第13卷 第7期 高能物理与核物理 Vol. 13, No. 7
1989年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1989

Torus 上一般复结构的 Virasoro 代数*

徐开文
(浙江大学物理系,杭州)

沈建民
(中国科学院理论物理研究所,北京)

摘要

我们讨论了 torus 上一般度规下,复结构的形式和相应的能量动量张量 $T(z),T(\bar{z})$;并在 τ 度规下,解 torus 上的玻色弦及其鬼的运动方程,得到了弦场和鬼场通解形式;最后我们给出了 torus 上一般复结构的 Virasoro 代数,并证明了不同复结构上的 Virasoro 代数相同.

一、引言

长期以来,存在着一个未经证明的工作假定,那就是:"不同的复结构,它们的 Virasoro 代数相同."物理学家从弦中在取度规为 $(g_{ab})=e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$特殊复结构下,得到了 Virasoro 代数,并由此得出弦的临界维数为 26 或 10. 但对于非正交共形度规,也就是说一般复结构下,弦模型的约束 L_A 的代数关系是否仍是 Virasoro 代数,在此复结构下弦的临界维数是否仍是 26 或 10,则没有给出证明,只是作为一个假设接受下来. 本文通过讨论一般复结构下能量动量张量形式和 torus 上玻色弦运动方程的通解,证明了对于 torus 上不同复结构的 Virasoro 代数相同,弦的临界维数及谱参数不随复结构选取而改变. 亏格数 $g>1$ 的情况有待进一步探讨.

我们首先从 torus 上度规一般形式 $(g_{ab})=e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & \tau_1\\ \tau_1 & |\tau|^2\end{pmatrix}$出发,得到 torus 上复结构的一般描述,利用该描述得到了 torus 上取一般复结构时能量动量张量通式,从而证明了能量动量张量在 torus 上一般复结构(以后为方便称为 τ 复结构)下,也能分成解析 $T(z)$ 与反解析 $T(\bar{z})$ 两部分. 然后我们利用文献 [1] 给出的 BRS 不变的玻色弦作用量,在 torus 上 τ 复结构下,求解玻色弦运动方程和鬼场的运动方程,得到弦和鬼场的解. 我们改写文献[1]的以 x, y 为参量的拉氏量 $\mathscr{L}(x, y)$, 为以 z 和 $\bar{z}$ 为参量的拉氏量 $\mathscr{L}(z, \bar{z})$, 其形式与 H. Sonoda (文献[2])在 $(g_{ab})=e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 的特殊复结构下拉氏量 $\mathscr{L}$

---

* 本文由国家自然科学基金资助.
本文1988年6月6日收到.

$(z,\bar{z})$ 形式相同，但我们的结果是在 τ 复结构下得到的．最后我们利用 τ 复结构下 $T(z)$ 的明显形式与弦场．鬼场的解，得到了 τ 复结构的玻色弦的 Virasoro 代数和相应的鬼的 Virasoro 代数，从中看出它们的代数结构与 τ 无关，因此证明了 torus 上任意复结构的 Virasoro 代数形式相同，进而玻色弦的临界维数及谱参数在任意复结构都是 $D=26$，$\alpha_0=1$．

二、τ 复结构和它的能量动量张量

$g=1$ 的黎曼面是 torus，它可以看成是全纯上半平面 $\Gamma(z)$ 抹去一个二维格阵 Λ，即 $\Gamma(z)/\Lambda$．由文献[3]可知，torus 上可整体定义度量：

$$ds^2 = e^{\varphi}|dx+\tau dy|^2 \tag{1}$$

度规

$$(g_{ab}) = e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2\end{pmatrix} \tag{2}$$

其中 e^{φ} 是共形因子；τ 是 moduli 参量，$\tau=\dfrac{W_2}{W_1}$；W_2，W_1 分别是二维格阵 Λ 的两个边长．τ 又可写成 $\tau=\tau_1+i\tau_2$，τ_1，τ_2 都是实数．此度量具有共形不变的性质，τ 取不同的值，相应的 (g_{ab}) 代表不同的复结构．注意，我们考虑的区域是 τ 的基本区域，在基本区域内的 τ 与基本区域外的 τ，若相差一个 moduli 变换，仍表示同一复结构．在一般 $g>1$ 的黎曼面上 τ 是 (x,y) 的函数，$g=1$ 是一个特殊情况，此时 τ 不是 (x,y) 的函数．

为讨论方便，以下我们称度规为 $(g_{ab})=e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2\end{pmatrix}$ 的一般形式的复结构为 τ 复结构．

计算表明，τ 复结构中，解析参量 z 与反解析参量 $\bar{z}$ 应该取为：

$$z = W_1x + W_2y;\quad \bar{z} = \overline{W}_1x + \overline{W}_2y \tag{3}$$

(x,y) 与 $(z,\bar{z})$ 偏导数关系：

$$\frac{\partial}{\partial x} = W_1\frac{\partial}{\partial z} + \overline{W}_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\qquad \frac{\partial}{\partial y} = W_2\frac{\partial}{\partial z} + \overline{W}_2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{W_1\overline{W}_2 - W_2\overline{W}_1}\left(\overline{W}_2\frac{\partial}{\partial x} - \overline{W}_1\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{W_2\overline{W}_1 - W_1\overline{W}_2}\left(W_2\frac{\partial}{\partial x} - W_1\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{5}$$

利用(3)式，通过运算，我们可以把 torus 上度量表示为：

$$ds^2 = e^{\varphi}\frac{1}{W_1\overline{W}_1}dzd\bar{z} \tag{6}$$

$$g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0,\quad g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{W_1\overline{W}_1} \tag{7}$$

当 $\tau=i$ 时 $(W_2=i,W_1=1)$，度规 $(g_{ab})=e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 为正交度规，此时：

$$z = x+iy,\quad \bar{z} = x-iy \tag{8}$$

$$ds^2 = e^{\varphi} dz d\bar{z} \tag{9}$$

回到了我们通常用的复结构.

现在,让我们来讨论能量动量张量在此 τ 复结构下的表示式.

我们选取二维时空上具有微分同胚和标度不变性的作用量作为考虑对象. 此作用量的能量动量张量 $T_{ab}(a, b=1, 2)$ 的迹显然为零, 并且由于是在弯曲面 torus 上, 因此 T_{ab} 的偏导数不为零,而是协变导数为零.

$$T^a_a = 0 \tag{10}$$

$$T^a_{b;a} = T^a_{b,a} + \Gamma^a_{ac}T^c_b - \Gamma^c_{ba}T^a_c = 0 \tag{11}$$

T_{ab} 是 (x, y) 的函数,它的偏导数也是对 (x, y) 进行,为了得到解析片上 $T(z)$与反解析片上 $T(\bar{z})$ 的表达式,我们利用(5)式, 用 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 替代(11)式中的 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$,再利用(10)式,经过运算,(11)式可化为以下两个方程:

$$\partial_z(\tau^2 T_{11} - 2\tau T_{12} + T_{22}) = 0 \tag{12}$$

$$\partial_{\bar{z}}(\bar{\tau}^2 T_{11} - 2\bar{\tau} T_{12} + T_{22}) = 0 \tag{13}$$

因此我们得到 $T(z)$ 和 $T(\bar{z})$ 的明显形式:

$$T(z) = \bar{\tau}^2 T_{11} - 2\bar{\tau} T_{12} + T_{22} \tag{14}$$

$$T(\bar{z}) = \tau^2 T_{11} - 2\tau T_{12} + T_{22} \tag{15}$$

为了以后讨论方便,我们再次利用(10)式,化简 $T(z)$ 和 $T(\bar{z})$:

$$T(z) = -2i\tau_2(\bar{\tau} T_{11} - T_{12}) \tag{16}$$

$$T(\bar{z}) = 2i\tau_2(\tau T_{11} - T_{12}). \tag{17}$$

到此, 我们已得到了拓扑为 torus 的二维世界面上具有微分同胚和标度不变性的作用量在 τ 复结构时的能量动量张量 $T(z)$ 和 $T(\bar{z})$.

当 $\tau = i(W_2 = i, W_1 = 1)$ 时:

$$T(z) = -2T_{11} + 2iT_{12} \tag{18}$$

$$T(\bar{z}) = -2T_{11} - 2iT_{12}. \tag{19}$$

回到 B、P、Z 文献[4]的结果.

三、运动方程及其解

由文献[1], BRS 不变的一次量子化玻色弦的作用量为:

$$S = \int dx dy \sqrt{g}\left(-\frac{1}{2} g^{ab}\partial_a \chi^\mu \partial_b \chi^\mu + \bar{C}_{ab} g^{ac} \nabla_c C^b\right) \tag{20}$$

对此作用量 S 做 χ^μ, C^a, $\bar{C}_{ab}$ 变分得到弦,鬼,反鬼运动方程:

$$\partial_a(\sqrt{g}\, g^{ab}\partial_b)\chi^\mu = 0 \tag{21}$$

$$g^{ac}\nabla_c C^b = 0 \tag{22}$$

$$g^{ac}\nabla_c \bar{C}_{ab} = 0 \tag{23}$$

把 $(g_{ab})=e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & \tau_1\\ \tau_1 & |\tau|^2\end{pmatrix}$ 形式代入(21)—(23)式，利用 g_{ab}，$\bar{C}_{ab}$ 关于 a，b 指标对称条件，化简可得:

$$|\tau|^2\partial_1^2\chi^\mu+\partial_2^2\chi^\mu-2\tau_1\partial_1\partial_2\chi^\mu=0 \tag{24}$$

$$\begin{cases}-\tau_1\partial_2C^1+\dfrac{1}{2}|\tau|^2(\partial_1C^1-\partial_2C^2)=0\\[2ex] -\tau_1\partial_1C^2-\dfrac{1}{2}(\partial_1C^1-\partial_2C^2)=0\end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases}-\tau_1\partial_1\bar{C}_{11}-(|\tau|^2-2\tau_1^2)\partial_2\bar{C}_{11}-\partial_2\bar{C}_{22}+\tau_1\partial_1\bar{C}_{22}=0\\ -|\tau|^4\partial_1\bar{C}_{11}+\tau_1\partial_2\bar{C}_{11}-\tau_1|\tau|^2\partial_2\bar{C}_{22}+(-|\tau|^2+2\tau_1^2)\partial_1\bar{C}_{22}=0\end{cases} \tag{26}$$

在 torus 上，闭玻色弦及其鬼的边界条件是

$$\text{左运动:}\begin{cases}\chi^\mu_{(x,y)}=\chi^\mu_{\left(x+\frac{2\pi}{W_1},y\right)}=\chi^\mu_{\left(x,y+\frac{2\pi}{W_2}\right)}\\ C^a_{(x,y)}=C^a_{\left(x+\frac{2\pi}{W_1},y\right)}=C^a_{\left(x,y+\frac{2\pi}{W_2}\right)}\\ \bar{C}^{ab}_{(x,y)}=\bar{C}^{ab}_{\left(x+\frac{2\pi}{W_1},y\right)}=\bar{C}^{ab}_{\left(x,y+\frac{2\pi}{W_2}\right)}\end{cases} \tag{27}$$

$$\text{右运动:}\begin{cases}\chi^\mu_{(x,y)}=\chi^\mu_{\left(x+\frac{2\pi}{\bar{W}_1},y\right)}=\chi^\mu_{\left(x,y+\frac{2\pi}{\bar{W}_2}\right)}\\ C^a_{(x,y)}=C^a_{\left(x+\frac{2\pi}{\bar{W}_1},y\right)}=C^a_{\left(x,y+\frac{2\pi}{\bar{W}_2}\right)}\\ \bar{C}^{ab}_{(x,y)}=\bar{C}^{ab}_{\left(x+\frac{2\pi}{\bar{W}_1},y\right)}=\bar{C}^{ab}_{\left(x,y+\frac{2\pi}{\bar{W}_2}\right)}\end{cases} \tag{28}$$

利用边界条件解方程得解:

$$\chi^\mu=\chi_0^\mu+\frac{i}{2}\sum_{m\neq0}\frac{1}{m}\alpha_m^\mu e^{-im(W_1x+W_2y)}+\frac{i}{2}\sum_{m\neq0}\frac{1}{m}\tilde{\alpha}_m^\mu e^{-im(\bar{W}_1x+\bar{W}_2y)} \tag{29}$$

$$\begin{cases}C^1=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_me^{-im(W_1x+W_2y)}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{C}_me^{-im(\bar{W}_1x+\bar{W}_2y)}\\[3ex] C^2=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{-1}{\bar{\tau}}C_me^{-im(W_1x+W_2y)}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{-1}{\tau}\tilde{C}_me^{-im(\bar{W}_1x+\bar{W}_2y)}\end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases}\bar{C}_{11}=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{C}_me^{-im(W_1x+W_2y)}-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{\tilde{C}}_me^{-im(\bar{W}_1x+\bar{W}_2y)}\\[3ex] \bar{C}_{22}=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tau^2\hat{C}_me^{-im(W_1x+W_2y)}-\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\tau|^2\hat{\tilde{C}}_me^{-im(\bar{W}_1x+\bar{W}_2y)}\end{cases} \tag{31}$$

其中 $\alpha_m,C_m,\hat{C}_m$ 是左运动的产生消灭子，对应于解析片; $\tilde{\alpha}_m,\tilde{C}_m,\hat{\tilde{C}}_m$ 是右运动的产生消灭子，对应于反解析片.

由玻色弦 χ^μ 与其共轭量的对易关系，以及鬼与反鬼的反对易关系，可得:

$$\begin{cases}[\alpha_n^\mu,\alpha_m^\nu]=\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}\\ \{C_n,\hat{C}_m\}=\delta_{m+n,0}\\ \text{其它为零}\end{cases} \tag{32}$$

和

$$\begin{cases}[\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \\ \{\tilde{C}_n, \hat{\tilde{C}}_m\} = \delta_{m+n,0} \\ \text{其它为零}\end{cases} \tag{33}$$

由于在解析片中的(32)式与在反解析片中的(33)式形式完全一样,且相互无关,因此为简便起见,我们以后只处理解析片情况,所得结果可直接用于反解析片(只需把 z 换成 $\bar{z}$).

利用 τ 复结构的 z 和 $\bar{z}$ 的表示,我们把文献[1]改写为:

$$S = \int dz d\bar{z}\sqrt{g}\,(g^{z\bar{z}}\partial_z\chi^\mu\partial_{\bar{z}}\chi^\mu + b_{zz}\nabla^z C^z + \bar{b}^{\bar{z}\bar{z}}\nabla_z\bar{C}_{\bar{z}}) \tag{34}$$

其中:

$$\nabla^z = g^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}},\ \nabla_z = \partial_z + g_{z\bar{z}}\partial_z g^{z\bar{z}} \tag{35}$$

此作用量 S 的形式与 H. Sonoda 文献[2]给出的作用量形式一样,但我们的结果是在 τ 复结构下得到的.

四、τ 复结构的 Virasoro 代数

对(20)式给出的作用量 S,作度规 g_{ab} 的变分,我们可得到含鬼的玻色弦能量动量张量 T_{ab}.

$$T_{ab} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = T_{ab}^{\chi} + T_{ab}^{gh} \tag{36}$$

$$T_{ab}^{\chi} = \partial_a\chi^\mu\partial_b\chi^\mu - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\partial_c\chi^\mu\partial_d\chi^\mu \tag{37}$$

$$T_{ab}^{gh} = \frac{1}{2}[\bar{C}_{ea}\nabla_b C^e + \bar{C}_{eb}\nabla_a C^e + (\nabla_e\bar{C}_{ab})C^e - g_{ab}\bar{C}_{ef}\nabla^e C^f] \tag{38}$$

利用(16)式,我们把(36)式写成解析片的形式:

$$\begin{aligned}T(z) &= -2i\tau_2(\bar{\tau}T_{11} - T_{12}) \\ &= -2i\tau_2(\bar{\tau}T_{11}^{\chi} - T_{12}^{\chi}) - 2i\tau_2(\bar{\tau}T_{11}^{gh} - T_{12}^{gh})\end{aligned} \tag{39}$$

把 χ^μ, C^a 和 $\bar{C}^{ab}$ 的解的形式及 g_{ab} 的具体表示代入(37)和(38)两式,求出 T_{11}^{χ}, T_{12}^{χ}, T_{11}^{gh} 和 T_{12}^{gh},再代入(39),通过冗长的运算,最后得:

$$T(z) = -i\tau_2^2\sum_{n,m} e^{-inz}\alpha_{n-m}^\mu\alpha_m^\mu - i\tau_2^2\sum_{n,m} e^{-inz}(n-m)\hat{C}_{n+m}C_{-m} \tag{40}$$

因此 τ 复结构的 Virasoro 代数生成元 L_n 为:

$$L_n = L_n^{\chi} + L_n^{gh} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-m}^\mu\alpha_m^\mu + \sum_{m=-\infty}^{\infty}(n-m)\hat{C}_{n+m}C_{-m} \tag{41}$$

代数关系:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \tag{42}$$

此 τ 复结构的 Virasoro 代数与 $\tau = i$, $(g_{ab}) = e^\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$特殊复结构的 Virasoro 代数完全一样. 到此,我们已证明了 torus 上的 Virasoro 代数与复结构选取无关.

量子化后 L_n 为:

$$L_n = \sum_m :\alpha^\mu_{n-m}\alpha^\mu_m: + \sum_m (n-m):\hat{C}_{m+n}C_{-m}: - \alpha_0\delta_{n,0}$$

代数关系：

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(D-26)(m^3-m)\delta_{m+n,0} + 2m(\alpha_0 - 1)\delta_{m+n,0} \quad (43)$$

(43)式的后两项是共形反常，为了消除这个反常，我们选择玻色弦的维数 D 和谱参数 α_0 分别为：

$$D = 26, \quad \alpha_0 = 1 \quad (44)$$

它们不含 moduli 参量 τ，并与通常所取的 $(g_{ab}) = e^\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 复结构得到的结果相同。因此玻色弦维数和谱参量都与复结构选取无关。

五、总　结

以上，我们已构造了 torus 上，一般复结构的表示，以及在该复结构下，二维微分同胚和标度不变的作用量的能量动量张量。证明了 torus 上，Virasoro 代数，弦的维数和谱参数与复结构选取无关。这样对于不同的复结构，它们的 Virasoro 代数相同，这个工作假设，我们在 torus 上给出了证明。关于高亏格 ($g > 1$) 的黎曼面，这个工作假定的验证有待进一步的探讨。

感谢汪容教授对我们的关心和支持，感谢郭汉英研究员，王世坤副研究员同我们所作的非常有益的讨论。

参 考 文 献

[1] M. D. Freeman and D. I. Olive, *Phys. Lett.*, **B175**(1986), 151.
[2] H. Sonoda, *Phys. Lett.*, **B184**(1987), 336.
[3] L. Alvarez and P. Nelson, *Preprint.*, CERN-TH 4615/86
[4] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodochikov, *Nucl. Phys.*, **B241**(1984), 333.

THE VIRASORO ALGEBRA ON TORUS WITH GENERAL METRIC

Xu Kaiwen
(Zhejiang University, Hangzhou)

Shen Jianmin
(Institute of Theoretical Physics of Academia Sinica, Beijing)

Abstract

We discuss the Virasoro algebra on torus with a general metric. First we give the complex structure and the stress-energy tensor on torus with a general metric. Then we solve the equations of motion for bosonic string and their ghost fields under the general metric, and obtain the general solutions of the equations. Finally, we give the Virasoro algebra on torus with a general complex structure, and show that different complex structures have the same Virasoro algebras.