表示 xy 平面. K_4^{xy} 和 $\beta_{4x}E$ 是我们要求的 $K(2a)$ 和 $\beta(2a)$. 别的平面和方向也可作类似处理. 由 (4.1) 用计算机可求得固定点: (K, β)

$$\begin{aligned} A: (K_c, 0) &= (0.808, 0); & B: (\infty, \beta_c) &= (\infty, 0.126) \\ C: (0, 0); & D: (\infty, 0); & E: (0.815, 0.415). \end{aligned}$$

五、 λ 为任意时情形

第四节和第五节中的推导是 $\lambda = 2$ 时的情形, 且递推关系是各向异性的. 只有当 $\lambda \rightarrow 1$ 时, 各向异性才能消除, 为此, 我们必须考虑 λ 为任意值时的情形.

以二维为例, 第一步, 见图 2(a), 将 $22' - (\lambda - 1)(\lambda - 1)'$ 共 $\lambda - 2$ 条链上的 Higgs 场耦合移至 $\lambda\lambda'$ 的位置, 如图 2(b), 则 $\lambda\lambda'$ 链上: $\beta \rightarrow (\lambda - 1)\beta$. 第二步, 考虑对 $22' - (\lambda - 1)(\lambda - 1)'$ 共 $\lambda - 2$ 条链上的规范场求和得元格 $2'$ 的规范场耦合常数 $K' = \text{th}^{-1} \text{th}^{\lambda-1} K$. 完成下式求和, 看图 2(c)

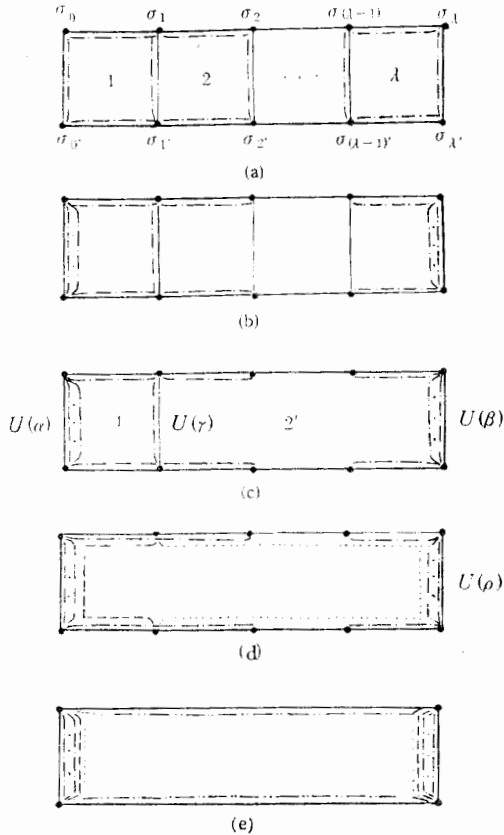


图 2

- · — · — 对应于 β
- - - - 对应于 $\bar{\beta}$
- · · · · 对应于 $\bar{\beta}$
- · · · · 对应于 $\text{th}^{-1} \text{th}^{\lambda-1} \beta$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{U(r)} e^{K[U(\alpha)U(r)]} \\ &\quad \cdot e^{K'[U(\beta)U(r)] + \beta[\sigma_1 U(r)\sigma_1']} \\ &= 2a_0 b_0 c_0 + 2b_1 c_1 a_0 \sigma_1 U(\alpha) \sigma_1' \\ &\quad + 2a_1 b_0 c_1 U(\alpha) U(\beta) \\ &\quad + 2a_1 b_1 c_0 \sigma_1 U(\beta) \sigma_1' \end{aligned}$$

其中, $a_0 = e^{K_0} \text{ch} K$, $a_1 = e^{K_0} \text{sh} K$, $b_0 = e^{\beta_0} \text{ch} \beta$, $b_1 = e^{\beta_0} \text{sh} \beta$; $c_0 = e^{K'_0} \text{ch} K$, $c_1 = e^{K'_0} \text{sh} K$. (5.1)

$$\begin{aligned} I &= e^{\bar{K}[U(\alpha)U(\beta) + \bar{\beta}[\sigma_1 U(\alpha)\sigma_1] + \bar{\beta}[\sigma_1 U(\beta)\sigma_1]']} \\ &= \bar{a}_0 \bar{c}_0 \bar{b}_0 + \bar{a}_1 \bar{c}_1 \bar{b}_1 + (\bar{a}_0 \bar{c}_0 \bar{b}_1 \\ &\quad + \bar{a}_1 \bar{b}_0 \bar{c}_1) \sigma_1 U(\alpha) \sigma_1' + (\bar{c}_0 \bar{b}_1 \bar{a}_1 \\ &\quad + \bar{c}_1 \bar{a}_0 \bar{b}_0) \sigma_1 U(\beta) \sigma_1' + (\bar{c}_0 \bar{b}_0 \bar{a}_1 \\ &\quad + \bar{c}_1 \bar{a}_0 \bar{b}_1) U(\alpha) U(\beta) \quad (\text{看图 2d}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= e^{\bar{K}_0} \text{ch} \bar{K}, & \bar{a}_1 &= e^{\bar{K}_0} \text{sh} \bar{K}, & \bar{c}_0 &= e^{\bar{\beta}_0} \text{ch} \bar{\beta} \\ \bar{c}_1 &= e^{\bar{\beta}_0} \text{sh} \bar{\beta}; & \bar{b}_0 &= e^{\bar{\beta}_0} \text{ch} \bar{\beta}, & \bar{b}_1 &= e^{\bar{\beta}_0} \text{sh} \bar{\beta} \end{aligned}$$

比较 (5.2) 和 (5.1), 最后解得

$$1) \quad \bar{K}[K, \beta] = \text{th}^{-1} x, \quad \bar{\beta}[K, \beta] = \text{th}^{-1} y, \quad \bar{\rho}[K, \beta] = \text{th}^{-1} z \quad (5.3)$$

其中 $x = F(a, b, c)$ $y = F(c, a, b)$ $z = F(b, c, a)$

而 $F(a, b, c)$

$$= \frac{1 + a^2 c^2 - b^2 a^2 - b^2 c^2}{2(1 - b^2)ac} - \sqrt{\left[\frac{1 + a^2 c^2 - b^2 a^2 - b^2 c^2}{2(1 - b^2)ac} \right]^2 - 1}$$

$$a = \text{th} K, \quad b = \text{th} \beta, \quad c = \text{th}^{\lambda-1} K$$

然后, 作变换 $\bar{\beta}[\sigma_1 U(a) \sigma_{1'}] + \bar{\rho}[\sigma_1 U(\beta) \sigma_{1'}] \rightarrow (\bar{\beta} + \bar{\rho})(\sigma_1 U(\rho) \sigma_{1'})$ 并对 Higgs 场求和. 这时 $\lambda \lambda'$ 链对应 $(\lambda - 1)\beta + \bar{\beta} + \bar{\rho}$ 而 $0\lambda'$ 链对应 $\text{th}^{-1} \text{th}^{\lambda-1} \beta$, 推广到四维, 类似于 (4.1) 式, 仅作变换 $2\bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta} + \bar{\rho}$

当
们

$$\begin{aligned} K_1^{\lambda y} &= \bar{K}[K, \beta] & \beta_{1x} &= \text{th}^{-1} \text{th}^{\lambda} \beta \\ K_2^{\lambda y} &= \bar{K}[K_1^{\lambda y}, \beta_{1x}] & \beta_{2x} &= \beta_{1x} + \bar{\beta}[K_1^{\lambda y}, \beta_{1x}] + \bar{\rho}[K_1^{\lambda y}, \beta_{1x}] \\ K_3^{\lambda y} &= \lambda K_2^{\lambda y} & \beta_{3x} &= \beta_{2x} + \bar{\beta}[\lambda K_1^{\lambda y}, \beta_{2x}] + \bar{\rho}[\lambda K_1^{\lambda y}, \beta_{2x}] \\ K_4^{\lambda y} &= \lambda K_3^{\lambda y} & \beta_{4x} &= \beta_{3x} + \bar{\beta}[\lambda^2 K_1^{\lambda y}, \beta_{3x}] + \bar{\rho}[\lambda^2 K_1^{\lambda y}, \beta_{3x}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

将
的
1 2

这里 $K_1^{\lambda y}$ 和 β_{4x} 即要求的 $K(\lambda a)$ 和 $\beta(\lambda a)$; 不难求得

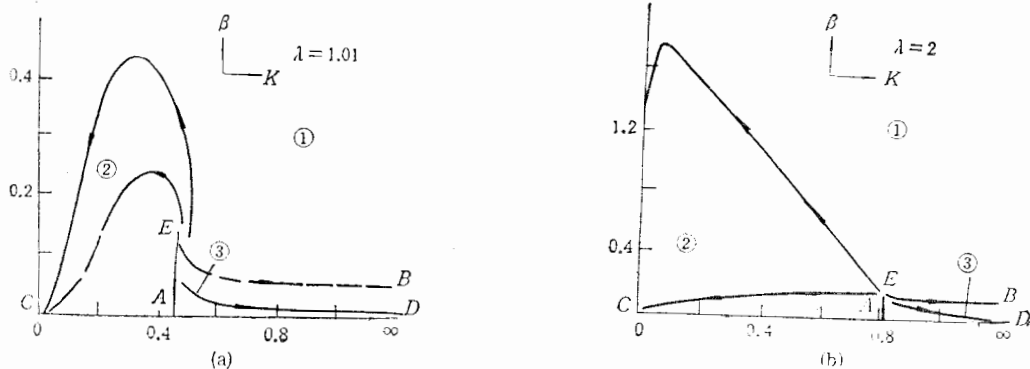
- (1) 当 $K \rightarrow \infty$ 时 $\beta(\lambda a) = \lambda^3 \text{th}^{-1} \text{th}^{\lambda} \beta$
- (2) 当 $\beta = 0$ 时 $K(\lambda a) = \lambda^2 \text{th}^{-1} [\text{th}(\text{th}^{-1} \text{th}^{\lambda} K)]^{\lambda}$

场
求

与通常用 Migdal-kadanoff 方法处理纯物质场和纯规范场所得结果一致

也不难验证: 当 $\lambda = 1$ 时, $K_1^{\lambda y} = K$, $\beta_{4x} = \beta$. $\lambda = 2$ 时, 我们恢复到 § 3 的结果用 (5.4), 取 $\lambda = 1.01$, 用计算机可求得固定点: (K, β)
 $A: (K_c, 0) = (0.445, 0)$ $B: (\infty, \beta_c) = (\infty, 0.051)$
 $C: (0, 0)$ $D: (\infty, 0)$ $E: (0.467, 0.139)$.

0 =
1 =
5.1)



1)
5.2)

图 3

- (a) ① HIGGS PHASE ② CONFINED PHASE ③ UNCONFINED PHASE
- (b) ① HIGGS PHASE ② CONFINED PHASE ③ UNCONFINED PHASE

六、 β - K 相图和分析

由 (5.3) 式可求出 $\lambda = 2$, $\lambda = 1.01$ 时的相图. 见图 3. 图中的流线箭头表示随着点阵间隔的增加, 耦合常数流动的方向. 按连续场论的观点, 当 $K \rightarrow \infty$ 和 $\beta \rightarrow \infty$ 时, Higgs 机制起作用, 系统应该处于 Higgs 相, 但我们发现 Higgs 相与禁闭相是连通的, 因为两相之间不存在边界, 合称 Higgs-禁闭相. 另一相称为非禁闭相. 我们的相是这样划分的, 在 Higgs-禁闭相, 流线流向 C 点, 而在非禁闭相, 流线流向 D 点. 所以我们可以看到, 在 Higgs-禁闭相, 随着点阵距离的增加, $K \rightarrow 0$ $\beta \rightarrow 0$, 即

$$g^2 = \frac{1}{K} \rightarrow \infty, R^2 = \beta \rightarrow 0$$

这里 g 是通常场论的耦合常数, R 是 Higgs 场的固定模, 因此粒子处于禁闭状态, 在非禁闭相随距离增加, $K \rightarrow \infty$ $\beta \rightarrow 0$ 即 $g^2 \rightarrow 0$, $R^2 \rightarrow 0$. 粒子处于自由状态.

我们的相图与别的方法所得结果大体一致重整化群方法简单明了, 但缺点是不知道误差范围

参 考 文 献

- [1] A. A. Migdal, JETP (Sov. Phys.) 42(1976), 413; 42(1976), 743, L. P. Kadanoff, *Ann. of Phys.*, 100 (1976), 359.
- [2] G. Martinelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.*, B180(FS2)(1981), 201
S. Caracciolo and P. Menotti, *Nucl. Phys.*, B180(FS2) (1981), 428.
- [3] L. Kadanoff, *Rev. Mod. Phys.*, 49(1977), 267.
- [4] S. Caracciolo and P. Menotti, *Ann. of Phys.*, 122(1979), 74.
- [5] T. Matsui, *Nucl. Phys.*, B136(1978), 277.
- [6] E. Fradkin and S. Shenker, *Phys. Rev.*, 19D(1979), 3682.
- [7] M. Creutz, *Phys. Rev.*, 21D(1980), 1006.
G. A. Jongeward, J. D. Stack, and C. Jayaprakash, *Phys. Rev.*, 21D(1980), 3360
- [8] J. L. Banks and D. K. Sinclair, *Phys. Rev.*, 23D(1981), 2962.
- [9] R. Balian, J. M. Drouffe, and C. Itzykson, *Phys. Rev.*, 11D(1975), 2104.
E. Brezin and J. M. Drouffe, *Nucl. Phys.*, B200(FS4) (1982), 93.

A REAL-SPACE RENORMALIZATION-GROUP ANALYSIS FOR Z_2 LATTICE GAUGE THEORY COUPLED TO A HIGGS FIELD

BIAN JIANGUO

(Heilongjiang University, Harbin)

ABSTRACT

We present a real-space renormalization-group analysis for Z_2 lattice gauge theory coupled to a Higgs field in four dimension, the results show a phase diagram in which the Higgs and confined region are smoothly connected.