四维杂化弦

龚尚庆　曲立湖　余寿绵
（山东大学物理系，济南）

摘　要

利用十维 N-S 玻色弦和四维费米弦杂化，我们给出了四维杂化弦．其内部规范对称群为 $[SU(2)]^6$．它的基态包含有四维时空的超引力多重态及四维超杨-Mills 规范多重态．四维杂化弦具有超对称、无快子态及洛仑兹不变等特性．

引　言

近年来，作为大统一理论的热门候选者——超对称弦理论有了很大的发展．1981 年，Green、Schwarz 首次把超对称与弦理论结合起来，得到了十维时空中的超对称弦理论[1,2]；1984—1985 年，Gross 等又提出了一种新的十维超对称弦理论——十维杂化弦理论[3]．它是由十维 G-S 超对称费米弦与 26 维玻色弦[4]杂化而成．十维超对称杂化弦的基态包含十维时空的超引力多重态及超杨-Mills 规范多重态．它的提出，在探寻引力量子化和统一四种相互作用的道路上迈出了一大步．

但是，真实的物理世界是建立在四维时空中的．这就促使我们去讨论四维时空中的弦模型．复旦大学的陈伟和同济大学的赵卫东通过对十维时空的超对称协变弦理论[5]的修正，得到了四维超对称费米弦模型[6]．作为寻找大统一理论的一种尝试，在这里，我们利用十维杂化弦的构造机制，将十维 N-S 玻色闭弦[7]与四维费米闭弦杂化，得到了一种新的四维杂化弦．

本文第一部分讨论四维杂化弦，第二部分讨论它的内部规范对称性，最后是讨论．

一、四维杂化弦

类似于十维超对称杂化弦，四维杂化弦的物理自由度是一些两维无质量场．右移费米闭弦 $X^i(\tau-\sigma)(i=1,2)$、$S^a(\tau-\sigma)\,(a=1,2)$ 决定了右振动模式的两维自由场的性质；左移 N-S 玻色闭弦由 $X^i(\tau+\sigma)$、$X^I(\tau+\sigma)(I=1,\cdots,6)$、$\lambda^l(l=1,\cdots,8)$ 来描述左振动模式的两维自由场．其正则展开式为[6,7]：

本文 1988 年 7 月 4 日收到．

$$X^i(\tau-\sigma)=\frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}p^i(\tau-\sigma)+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^i\exp[-2in(\tau-\sigma)],$$

$$X^i(\tau+\sigma)=\frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}p^i(\tau+\sigma)+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^i\exp[-2in(\tau+\sigma)],$$

$$X^I(\tau+\sigma)=x^I+\tilde{p}^I(\tau+\sigma)+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^I\exp[-2in(\tau+\sigma)],$$

$$S^a(\tau-\sigma)=\sum_n S_n^a\exp[-2in(\tau-\sigma)],$$

$$\lambda^l(\tau+\sigma)=\sum_r\tilde{b}_r^l\exp[-2in(\tau+\sigma)]. \tag{1.1}$$

其中 n 取所有整数，r 取所有半整数．上式中已取：

$$\alpha_0^i=\tilde{\alpha}_0^i=\frac{1}{2}p^i,$$

$$\tilde{\alpha}_0^I=\tilde{p}^I. \tag{1.2}$$

在光锥规范下实施正则量子化，给出四维杂化弦各种振动模式的对易关系为：

$$[\alpha_m^i,\alpha_n^j]=[\tilde{\alpha}_m^i,\tilde{\alpha}_n^j]=m\delta_{m+n,0}\delta^{ij},$$

$$\{S_m^a,\bar{S}_n^b\}=(\gamma^+)^{ab}\delta_{m+n,0},\ \ [x^i,p^j]=i\delta^{ij},$$

$$[\tilde{\alpha}_m^I,\tilde{\alpha}_n^J]=m\delta_{m+n,0}\delta^{IJ},$$

$$\{\tilde{b}_r^l,\tilde{b}_s^g\}=\delta_{r+s,0}\delta^{lg},\ \ [x^I,\tilde{p}^J]=\frac{1}{2}i\delta^{IJ}, \tag{1.3}$$

其余的对易子和反对易子均为零．

x^I 与 $\tilde{p}^J$ 对易关系中的因子 1/2，是由于 X^I 只是 $(\tau+\sigma)$ 的函数而造成的．这意味着 $2\tilde{p}^I$ 才是相应于内部空间参量 x^I 的平移生成元．

在四维时空中，费米态由光锥规范下的 Majorana 旋量 $S^{Aa}(A=1,2$、$a=1,2)$ 来描述．其中

$$\gamma^+S=0 \tag{1.4}$$

γ 为四维 Majorana 表示的 Dirac 矩阵．在光锥规范里，坐标

$$X^+(\sigma,\tau)=x^++p^+\tau,$$

$$X^-(\sigma,\tau)=x^-+p^-\tau+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}[\alpha_n^-e^{-2in(\tau-\sigma)}+\tilde{\alpha}_n^-e^{-2in(\tau+\sigma)}] \tag{1.5}$$

其中 α_n^- 由四维费米弦给出：

$$\alpha_n^-=\frac{1}{p^+}\sum_m\alpha_{n-m}^i\alpha_m^i+\frac{1}{2p^+}\sum_m(m-n/2)S_{n-m}\gamma^-S_m$$
$$+\frac{1}{2}:nCE_{ij}R_n^{ij}. \tag{1.6}$$

其中，E_{ij} 为二维 Levi-Civita 张量．

$$R_n^{ij}=\frac{i}{8}\sum_{m=-\infty}^{\infty}:S_{n-m}\gamma^{ij}-S_m:$$

利用四维费米弦洛仑兹不变性可以定出 $c^2=6$.

$\tilde{\alpha}_n^-$ 则由 N-S 玻色弦给出：

$$\tilde{\alpha}_n^- = \frac{1}{p^+}\sum_m (\tilde{\alpha}_{n-m}^i\tilde{\alpha}_m^i + \tilde{\alpha}_{n-m}^I\tilde{\alpha}_m^I) + \frac{1}{2p^+}\sum_{r\in z+1/2}(r-n/2)\tilde{b}_{n-r}^I\tilde{b}_r^I \tag{1.7}$$

由(1.5)式可以看出:

$$p^- = \alpha_0^- + \tilde{\alpha}_0^- \tag{1.8}$$

由 $M^2 = 2p^+p^- - (p^i)^2$,得到四维杂化弦的质壳条件为:

$$\frac{1}{4}M^2 = N + \tilde{N} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tilde{p}^I\tilde{p}^I. \tag{1.9}$$

考虑到闭弦参量 σ 的起始任意性,N和 $\tilde{N}$ 应满足限制条件:

$$N = \tilde{N} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tilde{p}^I\tilde{p}^I. \tag{1.10}$$

其中,$N(\tilde{N})$ 表示右(左)振动模式的正规顺序算子数目:

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \frac{n}{2}S_{-n}\gamma^- S_n\right). \tag{1.11}$$

$$\tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^I\tilde{\alpha}_n^I) + \sum_{r=1/2}^{\infty}r\tilde{b}_{-r}^I\tilde{b}_r^I. \tag{1.12}$$

(1.9)式右边的常数项“1/2”来自 $\tilde{N}$ 的正规顺序. $\tilde{p}^I\tilde{p}^I$ 来自 N-S 玻色弦内部空间紧致化. (1.10)式要求 $\tilde{p}^I\tilde{p}^I$ 取整数.

由此可得四维杂化弦的最低质量态为一零质量态:

$$M^2 = 0,$$
$$N = \tilde{N} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tilde{p}^I\tilde{p}^I = 0. \tag{1.13}$$

从而使四维杂化弦排除了快子态作为基态的这一不合理性.

由于四维杂化弦的左、右两部分振动模式相互独立,不具有 $\sigma\to\sigma-\pi$ 变换下的对称性,因此是一种定向闭弦. 它的物理态为左右两部分振动模式的直积:

$$|\rangle = |\rangle_R \otimes |\rangle_L. \tag{1.14}$$

右移四维费米弦基态为两个玻色子态 $|i\rangle_R$ 及两个费米态 $|a\rangle_R$; 左移 N-S 玻色弦基态为一快子态 $|\rangle_L$. 它不满足限制条件 (1.10),因此被消去. 其第一激发态由 $\tilde{b}_{-1/2}^i|0\rangle_L$、$\tilde{b}_{-1/2}^I|0\rangle_L$ 及 $|\tilde{p}^I:\tilde{p}^I\tilde{p}^I=1\rangle_L$ 来描述. 因此四维杂化弦的基态态谱为:

$$|i\rangle_R\otimes\tilde{b}_{-1/2}^i|0\rangle_L, \qquad (2\times 2)$$
$$|a\rangle_R\otimes b_{-1/2}^i|0\rangle_L. \qquad (2\times 2)$$

组成四维时空超引力多重态;而

$$|i\rangle_R\otimes\tilde{b}_{-1/2}^I|0\rangle_L, \qquad (2\times 6)$$
$$|i\rangle_R\otimes|\tilde{p}^I\tilde{p}^I=1\rangle_L, \qquad (2\times n)$$
$$|a\rangle_R\otimes\tilde{b}_{-1/2}^I|0\rangle_L, \qquad (2\times 6)$$
$$|a\rangle_R\otimes|\tilde{p}^I\tilde{p}^I=1\rangle_L. \qquad (2\times n)$$

组成四维时空的超杨-Mills 规范多重态. 其中 6 对应于内部规范对称群的零根个数. n 对应于非零根个数. 规范多重态 $|\tilde{p}^I:\tilde{p}^I\tilde{p}^I=1\rangle$ 的产生,对应于 N-S 玻色弦的内部空间

紧致化.

从四维杂化弦的基态态谱中可以看出，它具有相同数目的玻色态及费米态. 因此四维杂化弦是一种超对称弦,它具有与四维费米弦相同的超对称生成元:

$$Q^a = i\sqrt{p^+}(\nu^+S_0)^a + i\frac{1}{\sqrt{p^+}}\sum_n(\nu_iS_{-n})^a\alpha_n^i,$$
$$\{Q^a, \bar{Q}^b\} = -2(\nu\cdot p)^{ab}. \tag{1.15}$$

它作用在四维杂化弦右移费米弦态上.

四维杂化弦的洛仑兹生成元为 $J^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + J_R^{\mu\nu} + J_L^{\mu\nu}(\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$. 其中 $l^{\mu\nu}$、$J_R^{\mu\nu}$ 表示作用在右移费米弦态上的洛仑兹生成元. 而 $l^{\mu\nu}$、$J_L^{\mu\nu}$ 则表示作用在左移 N-S 玻色弦振动模式上的生成元. 因此,四维杂化弦具有四维时空中的洛仑兹不变性.其不变性等效于四维时空的超对称费米弦的洛仑兹不变性及十维时空的 N-S 玻色弦的洛仑兹不变性.

二、四维杂化弦的内部规范对称性

四维杂化弦的内部规范对称群来自左移十维 N-S 玻色弦中六维内部空间紧致化. 将 N-S 玻色弦从十维时空紧致到四维时空,其中有六个空间维度 $(X^I: I = 1, \cdots, 6)$ 被紧致为内部空间. 选取紧致空间为一平直 $(\eta_{IJ} = \delta^{IJ})$ 的六维环(环半径为 R). 用 e_I 表示六维环上第 I 方向的单位基矢 $(e_Ie_J = \delta_{IJ})$. 紧致化以后, N-S 玻色闭弦的内部空间坐标 X^I 的边界条件修正为[8]:

$$X^I(\pi+\sigma, \tau) = X^I(\sigma, \tau) + 2R\pi\sum n_ie_i^I \quad (e_i^I = \delta_i^I). \tag{2.1}$$

其中 n_i 取整数,在拓扑学上称为绕数. 指 σ 从零变化到 π 时, 闭弦绕环在第 I 方向上缠绕的次数.

相应地, X^I 的正则展开式为:

$$X^I(\sigma,\ \tau) = x^I + p^I\tau + 2L^I\sigma + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I\exp[-2in(\tau-\sigma)]$$
$$+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^I\exp[-2in(\tau+\sigma)]. \tag{2.2}$$

其中,

$$L^I = R\sum n_ie_i^I. \tag{2.3}$$

相应于 X^I 的平移生成元为:

$$p^I = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{6} n_ie_i^I. \tag{2.4}$$

(2.2)式可以分解为左、右两部分振动模式:

$$X^I(\tau-\sigma) = \frac{1}{2}x^I + \left(\frac{1}{2}P^I - L^I\right)(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I\exp[-2in(\tau-\sigma)], \tag{2.5}$$

$$X^I(\tau+\sigma) = \frac{1}{2}x^I + \left(\frac{1}{2}P^I + L^I\right)(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^I\exp[-2in(\tau+\sigma)]. \tag{2.6}$$

当存在绕数项时,左、右两部分振动模式 $X^I(\tau-\sigma)$、$X^I(\tau+\sigma)$ 是完全独立的[3]. 在四维杂化弦里,只存在左振动模式,因此我们只取

$$X^I(\tau+\sigma)=x^I+\tilde{p}^I(\tau+\sigma)+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^I\exp[-2in(\tau+\sigma)]. \tag{2.7}$$

其中 $2\tilde{p}^I$ 才是相应于 x^I 的平移生成元:

$$\tilde{p}^I=\frac{1}{2R}\sum_i n_i e_i^I. \tag{2.8}$$

比较(2.6)、(2.7),有

$$\tilde{p}^I=2L^I. \tag{2.9}$$

从而定出 $R=1/2$. 代入(2.8)式得:

$$\tilde{p}^I=\sum_i n_i e_i^I. \tag{2.10}$$

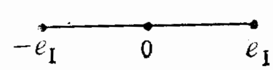
其中 n_i 取不等于零的整数.

对于无质量规范多重态 $|\tilde{p}^I\tilde{p}^I=1\rangle$, 有

$$\tilde{p}^I\tilde{p}^I=1=\sum n_i^2 \quad (i=1,\cdots,6). \tag{2.11}$$

于是得 12 个可能的解 $n_i=\pm 1$, 代入 (2.10) 式可得出内部规范对称群的 12 个非零根 $\pm e_I$.

因此,我们所要寻找的内部规范对称群有六个零根,12 个非零根. 对于每一个固定的 I, 有两个非零根 $(\pm e_I)$ 及一个零根 ($\tilde{p}^I$ 对应于 $\tilde{\alpha}_0^I$), 其根图为:



与之相应的只有 $SU(2)$ 李代数. 因此,通过对 N-S 玻色弦紧致化, 我们得到四维杂化弦的内部规范对称群为 $[SU(2)]^6$. 18 个无质量规范粒子属于它的伴随表示.

利用 Kac-Moody 李代数[9],可以验证四维杂化弦具有 $[SU(2)]^6$ 内部规范对称性.

为了得到满足规范约束条件的物理态, 四维杂化弦内部规范对称群的生成元 $X(\gamma)$ (其中 $r^I=\pm e_I$) 应与由 L_n 所生成的 Virasora 代数及超规范对称生成元 G_S 对易[10]:

$$[L_n, x(r)]=0, \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{2.12}$$

$$[G_S, x(r)]=0, \quad S=\pm 1/2,\pm 3/2,\cdots \tag{2.13}$$

(对于 (2.12) 式, $n=0$ 时, $L_0-1/2$ 对应于 N-S 玻色弦的哈米顿量. 它与 $x(r)$ 对易,正说明 $x(r)$ 为内部规范对称群的生成元). 因此 $x(r)$ 须由 N-S 玻色弦快子态顶角算子给出,玻色弦快子态顶角算子为[7]:

$$V(r, Z)=r^I\sum_{S=-\infty}^{\infty}\tilde{b}_S^I Z^{-S}:\exp[2ir^I\cdot\tilde{x}^I(Z)]:. \tag{2.14}$$

其中:

$$Z=\exp[2i(\tau+\sigma)]$$

$$:\exp[2ir^I\tilde{x}^I(Z)]:=\exp\left[r^I\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^I Z^n\right]\exp[2ir^I\cdot\tilde{x}^1(Z)]$$

$$\cdot\ Z^{r^I\cdot\tilde{p}^I}\exp\left[-r^I\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^I Z^{-n}\right]Z^{(r^I)^2/2}. \tag{2.15}$$

$\exp[2ir^I\tilde{x}^I(Z)]$ 表示移动内部动量为 r^I 的平移算子．其中 $(r^I)^2=e^2=1$.

利用 N-S 玻色弦快子态顶角算子,定义[11]:

$$x(r)=\frac{C_r}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z}V(r,Z). \tag{2.16}$$

它作用在四维杂化弦左移 N-S 玻色弦态上,为规范对称群的生成元．其中,$\oint$代表沿单位圆周的迴路积分．C_r 是为得到群对易关系而引人的修正 Kac-Moody 算子．

利用四维杂化弦谐振子的对易关系(1.3)式,可以直接验证:

$$\begin{aligned}&[x(r),x(r')]=0,\ (r,r'=0,1)\\&[x(r),x(-r)]=r^I\cdot\tilde{p}^I,\\&[\tilde{p}^I,x(r)]=r^2x(r).\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中要求:

$$\begin{aligned}&C_rC_{r'}=(-1)^{r\cdot r'+1}C_{r'}C_r,\\&C_rC_{-r}=1.\end{aligned} \tag{2.18}$$

由此可见,取 $r^I=\pm e_I=\pm1$, 则恰好对应于 $[SU(2)]^6$ 生成元的对易关系．对于每一个固定的 I, $X(r)$、$X(-r)$ 和 $\tilde{p}^I$ 组成一 $SU(2)$ 李代数．这就验证了四维杂化弦具有 $[SU(2)]^6$ 规范对称性．

三、讨　　论

我们简单讨论了四维杂化弦模型,并且给出了比较令人满意的结果． 但它还存在着一些问题．比如此模型是否包含有 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 规范对称性以及四维杂化弦的相互作用问题等,这有待于进一步的讨论．

非常感谢邹宝堂等老师对本工作的支持、帮助．

参　考　文　献

[1] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.*, **B181**(1981), 502; *Phys. Lett.*, **B109**(1982), 444.

[2] J. H. Schwarz, *Phys. Rept.*, **89**(1982), 223; M. B. Green, *Surveys in High Energy Physics*, **3**(1983), 127.

[3] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Maritnee and R. Rohm, *Phys. Rev. Lett.*, **154**(1985), 520; *Nucl. Phys.* **B256** (1985), 253.

[4] J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.*, **47**(1975), 123.

[5] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.*, **136**B(1984), 369; *Nucl. Phys.* **B243**(1984), 285.

[6] Wei Chen and Weidong Zhao, *Phys. Lett.*, **183**B(1987), 40.

[7] A. Neveu and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.*, **B31**(1971), 86; *Phys. Rev.*, D4(1971), 1109.

[8] E. Cremmer and J. Scherk, *Nucl. Phys.*, **B103**(1976), 399.

[9] I. B. Frenkel and V. G. Kac, *Inv. Math.*, **62**(1980), 23.

[10] J. H. Schwarz, *Phys. Rept.*, **8**C(1973), 269.

[11] L. Castellaui, R. D'Auria, F. Glizzi and S. Sciuto, *Phys. Lett.*, **168**B(1986), 47; R. B. Luhm and L. Dolan, *Phys. Lett.*, **169**B(1986), 347.

A FOUR-DIMENSIONAL HETEROTIC STRING

GONG SHANGQING QU LIHU YU SHOUMIAN

(Department of Physics, Shandong University, Jinan)

ABSTRACT

We constructed a new $D=4$ heterotic string, which combines the right-movers of the $D=4$ fermionic string with the left-movers of the $D=10$ N-S bosonic strings. Its gauge group is $[SU(2)]^6$. The massless ground state of the string consists of $D=4$ supergravity and super-Yang-Mills bosons. The new string theory is tachyon-free, Lorentz invariant and supersymmetric.