第14卷 第10期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 10
1990年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1990

线性 σ 模型的手征反常与 Schwinger 项

阮 浩 井思聪
（中国科技大学近代物理系，合肥）

摘 要

本文利用 BJL 技术计算了二维线性 σ 模型 Schwinger 项中左手流的反常，得到与非微扰的泛函积分方法相一致的结果。

一、引 言

文献[1]曾在二维情形下研究了 Schwinger 项中 $D_\mu J_\mu$ 的反常，得到的结果与非微扰的计算相符合。众所周知，为了解决有反常的规范理论的量子化问题，Faddeev 等人建议在拉氏量中引入手征辅助场[2]，这种手征辅助场的变换性质与 σ 模型中 Higgs 场的变换性质有些相似，因此利用文献[1]的方法仔细讨论 $U(1)_L$ 不变的线性 σ 模型，对于弄清手征辅助场的意义及解决有反常的规范理论的量子化问题是有积极作用的。本文中我们在拉氏密度里引入了 Higgs 场与费米场的 Yukawa 耦合项，即考虑如下的拉氏密度描述的线性 σ 模型：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \bar{\psi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi \\ &- g\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\phi^+ + \frac{1-\gamma_5}{2}\phi\right)\psi \\ &- (\partial_\mu\phi^+ + ieA_\mu\phi^+)(\partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi) - V(\phi^+\phi)\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $\gamma_\mu\partial_\mu = \gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2\frac{\partial}{\partial x_2} = \gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1} - i\gamma_2\frac{\partial}{\partial x_0}$, $\mu = 1, 2$

γ 矩阵定义为

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_5 = -i\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

可以证明，在下列左手规范变换下，$\mathscr{L}$ 不变

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}}\psi(x),\quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}}$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

$$\phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x),\quad \phi^{+\prime}(x) = e^{-i\alpha(x)}\phi^+(x) \tag{1.3}$$

本文 1990 年 2 月 20 日收到。

此外，还可利用文献[3]提出的正常化方法仔细计算相应的路径积分中费米场积分测度在左手征变换下的变换因子，从而检验微扰论的计算结果.

本文研究了 $U(1)_L$ 不变的线性 σ 模型的手征反常，求出了各种有用的物理量的 Green 函数，然后用 Bjorken-Johnson-Low 技术[4]得到了相应的等时对易子，从而得到了相应的左手流散度的反常 Ward 恒等式，并且利用非微扰的方法计算了生成泛函中相应费米场的测度变换因子，给出与微扰论相符合的 Ward 恒等式.

本文的安排如下：第二节讨论了经典理论，第三节完成了理论的量子化，第四节进行了手征反常的微扰计算，第五节用非微扰方法导出一致的反常 Ward 恒等式，并作简单的讨论.

二、经典理论

从拉氏函数(1.1)出发，可得拉氏运动方程：

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = ie\gamma_\mu A_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\psi - g\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\phi^+ + \frac{1-\gamma_5}{2}\phi\right)\psi$$

$$\partial_\mu \bar{\psi}\gamma_\mu = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu \frac{1+\gamma_5}{2} + g\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\phi^+ + \frac{1-\gamma_5}{2}\phi\right)$$

$$\partial_\mu F_{\mu\gamma} = -ie\bar{\psi}\gamma_\gamma \frac{1+\gamma_5}{2}\psi + ie\phi^+(\partial_\gamma\phi - ieA_\gamma\phi) - ie(\partial_\gamma\phi^+ + ieA_\gamma\phi^+)\phi$$

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)^2\phi^+ = g\bar{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + \phi^+V'(\phi^+\phi)$$

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)^2\phi = g\bar{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2}\psi + \phi V'(\phi^+\phi) \tag{2.1}$$

其中

$$V'(\phi^+\phi) = dV(\phi^+\phi)/d(\phi^+\phi)$$

同样从(1.1)得到正则动量为

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= iF_{2\mu} = -E_\mu \\ \pi_\psi &= i\psi^+ \\ \pi &= \dot{\phi}^+ - ieA_0\phi^+ \\ \pi^+ &= \dot{\phi} + ieA_0\phi \end{aligned} \tag{2.2}$$

由(2.2)式可见理论具有的初级约束为

$$\pi_2 = 0 \tag{2.3}$$

基本泊松括号定义为

$$\begin{aligned} [\pi_\mu(x,t), A_\gamma(x',t)]_{P.B.} &= [A_\mu(x,t), E_\gamma(x',t)]_{P.B.} = -\delta_{\mu\gamma}\delta(x-x'') \\ [\psi(x,t), \psi^+(x',t)]_{P.B.} &= -i\delta(x-x') \\ [\phi(x,t), \pi(x',t)]_{P.B.} &= [\phi^+(x,t), \pi^+(x',t)]_{P.B.} = \delta(x-x') \end{aligned} \tag{2.4}$$

运动方程由哈密顿量给出

$$\dot{f} = [f, H_T]_{P.B.} \tag{2.5}$$

其中

$$H_T = \int dx \mathscr{H}_T \tag{2.6}$$

利用(2.2)式，得到哈密顿密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi_\mu \dot{A}_\mu + \pi_\psi \dot{\psi} + \pi\dot{\phi} + \pi^+\dot{\phi}^+ - \mathscr{L} \\ &= \frac{1}{2} E_1^2 + \bar{\psi}\gamma_1\partial_1\psi - ie\bar{\psi}\gamma_1 A_1 \frac{1+\gamma_5}{2}\psi + g\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\phi^+ + \frac{1-\gamma_5}{2}\phi\right)\psi \\ &\quad + A_0\left(-\partial_1 E_1 + e\psi^+\frac{1+\gamma_5}{2}\psi + ie\pi^+\phi^+ - ie\pi\phi\right) \\ &\quad + \pi^+\pi + (\partial_1\phi^+ + ieA_1\phi^+)(\partial_1\phi - ieA_1\phi) + V(\phi^+\phi)\end{aligned} \tag{2.7}$$

按照 Dirac 处理广义哈密顿系统的理论[5]，原始约束应满足如下的自洽性条件

$$\dot{\pi}_2 = [\pi_2, H]_{P.B.} \approx 0 \tag{2.8}$$

其中“≈”表示弱等于零，由此得到次级约束

$$G = \partial_1 E_1 - e\psi^+\frac{1+\gamma_5}{2}\psi - ie\pi^+\phi^+ + ie\pi\phi = 0 \tag{2.9}$$

从规范场的运动方程出发可以证明这一点。

由于

$$\dot{G} = [G, H_T]_{P.B.} = 0 \tag{2.10}$$

所以没有新的约束出现。

又由于

$$[\pi_2, G]_{P.B.} = 0 \tag{2.11}$$

故全是第一类约束和第一类哈密顿量。

这样，我们所讨论的 $U(1)_L$ 不变的线性 σ 模型具有两个第一类约束：$\pi_2 = 0$ 和 $G = 0$。

将以上约束合并，得到如下的哈密顿量：

$$H_T = \int dx(\mathscr{H} + \lambda\pi_2 + uG) \tag{2.12}$$

其中 λ、u 是场量及其共轭动量的任意函数，λ 的任意性只是表示 $\dot{A}_2$ 的任意性，而以下的讨论是在时间规范下进行的，即取 $A_2 = 0$，因此 $\lambda\pi_2$ 这一项可以略去。因而可将 H_T 写为

$$H_T = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \tag{2.13}$$

其中

$$H_1 = \int dx\left[\frac{1}{2}E_1^2 - ieA_1\bar{\psi}\gamma_1\frac{1+\gamma_5}{2}\psi + g\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\phi^+ + \frac{1-\gamma_5}{2}\phi\right)\psi\right]$$

$$H_2 = \int dx uG$$

$$H_3 = \int dx \bar{\psi}\gamma_1\partial_1\psi$$

$$H_4 = \int dx[\pi\pi^+ + (\partial_1\phi^+ + ieA_1\phi^+)(\partial_1\phi - ieA_1\phi) + V(\phi^+\phi)]$$

三、量　子　化

在进行微扰计算时，为了得到 Feynman 规则，还可将 H_T(2.6-7) 式划分为

$$H_T = H_0 + H_i \tag{3.1}$$

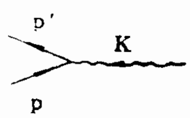
其中

$$H_0 = \int dx\left(\frac{1}{2}E_1^2 - A_0\partial_1 E_1 + \bar\psi\gamma_1\partial_1\psi + \pi^+\pi + \partial_1\phi^+\partial_1\phi + V(\phi^+\phi)\right)$$

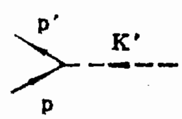
这里设 $V(\phi^+\phi) = \mu^2\phi^+\phi$

$$H_i = \int dx\Big[-ie\bar\psi\gamma_\mu A_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi + g\bar\psi\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\phi^+ + \frac{1-\gamma_5}{2}\phi\right)\psi$$
$$+ ieA_\mu\phi^+\partial_\mu\phi - ieA_\mu\partial_\mu\phi^+\phi + e^2A_\mu^2\phi^+\phi\Big]$$

这里略去了法向有关项 $-e_0A_0^2\phi^+\phi$[6]. 通过对场算符作振子展开，容易得到如下的 Feynman 规则：

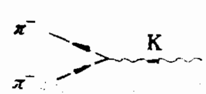


$$-e\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}(2\pi)^2\delta^{(2)}(p'-p-k)$$

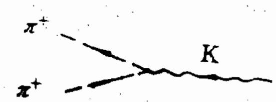


$$-ig\frac{1+\gamma_5}{2}(2\pi)^2\delta^{(2)}(p'-p-k) \quad \pi^- \text{ 介子}$$

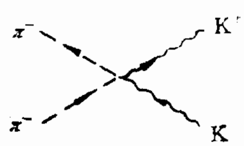
$$-ig\frac{1-\gamma_5}{2}(2\pi)^2\delta^{(2)}(p'-p-k) \quad \pi^+ \text{ 介子}$$



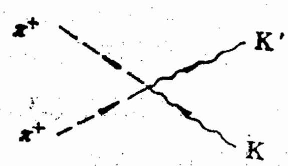
或



$$ie(p_\mu + p'_\mu)(2\pi)^2\delta^{(2)} \cdot (p'-p-k)$$



或



$$-2ie\delta_{\mu\nu}(2\pi)^2\delta^{(2)} \cdot (p'+k'-p-k)$$

在进行量子化之后，将(2.4)式变为等时对易关系：

$$[A_\mu(x,t), E_\nu(x',t)] = -i\delta_{\mu\nu}\delta(x-x')$$
$$\{\psi_\sigma(x,t), \psi_\rho^+(x',t)\} = \delta_{\sigma\rho}\delta(x-x')$$
$$[\phi(x,t), \pi(x',t)] = [\phi^+(x,t), \pi^+(x',t)] = i\delta(x-x') \tag{3.2}$$

同时(3.5)变为

$$\dot F = i[H_T, F] \tag{3.3}$$

由于利用 BJL 极限方法来计算各种基本的等时对易关系与量子效应密切相关，所以首先取规范为

$$A_0(x) = 0 \tag{3.4}$$

则有

$$E_1 = -\dot{A}_1, \quad \pi = \phi^+, \quad \pi^+ = \dot{\phi} \tag{3.5}$$

通过计算得到时间轴规范下规范场的传播子为

$$D_{\mu\gamma}(p) = \frac{-i}{p^2 - i\epsilon}\left(\delta_{\mu\gamma} - \frac{p_\mu n_\gamma + p_\gamma n_\mu}{p \cdot n} + \frac{p_\mu p_\gamma}{(p \cdot n)^2}\right) \tag{3.6}$$

其中 $n_\mu = (n_1, n_2) = (0, 1)$

我们还知道，

$$\text{旋量场中核子传播子为} \quad S_F(p) = \frac{-1}{\hat{p} - i\epsilon} \tag{3.7}$$

$$\text{赝标量场中介子传播子为} \quad \Delta_F(p) = \frac{-i}{\mu^2 + k^2 - i\epsilon} \tag{3.8}$$

量子化后，下列各量都已成为算符

$$j^L_\mu = i\bar{\Phi}\gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\phi \tag{3.9}$$

j^L_μ 的分量为

$$j^L_1 = i\bar{\Phi}\gamma_1 \frac{1+\gamma_5}{2}\phi$$

$$j^L_2 = i\phi^+ \frac{1+\gamma_5}{2}\phi = ij_0$$

其中 $j_0 = \phi^+ \frac{1+\gamma_5}{2}\phi$.

四、手征反常的微扰计算

在这一节中，将得到 Schwinger 项中 $\partial_\mu j_\mu$ 的反常. 在计算 Schwinger 项时，要用到 BJL 极限方法. 这一方法是按照下面的程序进行的:

首先，考虑两个算符 A、B 编时乘积的矩阵元(四维情形):

$$T(p) = \int d^4x\, e^{ipx}\langle\alpha|TA(x)B(0)|\beta\rangle \tag{4.1}$$

其中 $x = (\boldsymbol{x}, it)$, $p = (\boldsymbol{p}, ip_0)$, $|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$ 是正交归一化态.

然后取极限

$$\lim_{p_0\to\infty} p_0 T(p) = -i\int d^3x\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\langle\alpha|[A(\boldsymbol{x}, 0), B(0)]|\beta\rangle \tag{4.2}$$

由此可得等时对易关系

$$[A(\boldsymbol{x}, 0), B(0)] = \begin{cases} i\delta(\boldsymbol{x}) & \text{如果} \ \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0 T(p) = 1 \\ \partial_i\delta(\boldsymbol{x}) & \text{如果} \ \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0 T(p) = p_i \end{cases} \tag{4.3}$$

值得注意的是，(3.1)式同样可以改写为

$$T(p) = \left(\frac{i}{p_0}\right)^2 \int d^4x \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{ipx}\right)\langle\alpha|TA(x)B(0)|\beta\rangle \tag{4.4}$$

由此不难得到

$$[\dot{A}(x,0),B(0)]=\begin{cases}\delta(x) & \text{如果} \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0^2T(p)=1\\ -i\partial_i\delta(x) & \text{如果} \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0^2T(p)=p_i\end{cases} \tag{4.5}$$

在二维情形(4.1-5)式类似。

为了计算 $[j_\mu^L(x), j_\gamma^L(y)]$（如图 1）我们在 Heisenberg 表象中取

$$T(p)=\int d^2x\, e^{ipx}\langle 0\|Tj_\mu^L(x)j_\gamma^L(0)\|0\rangle n_\mu n_\gamma \tag{4.6}$$

转入相互作用表象进行计算，(4.6)为

$$T(p)=n_\mu n_\gamma\int d^2x\, e^{ipx}\langle 0|Tj_\mu^L(x)j_\gamma^L(0)S|0\rangle \tag{4.7}$$

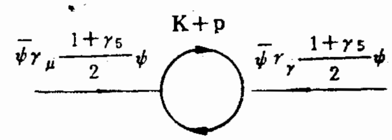


图 1

其中

$$S=1+\sum_n\frac{i^n}{n!}\left(\int d^2x'\mathscr{H}_i(x')\right)^n,$$

我们取 $S=1$，则

$$T(p)=\frac{in_\mu n_\gamma}{4\pi p^2}(p^2\delta_{\mu\gamma}-2p_\mu p_\gamma+ip_\alpha p_\gamma\epsilon_{\mu\gamma}+ip_\mu p_\alpha\epsilon_{\gamma\alpha})=n_\mu n_\gamma T_{\mu\gamma}(p) \tag{4.8}$$

通过对 $T_{\mu\gamma}(p)$ 取极限，可以求得

$$[j_1^L(x),j_1^L(y)]=[j_1^L(x),j_0^L(y)]=[j_0^L(x),j_0^L(y)]=-2\delta'(x-y)k \tag{4.9}$$

按照同样的步骤，我们可以求得

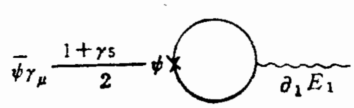


图 2

$$[j_1^L(x),\partial_1E_1(y)]=[j_0^L(x),\partial_1E_1(y)]=-e\delta'(x-y)k \tag{4.10}$$

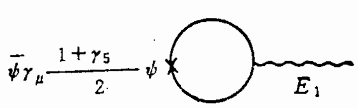


图 3

$$[j_1^L(x),E_1(y)]=[j_0^L(x),E_1(y)]=-e\delta(x-y)k \tag{4.11}$$

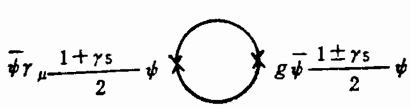


图 4

$$\left[j_\mu^L(x),g\bar{\phi}(y)\frac{1\pm\gamma_5}{2}\phi(y)\right]=0 \tag{4.12}$$

其中

$$k=\frac{-i}{4\pi},\quad \delta'(x-y)\equiv\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y)$$

类似地，还有

$$[j_\mu^L(x),\phi(y)]=0$$

$$[j_\mu^L(x), \phi^+(y)] = 0 \tag{4.13}$$

其余对易子皆为零.

现在我们利用上述结果来计算 $[H_T, G(x)]$,这里 H_T 由(2.13)式给出.

我们先看

$$[H_2, G(x)] = \int dx' [u(x')G(x'), G(x)] \approx \int dx' u(x')[G(x'), G(x)] \tag{4.14}$$

根据上面给出的基本对易关系及(2.9),可以看到

$$[G(x'), G(x)] = 0 \tag{4.15}$$

这样

$$[H_2, G(x)] = 0 \tag{4.16}$$

在计算 $[H_3, G(x)]$ 时,需要算 $[\bar{\phi}(x)\gamma_1\partial_1\phi(x), \partial_1 E_1(y)]$ 和 $[\bar{\phi}(x)\gamma_1\partial_1\phi(x), j_1^L(y)]$,这些关系在(4.9-13)式中没有给出. 既然 $\bar{\phi}\gamma_1\partial_1\phi$ 中含一个微商,那么它所对应的 Feynman 图是发散的,因此需要加以正常化. 利用 Pauli-Villars 正规化方法,从冗长的计算结果中得到:当在 Laurant 级数中展开 $T(p)$ 时,那些图形中 $T(p)$ 没有 $\frac{1}{p_0}$ 项. 这样,在计算反常时 H_3 没有贡献. 此外,显然可见

$$[H_4, G(x)] = 0 \tag{4.17}$$

故有

$$\begin{aligned}
[H_T, G(x)] &= -i\partial_0 G(x) \\
&= [H_1 + H_2 + H_3 + H_4, G(x)] \\
&= [H_1, G(x)] \\
&= \frac{ie^2}{4\pi}[E_1(x) + \partial_1 A_1(x)]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

另一方面从 G 的定义出发可得

$$\partial_0 G = -e\,\partial_\mu j_\mu^L(x) + \frac{ie^2}{4\pi}\partial_1(A_1(x) + u(x)) + \partial_0(ie\pi\phi - ie\pi^+\phi^+) \tag{4.19}$$

将(4.19)代入(4.20),可得

$$\partial_\mu j_\mu^L(x) = \frac{e}{4\pi}\{-\partial_0 A_1(x) + c\partial_1 A_1(x)\} \tag{4.20}$$

其中 c 为任意函数,不妨取为零,因此(4.20)变为(4.21)

$$\partial_\mu j_\mu^L(x) = \frac{-e}{4\pi}\partial_0 A_1(x) \tag{4.21}$$

对照文献[1]可见,当理论包含有 Higgs 场时,Higgs 场不影响手征反常.

五、手征反常的非微扰计算

前一节中,从微扰论的角度,求得了 Schwinger 项中 $\partial_\mu j_\mu$ 的反常. 现在用路径积分的方法来计算由(1.1)所示的拉氏函数描述的手征 Schwinger 模型.

理论的生成泛函可写为

$$Z[J]=\frac{1}{N}[d\psi d\bar{\psi}dA_\mu d\phi d\phi^+]e^{i\int d^2x(\mathscr{L}+j_\mu A_\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)} \tag{5.1}$$

式中 $\eta(x)$、$\bar{\eta}(x)$ 为外源。

在左手征变换下，有

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=e^{i\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}}\psi(x)\\ \bar{\psi}(x)&=\bar{\psi}(x)e^{-i\alpha\frac{1-\gamma_5}{2}}\end{aligned} \tag{5.2}$$

从(5.2)可导出相应的费米子场的路径积分测度。

$$[d\psi d\bar{\psi}]=[d\psi' d\bar{\psi}']e^{iT_r\alpha\gamma_5} \tag{5.3}$$

为了计算方便，可将协变微商进行下列分解：

$$\begin{aligned}\hat{D}&=\hat{\partial}-ie\hat{A}\frac{1+\gamma_5}{2}\\ &=(\hat{\partial}-ie\hat{A})\frac{1+\gamma_5}{2}+\hat{\partial}\frac{1-\gamma_5}{2}\\ &=\hat{D}_L\frac{1+\gamma_5}{2}+\hat{D}_R\frac{1-\gamma_5}{2}\end{aligned} \tag{5.4}$$

式中定义了左协变微商和右狄拉克微商：

$$\begin{aligned}\hat{D}_L&=\hat{\partial}-ie\hat{A}=\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)\\ \hat{D}_R&=\hat{\partial}=\gamma_\mu\partial_\mu\end{aligned} \tag{5.5}$$

这时，即可开始计算手征相因子 $\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5$，并且给出它的解析形式。算符 $\alpha(\hat{x})$ 的阵迹可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\alpha&=\int d^2x\langle x|\alpha(\hat{x})|x\rangle\\ &=\int d^2x\alpha(x)\delta(x-x')|_{x'=x}\end{aligned} \tag{5.6}$$

因此

$$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5=\int d^2x\alpha(x)\mathrm{tr}\,\gamma_5\delta(x-x')|_{x'=x} \tag{5.7}$$

由于 $\mathrm{tr}\gamma_5=0$，所以直接计算(5.7)式给出 $\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5=0$，但是可以适当选择一条特殊的极限途径，使得 $\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5\neq 0$，而且给出希望的手征反常。例如构造极限

$$\lim_{M^2\to\infty}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_L\hat{D}_R}+e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_R\hat{D}_L}\right)=1 \tag{5.8}$$

并把它插入(5.7)式得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5&=\int d^2x\alpha(x)\mathrm{tr}\,\gamma_5\lim_{\substack{M^2\to\infty\\x'\to x}}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_L\hat{D}_R}+e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_R\hat{D}_L}\right)\delta(x-x')\\ &=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\int d^2x\alpha(x)\mathrm{tr}\,\gamma_5\left[\left(e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_L\hat{D}_R}+e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_R\hat{D}_L}\right)\delta(x-x')\right]_{x'=x}\end{aligned} \tag{5.9}$$

把(5.9)定义为 $\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5$ 的值。

由于

$$\delta(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k\,e^{ik(x-x')} \tag{5.10}$$

再进行标度变换

$$k=Mk' \tag{5.11}$$

并利用 $\epsilon_{\mu\tau}$ 的反对称性

$$\epsilon_{\mu\tau}=-\epsilon_{\tau\mu} \tag{5.12}$$

所以(5.9)可写成

$$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5=\frac{ie}{8\pi}\int d^2x\alpha(x)\epsilon_{\mu\tau}F_{\mu\tau}(x) \tag{5.13}$$

将(5.2)、(5.3)和(5.13)代入(5.1),并将撇号去掉得:

$$\begin{aligned}Z[J]=\frac{1}{N}\int[d\psi d\bar{\psi}dA_\mu d\phi d\phi^+]\exp\Big[i\int d^2x\Big(&\mathscr{L}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+j_\mu A_\mu\\&-i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}\psi+i\bar{\eta}\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\\&-i\bar{\psi}\alpha\frac{1-\gamma_5}{2}\eta-\frac{ie}{8\pi}\alpha\epsilon_{\mu\tau}F_{\mu\tau}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{5.14}$$

进行分部积分可得

$$\int d^2xi\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}\psi=-\int d^2x\alpha\partial_\mu\left(i\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right) \tag{5.15}$$

所以(5.14)为

$$\begin{aligned}Z[J]=\frac{1}{N}\int[d\psi d\bar{\psi}dA_\mu d\phi d\phi^+]\exp\Big[i\int d^2x\Big(&\mathscr{L}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+j_\mu A_\mu\\&+i\bar{\eta}\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}\psi-i\bar{\psi}\alpha\frac{1-\gamma_5}{2}\eta\\&+\alpha\partial_\mu\left(i\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)-\frac{ie}{8\pi}\alpha\epsilon_{\mu\tau}F_{\mu\tau}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{5.16}$$

在(5.16)两端对 α 作泛函微商,并令 $\alpha\rightarrow 0$,得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\int[d\psi d\bar{\psi}dA_\mu d\phi d\phi^+]\exp\Big[i\int d^2x(\mathscr{L}+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi+j_\mu A_\mu)\Big]\\&\left[-\partial_\mu\left(i\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)+\frac{ie}{8\pi}\epsilon_{\mu\tau}F_{\mu\tau}-i\bar{\eta}\frac{1-\gamma_5}{2}\psi+i\bar{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2}\eta\right]=0\end{aligned} \tag{5.17}$$

对(5.17)中的外源进行微商 $\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}$、$\frac{\delta}{\delta\eta(z)}$,微商后令所有的外源趋于 0,得

$$-\partial_\mu\left(i\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)+\frac{ie}{8\pi}\epsilon_{\mu\tau}F_{\mu\tau}=0 \tag{5.18}$$

即

$$\partial_\mu j_\mu^L=\frac{ie}{8\pi}\epsilon_{\mu\tau}F_{\mu\tau}=\frac{-e}{4\pi}\partial_0A_1 \tag{5.19}$$

这时可看出，既然(4.21)中的 c 是任意的，那么在 $c=0$ 时，(5.19)的结果与(4.21)是一致的。

总结起来，在本文中我们对于二维线性 σ 模型，求出了各种有用的 Green 函数，并利用 BJL 技术得到了相应的 Schwinger 项，从而获得与非微扰方法一致的左手流的反常 Ward 恒等式。这样就证明了与费米场有 Yukawa 耦合的 Higgs 场确实不进入手征反常。关于手征辅助场在有反常规范理论量子化问题中的作用问题，我们将在另外的文章中进行讨论。

参　考　文　献

[1] Dac Sung Hwang, *Nucl. Phys.*, **B286** (1987), 231.
[2] Faddeev. L. D. and Shatashvili. S. L., *Phys. Lett.*, **167B** (1986), 225.
[3] 阮图南，井思聪，中国科学，**A12**(1987)，1273.
[4] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.*, **148**(1966), 1467.
K. Johnson and F. E. Low, *Prog. Theoret. Phys.*, (Kyoto) Suppl 37—38 (1966), 74.
[5] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, New York, Yeshiva Univ., 1964.
[6] David Lurie, Particles and Fields, INTERSCIENCE PUBLISHERS a division of John Wiley & Sons, New York London Sydney 1968.

THE CHIRAL ANOMALY OF LINEAR σ MODEL AND SCHWINGER TERMS

RUAN JIE　JING SICONG

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

In this paper, we calculate anomaly of the left-handed current in the two-dimensional linear σ model by using Bjorken-Johnson-Low limit. We have got the results which are quite consistent with those from non-perturbation functional integration.