

三集团准共振群方法 (3 QRGM) 的进一步研究—— $N + {}^6\text{Li}(d + \alpha)$ 弹性散射的 3 QRGM 分析

赵玄 曾繁安 凌有光

(中国科学院上海原子核研究所)

摘 要

本文对 $p + {}^6\text{Li}$ 散射, 用三集团的略去与双幻核集团交换的共振群方法 (3 QRGM) 作了计算分析. 得到的微分弹性散射截面与实验符合甚好. 对 $p + {}^6\text{Li}$ 和 $n + {}^6\text{Li}$ 系统的分析表明: ①在低能共振情况, 集团效应和交换效应都十分显著地使相移下降, 因而很重要; ②对含有双幻核的三集团系统, 用 QRGM 对计算更冗繁的严格的 RGM 来说是一个好的近似; ③在 QRGM 和 RGM 计算中, 适当选取好具有集团结构态的靶核的内部波函数是十分重要的.

一、引 言

在核内, 核子分开过远超过核子-核子 (N-N) 力程 ($\approx 2 \text{ fm}$) 时会失去吸引势能, 因而核的总能量会上升. 另一方面, 核子过分接近 ($\lesssim 0.5 \text{ fm}$) 时, N-N 力的排斥心和由测不准关系及 Pauli 原理确定的动量分布会使核的总能量增加. 因此核内核子有很大的几率以适当的分离距离处于能量上优惠的组态. 再者, 核内某些核子相互关联 (有很大的几率处于相互作用力程之内) 在能量上是有利的, 但由于其他核子的存在和 Pauli 原理的作用, 这种关联只能是弱关联, 并且在核表面关联最强^[1,2]. 核内的子集团结构正是这种核子弱关联的表现, 因此核内的子集团不同于自由粒子集团, 并且随激发能的增加可以有所变化, 但由于 Pauli 原理的限制也不太容易变化, 这是在考虑核内集团结构时所必须注意的. 以 ${}^6\text{Li}$ 为例^[3], 其基态和第 1、3、5 激发态主要是 $d-\alpha$ 集团结构态, 而在 20 MeV 以上的一些能级则有 $t + {}^3\text{He}$ 集团结构态.

核理论中的共振群方法 (RGM)^[1,2] 的主要之点是用以 N-N 力为基础的集团表象哈密顿量和具有集团结构的全反对称化波函数来描述核子系统的结构性质和反应行为, 因此特别适用于具有集团结构的核子系统. 由此可见, RGM 用得成功与否, 关键在于

所选的 N-N 力和基函数是否能反映所考虑的集团结构。特别是基函数,若选取得好,则系统的波函数能由少数基函数项线性迭加构成使计算量减小,更重要的是易于研究和洞察束缚态结构和反应机制。用 RGM 来研究核结构和核反应的工作已有了许多,但绝大多数是属于两集团 RGM 方面的工作。用两集团 RGM 来处理两集团的核子系统大多数是十分成功的,但对象 $N + {}^6\text{Li}$ (基态)这类实际上是三集团 $N + (d + \alpha)$ 的系统也用两集团 RGM 来处理^[4]则还有显著的不足之处,例如 $p + {}^6\text{Li}$ 的微分弹性散射截面在背角区与实验有显著的偏离。近年来,我们和 Y. Fujiwara 及 Y. C. Tang 开始用三集团 RGM 来处理 $n + {}^6\text{Li}$ ^[5,6] 和 $d + {}^6\text{Li}$ ^[7] 弹性散射问题,并获得了令人满意的结果。在文[5,7]中,理论方法特点有二:其一是采用更符合实际的 ${}^6\text{Li}$ 的内部波函数,即 $d-\alpha$ 集团结构波函数;其二是略去与双幻核集团 α 的反对称交换,用这种近似的 RGM 就是所谓的 QRGM^[8]。作为这方面的第一阶段工作的深化和概括,本文进一步对 $p + {}^6\text{Li}$ 弹性散射作了三集团 QRGM 分析,除获得了与实验符合甚好的结果外,并发展了关于三集团 QRGM 的一些结论。

低能 $p + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^3\text{He} + {}^4\text{He}$ 反应是重要的热核聚变放能反应之一。本工作的另一个目的还在于探讨 $p + {}^6\text{Li}$ 弹性道的合理计算方案,为下一步 $p + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^3\text{He} + {}^4\text{He}$ 反应机制的多道 RGM 研究打下基础。不言而喻,这些都关系到解决未来能源的至关重要的问题。

二、理论方法简述

在三集团 RGM 中, $p + {}^6\text{Li}$ 系统的总波函数可写为^[9]

$$\begin{aligned} \Psi &= \mathcal{A} \{ \phi_{{}^6\text{Li}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) F_s(\mathbf{R}) \xi_s(\sigma, \tau) Z(\mathbf{R}_{\text{cm}}) \} \\ &= \mathcal{A} \{ \phi_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \phi_d(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) \phi_{\text{rel}}(\mathbf{R}_{\text{ad}}) F_s(\mathbf{R}) \xi_s(\sigma, \tau) \} Z(\mathbf{R}_{\text{cm}}), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\phi_{{}^6\text{Li}}$ 是 ${}^6\text{Li}$ 基态波函数的空间部分, \mathbf{r}_i 是核子 i 的空间坐标;由于 ${}^6\text{Li}$ 基态主要是 $d + \alpha$ 集团组态^[5],所以 $\phi_{{}^6\text{Li}}$ 可进一步写为 α 集团内部波函数的空间部分 ϕ_α 和 d 集团内部波函数的空间部分 ϕ_d 以及 α 和 d 的相对运动波函数 ϕ_{rel} 之积; $F_s(\mathbf{R})$ 是 p 与 ${}^6\text{Li}$ 的相对运动波函数, \mathbf{R} 为 p 与 ${}^6\text{Li}$ 的相对坐标, s 是道自旋量子数; ξ_s 是系统的自旋-同位旋波函数; $Z(\mathbf{R}_{\text{cm}})$ 是系统的归一化质心运动波函数,

$$\langle Z(\mathbf{R}_{\text{cm}}) | Z(\mathbf{R}_{\text{cm}}) \rangle = 1; \quad (2)$$

\mathcal{A} 是全反对称化算符,由于 α 是束缚得很紧的双幻核集团,其中的核子不易分离,因而假定可以略去这种集团内的核子与其他核子的反对称交换(这种假设下的 RGM 简称为 QRGM^[8]),于是有

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{p-d} \mathcal{A}_{p-\alpha} \mathcal{A}_{d-\alpha} \approx \mathcal{A}_{p-d} \mathcal{A}_{d-\alpha} \quad (3)$$

在三集团 RGM 中,选好两个子集团(在本文中是 d 和 α)内部波函数的空间部分甚为重要,特别是选好两个子集团之间的相对运动波函数尤为重要,因为正是靠这个相对运动波函数来描写子集团结构的^[9]。为了简化计算,本文对 ϕ_d, ϕ_α 和 ϕ_{rel} 仍取[5]中用的单高斯函数,即

$$\left. \begin{aligned} \phi_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^4 \rho_i^2\right) \\ \phi_d(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) &= \exp\left(-\frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{i=5}^6 \rho_i^2\right) \\ \phi_{rel}(\mathbf{R}_{ad}) &= R_{ad}^n \exp\left(-\frac{2}{3} \beta R_{ad}^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中各宗量的说明见文[5]。在文[5]中曾选取 $\alpha = \bar{\alpha} = 0.35 \text{fm}^{-2}$ 和 $\beta = 0.2 \text{fm}^{-2}$, 并从 d 和 α 的重迭情况以及符合 ${}^6\text{Li}$ 的 rms 半径讨论了 n 的取值问题, 结果认为取 $n = 2$ 或 3 均能反映 ${}^6\text{Li}$ 的 d- α 集团结构和合理的 R_{rms} 值, 但以 $n = 3$ 更好一些。取 $\alpha = \bar{\alpha}$ 是为了大大减化三集团 p + d + α 核函数的计算。本文进一步考虑到 H. Kanada 等^[9] 不久前发现的 ${}^6\text{Li}$ 中 d 的压缩很显著, 所以改用文[6]中用的符合 α 集团 rms 半径 (1.48fm) 的宽度参数值, 即取 $\alpha = \bar{\alpha} = 0.514 \text{fm}^{-2}$ 。相应地, n 和 β 也用[6]中选定的值, 即取 $n = 2$, $\beta = 0.2 \text{fm}^{-2}$ 。如此取值后, 与自由 d 的实验 rms 半径 1.95fm 相比, d 被压缩了, 且 β/α 值比[5]中的偏离 1 更大了, 这就更好地反映了 ${}^6\text{Li}$ 的 d- α 集团结构^[10]。

系统的自旋-同位旋波函数采用[5]中的(7)–(10)式, 不过要将 $\xi_n = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle}{7}$ 换为 $\xi_p = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle}{7}$, 将 $\xi_n' = \frac{|\downarrow\downarrow\rangle}{7}$ 换为 $\xi_p' = \frac{|\downarrow\uparrow\rangle}{7}$ 。

相对运动波函数 $F_s(\mathbf{R})$ 由解投影方程

$$\langle \delta\Psi | H - E_T | \Psi \rangle = 0 \quad (5)$$

得到, 其中

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^7 \nabla_i^2 + \sum_{i<j=1}^7 V_{ij} - T_{cm}, \quad (6)$$

M 是核子质量; T_{cm} 是总的质心动能算符; E_T 是系统在质心系中的总能量。 V_{ij} 是 N-N 两体势, 取为^[11]

$$\begin{aligned} V_{ij} = & -\sum_{k=1}^2 V_{0k} e^{-\beta_k r_{ij}^2} (\omega_k + m_k P_{ij}^z + b_k P_{ij}^x - h_k P_{ij}^y) \\ & + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \frac{1 + \tau_{iz}}{2} \frac{1 + \tau_{jz}}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$k = 1, 2$ 分别表示三态和单态; 各参数值取为

$$\left. \begin{aligned} V_{01} &= 66.92 \text{ MeV}, & V_{02} &= 29.05 \text{ MeV}, \\ \beta_1 &= 0.415 \text{ fm}^{-2}, & \beta_2 &= 0.292 \text{ fm}^{-2}, \\ \omega_1 = \omega_2 &= \frac{u}{4}, & b_1 = -b_2 &= \frac{u}{4}, \\ m_1 = m_2 &= \frac{1}{4} (2 - u), & h_1 = -h_2 &= \frac{1}{4} (2 - u), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

u 为可调的交换混合参数。

将(1)和(6)式代入(5)式,可得 $F_l(\mathbf{R})$ 的径向分波 $f_{l,r}(R)$ 所满足的积分-微分方程

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{l(l+1)}{R^2} \right) + E - V_{N_l}(R) \right] f_{l,r}(R) = \int_0^\infty K_{l,r}(R, R') f_{l,r}(R') dR', \quad (9)$$

其中 μ 是 $p + {}^6\text{Li}$ 系统的约化质量; E 是 p 和 ${}^6\text{Li}$ 在质心系中的相对运动动能; $V_{N_l}(R)$ 是 p 和 ${}^6\text{Li}$ 间的直接定域核势, $K_{l,r}(R, R')$ 是 p 和 ${}^6\text{Li}$ 间的非定域交换核函数 $K_l(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ 的径向分波表示式. 在推导两集团核函数 $K_l(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ 时,我们先推导了三集团归一化核函数 $\tilde{N}_l(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{\alpha d}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'_{\alpha d})$ 和哈密顿量核函数 $\tilde{H}_l(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{\alpha d}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'_{\alpha d})$, 然后对 $d-\alpha$ 相对运动坐标积分得到两集团核函数 $N_l(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ 和 $H_l(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$, 再由此求得 $K_l(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$. 在散射边界条件下, 用数值方法解方程(9)便可求得 $f_{l,r}$ 和相应的相移及弹性散射微分截面.

在用单道 RGM 计算弹性散射截面时,可在 $V_{N_l}(R)$ 中加进虚数势来考虑反应道的影响. 虚数势取为(见文[1] p. 222)

$$iW(R) = i[1 + C_l(-)]^l W_0 \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{R-R_0}{a}}} + \frac{4e^{\frac{R-R_0}{a}}}{(1 + e^{\frac{R-R_0}{a}})^2} \right], \quad (10)$$

其中取定 $R_0 = 2.0 \text{ fm}$, $a = 0.5 \text{ fm}$; C_l 和 W_0 为可调参数.

三、计算结果和讨论

我们用 § 2 中描述三集团 QRGM 计算了 $p + {}^6\text{Li}$ 在 0.5—32 MeV 能量的散射相移 $\delta_{l,r}^{3\text{QRGM}}$ 和在 22.2 及 30 MeV 能量的微分弹性散射截面 $\sigma(\theta)^{3\text{QRGM}}$. 在整个计算中,对 $s = 3/2$ 和 $1/2$ 道均取 $\mu = 0.9$. 在微分截面计算中,对 22.2 MeV 能量取 $C_l = 0$ 和 $W_0 = -22.9 \text{ MeV}$; 对 30 MeV 能量取 $C_l = 0$ 和 $W_0 = -21.6 \text{ MeV}$.

计算的 $p + {}^6\text{Li}$ 在各个能量的 $\delta_{l,r}^{3\text{QRGM}}$ 画于图 1 中(实线). 由于缺乏 $p + {}^6\text{Li}$ 实验散射相移,未能将 $\delta_{l,r}^{3\text{QRGM}}$ 与实验比较. 为了在各理论间进行比较来评价各种理论和抽取一些物理上的结论,我们在图 1 中还画出了 $n + {}^6\text{Li}$ 在各个能量的两集团 RGM 理论相移 $\delta_{l,r}^{2\text{RGM}}$ (虚线)^[4], 三集团 RGM 理论相移 $\delta_{l,r}^{3\text{RGM}}$ (点-虚线), 和三集团 QRGM 理论相移 $\delta_{l,r}^{3\text{QRGM}}$ (点线)^[2]. 从图 1 可见,所有理论相移曲线的变化趋势虽然是一致的,但在低能 1p 共振附近差异特别显著,集团效应,库仑效应,和交换效应在这里反映得最清楚;在较高的能区,一般说来,除交换效应重要外,集团效应和库仑效应都不太重要了. 在低能非共振情况,各种效应不够显著,难以单独区分出各种效应来. 在这里我们关注的是集团效应和交换效应. 在图 1 中,低能 1p 共振情况的点-虚线显著地低于虚线,其他情况的这两种曲线接近重合,这说明 ${}^6\text{Li}$ 的 $d-\alpha$ 集团效应在低能共振情况使相移下降十分显著,因而很重要,而在其他情况则不太重要. 图 1 的点-虚线一般说来在点线之下,这说明交换效应也是使相移下降,而略去部分交换则相移又会回升;这现象在低能 1p 共振情况特别突出,在较高的能量也相当显著,但在非共振的低能情况却不显著,这进一步说明交换效应在低能共振情况特别重要,在较高的能量也还重要,但在非共振的低能情况则不太重要. 顺便提及,图 1 中在 $\sim 19 \text{ MeV}$ 的 3s 伪共振和在 $\sim 8 \text{ MeV}$ 的 2s 伪共振来自反应道的

显著影响^[6].

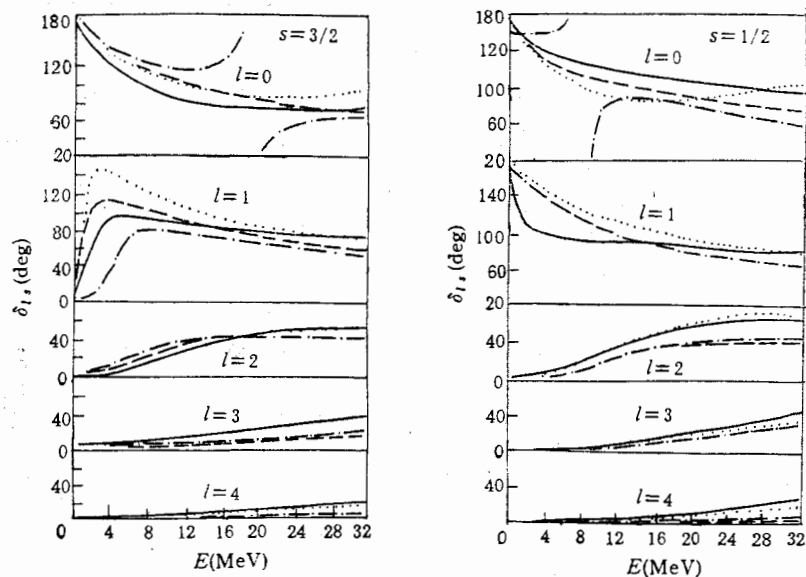


图 1 $N + {}^6\text{Li}$ 散射相移

— $p + {}^6\text{Li}$ $\delta_l^{3\text{QRGM}}$ (本文), $n + {}^6\text{Li}$ $\delta_l^{3\text{QRGM}}$ [5]; - · - · $n + {}^6\text{Li}$ $\delta_l^{3\text{RGM}}$ ([6], 用 ϕ_3); - - - $n + {}^6\text{Li}$ $\delta_l^{3\text{RGM}}$ ([4], 用 ϕ_G).

在 22.2 MeV 的 $\delta_l^{3\text{QRGM}}$ 和 $\delta_l^{2\text{RGM}}$ 的奇-偶 l 依赖行为画于图 2 中. 从图 2 各对应线段的斜率可以看出 $\delta_l^{3\text{QRGM}}$ 的奇-偶 l 依赖与 $\delta_l^{2\text{RGM}}$ 的相比有显著的改变. 文[11]中曾指出, 相移的奇-偶 l 依赖主要来自使背角微分弹性散射截面增大的“核心交换”效应, 而这里的 $\delta_l^{3\text{QRGM}}$ 是在略去与双幻核集团的交换下算得的, 所以 $\delta_l^{3\text{QRGM}}$ 的奇-偶 l 依赖变化反映了“核心交换”效应减少了, 并会导致背角区微分弹性散射截面的减小.

图 3 中画出了 $p + {}^6\text{Li}$ 在 22.2 和 30 MeV 的微分弹性散射截面 $\sigma(\theta)^{3\text{QRGM}}$ (本文), $\sigma(\theta)^{2\text{RGM}}$ [4], 和 $\sigma(\theta)^{\text{exp}}$ [12]. 可以看出 22.2 MeV 的 $\sigma(\theta)^{3\text{QRGM}}$ 与 $\sigma(\theta)^{\text{exp}}$ 符合非常之好, 在 30 MeV 的也符合得相当好. 这里要特别强调的是背角区的 $\sigma(\theta)^{3\text{QRGM}}$ 与 $\sigma(\theta)^{\text{exp}}$ 的符合比起 $\sigma(\theta)^{2\text{RGM}}$ 来有了重大的改进, 这正是前段所指出的略去与双幻核集团的交换会造成背角区微分弹性散射截面下降的结果. 至于 30 MeV 的 $\sigma(\theta)^{3\text{QRGM}}$ 与 $\sigma(\theta)^{\text{exp}}$ 在背角区符合得稍差些, 那是因为我们为了计算简单些, 对 ${}^6\text{Li}$ 的 $d-\alpha$ 相对运动波函数只采用了[6]中在较小的 q^2 范围符合形状因子的单高斯波函数, 若对如此较高的能量采用在较大的 q^2 范围内符合形状因子的双高斯波函数, 则可望在 30 MeV 也会得到符合更好的结果.

四、结 束 语

本文通过对 $p + {}^6\text{Li}$ 弹性散射的三集团 QRGM 分析, 并结合先前的一些工作, 着重探讨了核子系统的集团效应和交换效应. 对 $p + {}^6\text{Li}$ 和 $n + {}^6\text{Li}$ 弹性散射的各种理论分析比较和与实验比较表明:

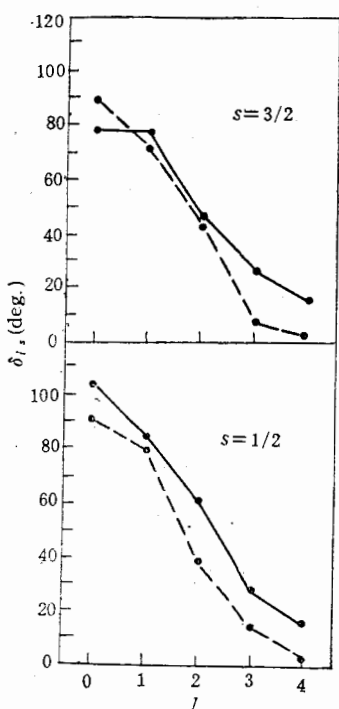


图2 $p + {}^6\text{Li}$ 在 22.2 MeV 的散射相移的奇-偶 l 依赖行为。

- 3QRGM (本文)
- 2RGM ([4], 用 $\phi_{1\sigma}$).

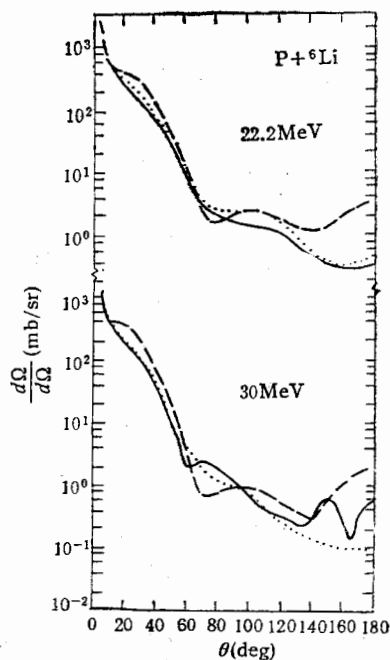


图3 $p + {}^6\text{Li}$ 微分弹性散射截面。

- 3QRGM (本文)
- - - 2RGM ([4], 用 $\phi_{2\sigma}$);
- 实验值[12].

① 在低能共振情况,集团效应使相移下降十分显著。

② 交换效应一般也是使相移下降,这效应在低能共振情况特别突出,在较高的能量也相当重要,但在非共振的低能则不太重要。

③ 在考虑到 ${}^6\text{Li}$ 的 $d-\alpha$ 集团结构和略去与 α 集团的交换后, $p + {}^6\text{Li}$ 散射相移的奇-偶 l 依赖行为有明显的改变,这反映出使背角区微分散射截面增大的“核心交换”效应^[11]减小了,从而使背角区的 $\sigma(\theta)^{3QRGM}$ 减小了,并得到了与实验符合甚好的结果。

④ 特别感兴趣的是,上述 $p + {}^6\text{Li}$ 的 $\sigma(\theta)^{3QRGM}$ 在背角区比 $\sigma(\theta)^{2RGM}$ 更符合于实验的结果在 $n + {}^6\text{Li}$ 弹性散射情况^[5]也曾得到过。究其原因,主要是 3QRGM 的基函数的选取考虑到了靶核的集团结构,因而更为合理;并且,虽然 3QRGM 略去了与双幻核心的交换,但仍保留了其它不可略去的仍属重要的交换,这后一类已在进一步的工作 $n + {}^{19}\text{F}(t + {}^{16}\text{O})$ 散射的 3QRGM 分析中得到了验证^[13]。总的说来,用 QRGM 对计算更冗繁的严格的 RGM 来说是一个好的近似。

顺便提及,关于 QRGM 的工作尚在继续进行,其一是将此方法用之于热核聚变反应 $p + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^3\text{He} + {}^4\text{He}$ 的双道计算分析中,其二是扩展到靶核含有子集团 ${}^{40}\text{Ca}$ 或 ${}^{208}\text{Pb}$ 的情况。

参 考 文 献

- [1] K. Wildermuth and Y. C. Tang, *A Unified Theory of the Neuleus*, (Vieweg, Braunschweig, 1977).
- [2] Y. C. Tang, M. LeMere and D. R. Thompson, *Phys. Rep.*, **47**(1978), 167.
- [3] 赵玄, 侯仁昌, 曾繁安, *高能物理与核物理*, **9**(1985), 742; *Chinese Physics*, **6**(1986), 377.
- [4] D. J. Stubeda, Y. Fujiwara and Y. C. Tang, *Phys. Rev.*, **C26**(1982), 2410.
- [5] 凌有光, 赵玄, *高能物理与核物理*, **8**(1984), 227; *Chinese Physics*, **5**(1985), 77.
- [6] Y. Fujiwara and Y. C. Tang, *Phys. Rev.*, **C27**(1983), 2457.
- [7] 凌有光, 赵玄, 曾繁安, *高能物理与核物理*, **9**(1985), 236.
- [8] 王力红, 赵玄, 曾繁安, *高能物理与核物理*, **9**(1985), 328.
- [9] H. Kanada, T. Kaneko and Y. C. Tang, *Nucl. Phys.*, **A389**(1982), 285.
- [10] Y. C. Tang, K. Wildermuth and L. D. Pearlstein, *Nucl. Phys.*, **32**(1962), 504.
- [11] M. Lemere, Y. C. Tang and H. Kanada, *Phys. Rev.*, **C19**(1979), 391;
D. J. Stubeda, H. Horiuchi and Y. C. Tang, *Nucl. Phys.*, **A320**(1979), 499.
- [12] K. H. Bray et al., *Nucl. Phys.*, **A189**(1972), 35.
- [13] 朱志远, 赵玄, *原子核物理*, **9**(1987), 331.

A FURTHER STUDY OF QUASI RESONATING GROUP METHOD— ANALYSIS OF $p+{}^6\text{Li}$ ELASTIC SCATTERING WITH 3QRGM

ZHAO XUAN ZENG FANAN LING YOUGUANG

(Shanghai Nuclear Research Institute, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the elastic scattering of $p+{}^6\text{Li}$ is studied by 3QRGM, a three-cluster RGM omitting the antisymmetrization with the nucleon in the double magic cluster. The main conclusion from studying the systems of $p+{}^6\text{Li}$ and $n+{}^6\text{Li}$ is the following: The clustering and exchange effects lower the phase shifts conspicuously, hence they are very important in the lower energy region.