

关于强子中胶子分布函数的 QCD 预言

吴济民 沈齐兴

(中国科学院高能物理研究所, 北京)

宋孝同 张洪宪 杜建国

(杭州大学)

摘 要

本文对 Altarelli-Parisi 方程采用 Mellin 变换方法解析地求得胶子分布函数的级数解析表达式, 这个级数收敛得很快, 利用它讨论了胶子分布函数的演化行为。

量子色动力学 (QCD) 认为强子由夸克和胶子组成。按照部分子模型, 夸克和胶子的行为可以用它们各自的分布函数描写, 从而分布函数成为人们从实验上和理论上研究的重要对象。

轻子-核子深度非弹性散射实验指出, 夸克分布函数 $q(x, Q^2)$ 是费曼变量 x 的函数, 又是破坏无标度性的。为了理论研究和唯象学的需要, 人们对分布函数作出理论解释并获得它的解析表达式。文献[1]首先对分布函数作了参数化的描述。随着实验结果的积累, 又陆续出现了新的、更完善的参数化形式^[2,3]。但这些表达式还都只是由实验得到的经验公式。

在微扰 QCD 研究的基础上, Altarelli 和 Parisi^[4] 给出了夸克、胶子分布函数随四动量传递 Q^2 变化的演化方程。但是, 由于解析求解此积分-微分方程组比较困难, 人们总是采用数值求解方法求解, 得到数值的表达式^[5,6], 用以解释无标度性破坏行为。

我们曾对 A-P 方程采用 Mellin 变换方法进行解析求解^[7], 求得了价夸克分布函数的级数表达式, 满意地解释了有关的实验结果。本文沿用同样的理论方法解析地求得胶子分布函数 $G(x, Q^2)$ 随 Q^2 演化的解析表达式, 它不仅解释现有的有关实验结果, 而且为理论研究和唯象学提供了方便。

在带头对数近似下, 强子中第 i 种夸克和胶子的分布函数满足如下的 A-P 方程^[4]:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q^i(y, t) + P_{qG} \left(\frac{x}{y} \right) G(y, t) \right] \\ \frac{dG(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[P_{Gq} \left(\frac{x}{y} \right) \sum_{i=1}^{2f} q^i(y, t) + P_{GG} \left(\frac{x}{y} \right) G(y, t) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$z = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad \alpha_s = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad b_0 = \frac{33 - 2f}{12\pi}.$$

$f = 4$ 为味道数, P_{ij} 为已知的几率函数, 它们的逆 Mellin 变换就是 QCD 理论中的反常量纲.

对方程(1)取矩后, 得到矩的微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle q^i(t) \rangle_n &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{8}{3} A_n^{qq} \langle q^i(t) \rangle_n + \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{8}{3} A_n^{qG} \langle G(t) \rangle_n \\ \frac{d}{dt} \langle G(t) \rangle_n &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{8}{3} A_n^{Gq} \sum_{i=1}^{2f} \langle q^i(t) \rangle_n + \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{8}{3} A_n^{GG} \langle G(t) \rangle_n \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n^{ij} &= \frac{3}{8} \int_0^1 dx x^{n-1} P_{ij}(x) \\ \langle q^i(t) \rangle_n &\equiv \int_0^1 dx x^{n-1} q^i(x, t), \quad \langle G(t) \rangle_n \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} G(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

它的解是

$$\begin{aligned} \langle q^i(t) \rangle_n &= \left\{ \langle q^i(t_0) \rangle_n - \frac{1}{2f} \langle q(t_0) \rangle_n \right\} F_{qq1}(n, t) \\ &\quad + \frac{1}{2f} \langle q(t_0) \rangle_n F_{qq2}(n, t) + \langle G(t_0) \rangle_n F_{qG}(n, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\langle G(t) \rangle_n = \langle q(t_0) \rangle_n F_{Gq}(n, t) + \langle G(t_0) \rangle_n F_{GG}(n, t) \quad (3.2)$$

其中 t_0 为 t 的初始值,

$$\langle q(t_0) \rangle_n \equiv \sum_{i=1}^{2f} \langle q^i(t_0) \rangle_n \quad (4)$$

$F(n, t)$ 是已知函数^[8], 它们分别为

$$F_{qq1}(n, t) = e^{A_n^{qq} s} \quad (5)$$

$$F_{qq2}(n, t) = \frac{1}{2} (e^{A_n^+ s} + e^{A_n^- s}) - \frac{1}{2} (A_n^{GG} - A_n^{qq}) e^{\frac{A_n^+ s - e^{A_n^- s}}{A_n^+ - A_n^-}} \quad (6)$$

$$F_{qG}(n, t) = A_n^{qG} (e^{A_n^+ s} - e^{A_n^- s}) / (A_n^+ - A_n^-) \quad (7)$$

$$F_{Gq}(n, t) = A_n^{Gq} (e^{A_n^+ s} - e^{A_n^- s}) / (A_n^+ - A_n^-) \quad (8)$$

$$F_{GG}(n, t) = \frac{1}{2} (e^{A_n^+ s} + e^{A_n^- s}) + \frac{1}{2} (A_n^{GG} - A_n^{qq}) e^{\frac{A_n^+ s - e^{A_n^- s}}{A_n^+ - A_n^-}} \quad (9)$$

其中

$$s = \frac{4}{3\pi b_0} \ln \frac{t}{t_0} \quad (10)$$

$$A_n^{qq} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} - \psi(n+1) - c$$

$$A_n^{qG} = \frac{3}{16} \frac{n^2 + n + 2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{aligned}
 A_n^{\text{Gq}} &= \frac{n^2 + n + 2}{2n(n^2 - 1)} \\
 A_n^{\text{GG}} &= \frac{9}{4} \left[\frac{33 - 2f}{36} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \psi(n+1) - c \right] \\
 A_n^{\pm} &= \frac{1}{2} [A_n^{\text{GG}} + A_n^{\text{qG}} \pm \sqrt{(A_n^{\text{GG}} - A_n^{\text{qG}})^2 + 8fA_n^{\text{Gq}}A_n^{\text{qG}}}] \quad (11)
 \end{aligned}$$

c 是欧拉常数, $\psi(n) = \Gamma'(n)/\Gamma(n)$ 为 Psi 函数.

对(3)式作逆 Mellin 变换, 即得

$$G(x, t) = \int_x^1 \frac{dz}{z} q(z, t_0) \tilde{F}_{\text{Gq}}\left(\frac{x}{z}, t\right) + \int_x^1 \frac{dz}{z} G(z, t_0) \tilde{F}_{\text{GG}}\left(\frac{x}{z}, t\right) \quad (12)$$

其中 $\tilde{F}(x, t)$ 是 $F(n, t)$ 的逆 Mellin 变换:

$$\tilde{F}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} dn x^{-n} F(n, t) \quad (13)$$

为了完成(12)式的积分, 让我们在复 n 平面上按 n 的幂次将各反常量纲作如下展开:

$$\begin{aligned}
 A_n^{\text{qG}} &= \frac{3}{4} - c - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{7}{12n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{59}{120n^4} - \frac{1}{2n^5} + \dots \\
 A_n^{\text{qG}} &= \frac{3}{16n} - \frac{3}{8n^2} + \frac{9}{8n^3} - \frac{21}{8n^4} + \frac{45}{8n^5} - \frac{93}{8n^6} + \dots \\
 A_n^{\text{Gq}} &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{3}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} + \frac{3}{2n^5} + \frac{1}{2n^6} + \dots \\
 A_n^{\text{GG}} &= \frac{33}{16} - \frac{f}{8} - \frac{9}{4}c - \frac{9}{4}\ln n - \frac{9}{8n} + \frac{75}{16n^2} - \frac{9}{2n^3} \\
 &\quad + \frac{2877}{160n^4} - \frac{63}{2n^5} + \frac{8065}{112n^6} + \dots \quad (14)
 \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned}
 \eta(n) &\equiv A_n^{\text{GG}} + A_n^{\text{qG}} = \frac{45 - 2f - 52c}{16} - \frac{13}{4}\ln n - \frac{13}{8n} + \frac{253}{48n^2} \\
 &\quad - \frac{5}{n^3} + \frac{8867}{480n^4} - \frac{32}{n^5} + \frac{73093}{1008n^6} + \dots \\
 \xi(n) &\equiv (A_n^{\text{GG}} - A_n^{\text{qG}})^2 + 8fA_n^{\text{Gq}}A_n^{\text{qG}} \\
 &= \frac{25}{16}(\ln n)^2 + \sum_{p=0}^1 \sum_{l=0}^{\infty} H_{pl} \frac{(\ln n)^p}{n^l} \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中系数 H_{pl} 见附录. 这样, 由(15)式可得

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{2}\eta s} &= e^{\frac{45-2f-52c}{32}s} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{13}{8}s} \sum_{k=0}^{\infty} G_k(s) \frac{1}{n^k} \\
 e^{A_n^+ s} + e^{A_n^- s} &= 2e^{\frac{1}{2}\eta s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{ki}^{(1)} \frac{(\ln n)^k}{n^i} \\
 \frac{e^{A_n^+ s} - e^{A_n^- s}}{A_n^+ - A_n^-} &= 2e^{\frac{1}{2}\eta s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{ki}^{(2)} \frac{(\ln n)^k}{n^i} \quad (16)
 \end{aligned}$$

这里的展开系数 $f_{ki}^{(1)}$, $f_{ki}^{(2)}$, G_k 都只是 s 的函数, 具体形式见附录. 把上述展开式代入 (8)、(9) 式, 得到:

$$F_{Gq}(n, t) = e^{\frac{45-2f-52c}{32}s} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{13}{8}s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} Q_{ki}^{(3)} \frac{(\ln n)^k}{n^i}$$

$$F_{GG}(n, t) = e^{\frac{45-2f-52c}{32}s} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{13}{8}s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} Q_{ki}^{(4)} \frac{(\ln n)^k}{n^i} \quad (17)$$

其中 $Q_{ki}^{(i)}$ 都只是 s 的函数:

$$Q_{ki}^{(3)} = \sum_{l=0}^i c_l^{(3)} f_{k,i-l}^{(2)} \quad (k, i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$c_0^{(3)} = 0, \quad c_1^{(3)} = 1, \quad c_2^{(3)} = 1 + G_1(s), \quad c_3^{(3)} = 3 + G_1(s) + G_2(s)$$

$$c_4^{(3)} = 1 + 3G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

$$c_5^{(3)} = 3 + G_1(s) + 3G_2(s) + G_3(s) + G_4(s) \quad (18.1)$$

.....

$$Q_{ki}^{(4)} = D_{ki} + \omega E_{ki} - \frac{5}{8} E_{k,i-1} + \frac{197}{48} E_{k,i-2} - 4E_{k,i-3}$$

$$+ \frac{1679}{96} E_{k,i-4} - 31E_{k,i-5} + \dots - \frac{5}{4} E_{k-1,i}$$

$$(k, i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$D_{ki} = \sum_{l=0}^i G_{i-l} f_{kl}^{(1)}, \quad E_{ki} = \sum_{l=0}^i G_{i-l} f_{kl}^{(2)}$$

$$\omega = \frac{21}{16} - \frac{f}{8} - \frac{5}{4} c$$

$$E_{ki} = 0, \text{ 若 } k < 0 \text{ 或 } i < 0 \quad (18.2)$$

为了完成积分(13), 需利用下列积分公式:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} dx x^{-s} = \frac{1}{n^{s+j}} = \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} dx x^{-s} \frac{(\ln n)^m}{n^{s+j}} = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial j^m} \left[\frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} \right] \quad (19)$$

利用(17)–(19)式, 即可求得

$$\tilde{F}_{Gq}(x, t) = e^{\frac{45-2f-52c}{32}s} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\frac{13}{8}s-1} \sum_{p,m=0}^{\infty} d_{pm}^{(3)} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^m \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^p$$

$$\tilde{F}_{GG}(x, t) = e^{\frac{45-2f-52c}{32}s} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\frac{13}{8}s-1} \sum_{p,m=0}^{\infty} d_{pm}^{(4)} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^m \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^p \quad (20)$$

其中

$$d_{0m}^{(i)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{13}{8}s + m\right)} \{Q_{0m}^{(i)} + \phi Q_{1m}^{(i)} + [\phi^2 - \phi'] Q_{2m}^{(i)}\}$$

$$\begin{aligned}
 & + [\phi^3 - 3\phi\phi' + \phi'']Q_{3m}^{(i)} \\
 d_{1m}^{(i)} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{13}{8}s + m\right)} \{-Q_{1m}^{(i)} - 2\phi Q_{2m}^{(i)} - 3(\phi^2 - \phi')Q_{3m}^{(i)}\} \\
 d_{2m}^{(i)} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{13}{8}s + m\right)} \{Q_{2m}^{(i)} + 3\phi Q_{3m}^{(i)}\} \\
 d_{3m}^{(i)} &= -Q_{3m}^{(i)} / \Gamma\left(\frac{13}{8}s + m\right) \quad (21)
 \end{aligned}$$

这里的 Psi 函数及其微商都是以 $\frac{13}{8}s + m$ 为宗量。

不久前, Duke 等人^[2]分析了大量实验结果, 拟合得到了随 Q^2 变化的夸克和胶子的分布函数表达式. 这一结果很好地符合分布函数随 Q^2 变化的行为. 我们选取其中 $Q_0^2 = 4(\text{GeV}/c)^2$ 处的分布函数作为我们求解 A-P 方程所需的初始输入, 即

$$\begin{aligned}
 xq(x, Q_0^2 = 4) &= 1.874x^{0.419}(1-x)^{3.46}(1+4.4x) + 1.265(1-x)^{8.05} \\
 xG(x, Q_0^2 = 4) &= 1.56(1-x)^6(1+9x) \quad (22)
 \end{aligned}$$

这些输入可以改写成如下形式

$$\sum_i K_i x^{a_i} (1-x)^{b_i} \quad (23)$$

其中 K_i, a_i, b_i 的数值由表 1 给出

表 1

	i	K_i	a_i	b_i
xq	1	1.874	0.419	3.46
	2	8.246	1.419	3.46
	3	1.265	0	8.05
xG	4	1.56	0	6
	5	14.04	1	6

为了完成最后的积分(12), 我们需要利用以下的积分公式

$$\begin{aligned}
 \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a (1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} &= x^a (1-x)^b \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_j(a, b, s) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j \\
 \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a (1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} \left(\ln \ln \frac{z}{x}\right)^p \\
 &= \frac{\partial^p}{\partial s^p} \int_x^1 \frac{dz}{z} z^a (1-z)^b \left(\ln \frac{z}{x}\right)^{s-1} \quad (24)
 \end{aligned}$$

其中函数 $\mathcal{A}_j(a, b, s)$ 见文献[7].

利用上述结果, 最终得到强子中胶子分布函数的表达式:

$$\begin{aligned}
 xG(x, t) = & e^{\frac{45-2f-52c}{32}t} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\frac{13}{8}t} \left\{ \sum_{i=1}^3 K_i x^{a_i} (1-x)^{b_i} \sum_{M=0}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^M \right. \\
 & \left[R_0^{(3)}(M, a_i, b_i, s) + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right) R_1^{(3)}(M, a_i, b_i, s) \right. \\
 & \left. + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^2 R_2^{(3)}(M, a_i, b_i, s) + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^3 R_3^{(3)}(M, a_i, b_i, s) + \dots \right] \\
 & + \sum_{i=4}^5 K_i x^{a_i} (1-x)^{b_i} \sum_{M=0}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^M \cdot \left[R_0^{(4)}(M, a_i, b_i, s) \right. \\
 & + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right) R_1^{(4)}(M, a_i, b_i, s) + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^2 R_2^{(4)}(M, a_i, b_i, s) \\
 & \left. \left. + \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^3 R_3^{(4)}(M, a_i, b_i, s) + \dots \right] \right\} \quad (25)
 \end{aligned}$$

其中系数 R_0, R_1, R_2, R_3 见附录。

公式(25)是本文给出的强子中胶子分布函数的解析表达式,这是一个级数表达式.可以看到,在初始输入(23)式形式下,随 Q^2 的演化是对这个初始输入逐级作 $\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ 和 $\left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)$ 因子修正,展开系数 R 是已知函数,如果需要,可以计算到任意高级项.

利用这个解析表达式,我们计算了各种 Q^2 值下的 $xG(x, t)$ 的值,它与 Duke 等人^[2]给出的贴合值很好符合. Duke 等人分析实验结果,给出在 $Q^2 = 90 (\text{GeV}/c)^2$ 时的 xG 的实验值(图 1),图中实线为我们的解析结果,两者很好符合(取 $\Lambda = 0.2 \text{ GeV}/c$).

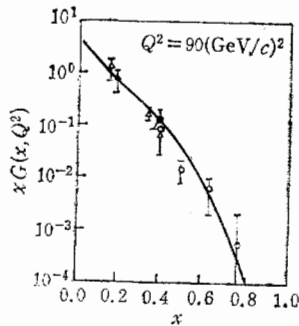


图 1

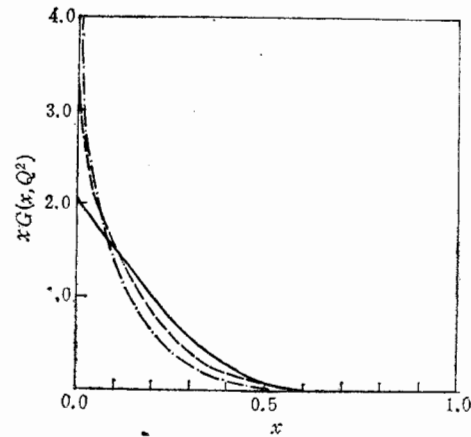


图 2

— $Q^2 = 10(\text{GeV})^2$ --- $Q^2 = 20(\text{GeV})^2$
 - · - $Q^2 = 100(\text{GeV})^2$

图 2 给出了在不同 Q^2 值下 $xG(x, t)$ 的行为. 可以看出, 胶子分布函数集中在 $x < 0.3$ 区域, 随着 Q^2 增大, 越来越向小 x 区域集中. 我们的计算还表明, 级数解析表达式(25)收敛得很快. 例如当 $Q^2 = 50 (\text{GeV}/c)^2$ 时, 取 $x = 0.1$, $xG(x, t)$ 表式(25)中

各项给出的贡献依次占整个贡献的 87.75%, 11.37%, 0.8305%, 0.0511%。在我们的计算中,取了(25)式前四项的贡献,由于级数收敛很快,这样选取已经十分精确了。在大 x 区域,上述收敛性更好。

由于我们得到了上述解析表达式,利用它就可以充分利用现有单态实验数据,了解到胶子分布函数的行为,进而可作更多的理论研究和唯象学研究。

附 录

(1) 公式(15)中的系数 H_{pi} :

$$\begin{aligned}
 H_{0c} &= \omega^2 & H_{1c} &= -\frac{5}{2}\omega \\
 H_{c1} &= -\frac{5}{4}\omega & H_{11} &= \frac{25}{16} \\
 H_{c2} &= \frac{25}{64} + \frac{197}{24}\omega + \frac{3}{4}f & H_{12} &= -\frac{985}{96} \\
 H_{03} &= -\frac{985}{192} - 8\omega - \frac{3}{4}f & H_{13} &= 10 \\
 H_{c4} &= \frac{50329}{2304} + \frac{1679}{48}\omega + \frac{21}{4}f & H_{14} &= -\frac{8395}{192} \\
 H_{05} &= -\frac{21003}{384} - 62\omega - \frac{39}{4}f & H_{15} &= \frac{155}{2} \\
 H_{c6} &= \frac{456907}{2304} + \frac{72077}{504}\omega + \frac{105}{4}f, & H_{16} &= -\frac{360385}{2016} \\
 & \dots & & \\
 \omega &= \frac{21 - 2f - 20c}{16}
 \end{aligned}$$

(2) 公式(16)中的 $G_k(s)$ 等:

$$\begin{aligned}
 G_0 &= 1, \quad G_1 = -\frac{13}{16}s, \quad G_2 = \frac{169}{512}s^2 + \frac{253}{96}s \\
 G_3 &= -\frac{2197}{24576}s^3 - \frac{3289}{1536}s^2 - \frac{5}{2}s \\
 G_4 &= \frac{1}{24}\left(\frac{13}{16}\right)^4 s^4 + \frac{169 \times 253}{512 \times 96} s^3 + \left[\frac{65}{32} + \frac{1}{2}\left(\frac{253}{96}\right)^2\right] s^2 + \frac{8867}{960}s \\
 G_5 &= -\frac{1}{120}\left(\frac{13}{16}\right)^5 s^5 - \frac{253}{576}\left(\frac{13}{16}\right)^3 s^4 - \left[\frac{845}{1024} + \frac{13}{32}\left(\frac{253}{96}\right)^2\right] s^3 \\
 &\quad - \left[\frac{13 \times 8867}{16 \times 960} + \frac{1265}{192}\right] s^2 - 16s \\
 &\quad \dots\dots
 \end{aligned}$$

$$f_{0i}^{(1)} = \delta_{0i} + \frac{1}{8} s^2 H_{0i} + \frac{1}{384} s^4 \sum_{l=0}^i H_{cl} H_{c,i-l}$$

$$f_{1i}^{(1)} = \frac{1}{8} s^2 H_{1i} + \frac{1}{192} s^4 \sum_{l=0}^i H_{0l} H_{1,i-l}$$

$$f_{2i}^{(1)} = \frac{25}{128} s^2 \delta_{0i} + \frac{1}{384} s^4 \sum_{l=0}^i H_{1l} H_{1,i-l} + \frac{25}{8} H_{0i}$$

$$f_{3i}^{(1)} = \frac{25}{3072} s^4 H_{ii}$$

$$f_{40}^{(1)} = \frac{1}{384} \left(\frac{25}{16} \right)^2 s^4$$

$$f_{0i}^{(2)} = \frac{s}{2} \delta_{0i} + \frac{1}{48} s^3 H_{ci} + \frac{1}{3840} s^5 \sum_{l=0}^i H_{c,l} H_{c,i-l}$$

$$f_{1i}^{(2)} = \frac{1}{48} s^3 H_{ii} + \frac{1}{1920} s^5 \sum_{l=0}^i H_{c,l} H_{1,i-l}$$

$$f_{2i}^{(2)} = \frac{25}{768} s^3 \delta_{0i} + \frac{1}{3840} s^5 \sum_{l=0}^i H_{1,l} H_{1,i-l} + \frac{25}{8} H_{0i}$$

$$f_{3i}^{(2)} = \frac{25}{30720} s^5 H_{ii}$$

$$f_{40}^{(2)} = \frac{1}{3840} \left(\frac{25}{16} \right)^2 s^5$$

(3) 公式(25)中的系数 R :

$$R_0^{(l)}(M, a, b, s) = \sum_{m=0}^M \left\{ d_{0m}^{(l)} \mathcal{A}_{M-m} \left(a-1, b, \frac{13}{8} s + m \right) + d_{1m}^{(l)} \mathcal{A}'_{M-m} + d_{2m}^{(l)} \mathcal{A}''_{M-m} + d_{3m}^{(l)} \mathcal{A}'''_{M-m} \right\}$$

$$R_1^{(l)}(M, a, b, s) = \sum_{m=0}^M \left\{ d_{1m}^{(l)} \mathcal{A}_{M-m} \left(a-1, b, \frac{13}{8} s + m \right) + 2d_{2m}^{(l)} \mathcal{A}'_{M-m} + 3d_{3m}^{(l)} \mathcal{A}''_{M-m} \right\}$$

$$R_2^{(l)}(M, a, b, s) = \sum_{m=0}^M \left\{ d_{2m}^{(l)} \mathcal{A}_{M-m} \left(a-1, b, \frac{13}{8} s + m \right) + 3d_{3m}^{(l)} \mathcal{A}'_{M-m} \right\}$$

$$R_3^{(l)}(M, a, b, s) = \sum_{m=0}^M d_{3m}^{(l)} \mathcal{A}_{M-m} \left(a-1, b, \frac{13}{8} s + m \right)$$

..... (l = 3, 4)

其中

$$\mathcal{A}'_{M-m} = \frac{\partial \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, x)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{13}{8}s+m}$$

$$\mathcal{A}''_{M-m} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=\frac{13}{8}s+m}$$

.....

参 考 文 献

- [1] A. J. Buras and K. J. Gaemers *Nucl. Phys.*, B132(1978), 249.
- [2] D. W. Duke and J. F. Owens *Phys. Rev.*, D30(1984), 49.
- [3] M. Glück E. Hoffmann and E. Reya *Z. Phys.*, C13(1982), 119. R. Baier, J. Engels and B. Pettersson *Z. Phys.*, C2(1979), 265.
- [4] G. Altarelli and G. Parisi *Nucl. Phys.*, B26(1977), 298.
- [5] L. F. Abbott and R. M. Barnett *Ann. Phys.*, 125(1980), 276.
- [6] W. Furmanski and R. Petronzio *Nucl. Phys.*, B195(1982), 237.

- [7] 沈齐兴, 吴济民, 陆景贤, 赵佩英, 高能物理与核物理 7(1983)170, 301, 309.
张美曼, 沈齐兴, 吴济民, 陆景贤, 赵佩英, 高能物理与核物理 7(1983)5.
吴济民, 陆景贤, 赵佩英, 高能物理与核物理 8(1984)10.
- [8] C. M. Wu (吴济民) *Nucl. Phys.*, B167(1980), 349.

THE QCD PREDICTIONS FOR THE GLUON DISTRIBUTION FUNCTION IN HADRONS

WU JIMIN SHEN QIXING

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

SONG XIAOTONG ZHANG HONGXIAN DU JIANGUO

(Hangzhou University)

ABSTRACT

Using the Mellin transformation, we get the analytical series expression for the gluon distribution function from Altarelli-Parisi equation. This series converges rapidly. The behaviour of the gluon distribution function is also discussed from this expression.