

自持磁约束电子云的流体理论*

II. 电子云中各物理量的分布和数值计算方法

郁庆长

(中国科学院高能物理研究所,北京)

摘 要

本文研究了轴对称自持磁约束电子云中电子密度、电子温度和漂移角速度的分布,讨论了由电离产生的离子对电子云的影响,介绍了电子云和电磁场各物理量之间的比例关系和数值计算方法。

在本文第一部分^[1]中研究了依靠 Penning 放电维持的轴对称磁约束电子云,得到了描述电子云中电子运动特性的流体方程组。它由连续性方程、动量方程、能量方程、静电场方程和热传导方程组成。在圆柱坐标系 (r, φ, z) 中它具有下述形式:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (n v_z) = Z n, \quad (1)$$

$$r v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + r v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{e}{m} (v_r B_z - v_z B_r) - 2 v_r \omega - v' \omega r, \quad (2)$$

$$\frac{e}{m} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \omega r B_z \right) + \omega^2 r - \frac{1}{m n} \frac{\partial}{\partial r} (n k T) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e}{m} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \omega r B_r \right) - \frac{1}{m n} \frac{\partial}{\partial z} (n k T) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_r) + \frac{\partial S_z}{\partial z} = e n v_r \frac{\partial U}{\partial r} + e n v_z \frac{\partial U}{\partial z} - Z n E_i, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{e n}{\epsilon_0}, \quad (6)$$

$$\frac{5 n k T}{2 m} \frac{\partial}{\partial r} (k T) + \left(\frac{e^2}{m^2 v} B_z^2 + \nu \right) q_r = \frac{e^2}{m^2 v} B_r B_z q_z, \quad (7)$$

$$\frac{5 n k T}{2 m} \frac{\partial}{\partial z} (k T) + \left(\frac{e^2}{m^2 v} B_r^2 + \nu \right) q_z = \frac{e^2}{m^2 v} B_r B_z q_r, \quad (8)$$

$$S_r = n v_r \left(\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{5}{2} k T \right) + q_r, \quad (9)$$

本文1990年3月13日收到。

* 国家自然科学基金资助项目。

$$S_z = nv_z \left(\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{5}{2} kT \right) + q_z. \quad (10)$$

此处 $e, m, n, T, \omega, \nu, S, q$ 分别为电子的电荷(绝对值)、质量、密度、温度、漂移角速度、扩散速度、能流密度和热流密度, k 为 Boltzmann 常数, ϵ_0 为真空介电常数, U 为电位, B 为磁感应强度, ν 为电子和约束装置中残余气体原子碰撞的有效动量传输频率, Z 为气体原子的电离频率, $\nu' = \nu + Z$, E_i 为气体原子的电离能. 由于 ν, Z 远小于电子回旋频率, 电子扩散速度也较小, 所以略去了 ν, Z, ν 的二次项.

本文这一部分主要讨论轴对称自持磁约束电子云中各物理量的分布, 电离所产生的离子对电子云的影响, 以及上述流体方程组的数值解法.

一、磁 面

将轴对称系统中任一条磁力线绕对称轴旋转即得磁面. 在一个磁面上 rA_ϕ 为常数, 此处 A_ϕ 为磁场矢量位的角向分量.

每个磁面的两端和约束区域的边界相交, 称交线为磁面的边界. 对于靠近对称轴的磁面, 边界处一般电位较低, 修正位 ψ 远小于 0, 因此泄漏因子 σ 很小 ($\psi = U - \omega r A_\phi + m\omega^2 r^2/2e$, $\sigma \approx \sqrt{kT/2\pi m} \exp(e\psi/kT) \sin \alpha$, α 为磁面与边界的夹角^[1]), 磁面附近的电子主要是通过横向扩散由磁面内流向磁面外, 如图 1 中的磁面 A. 另外一些磁面边界处电位较高, 修正位 $\psi \gtrsim 0$, 泄漏因子较大, 大量电子沿磁面纵向扩散逸出约束区域, 只有少数电子横向扩散到磁面外, 因此磁面外的电子密度明显减小. 由此可见, 电子云的径向边界位置取决于离对称轴最近的边界泄漏因子较大的磁面, 如图 1 中的磁面 B.

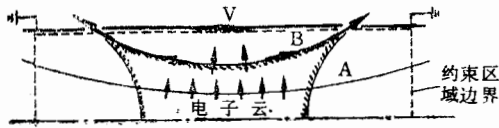


图 1 约束装置中的磁面和电子云

在电子云的约束区域中作一系列磁面, 它们把约束区域分成一系列子区域. 子区域的边界由内侧磁面, 外侧磁面和两端的约束区域边界组成. 对于稳定电子云子区域电子数应保持不变, 因此对任一子区域有

$$\oint n v_N dA = \iiint Z n dV. \quad (11)$$

式左边对子区域边界面积分, v_N 为边界面上电子的法向扩散速度, 以向外为正, dA 为面元. 式右边对子区域积分, dV 为体元.

类似地, 根据能量守恒, 对每一子区域有

$$\oint (S_N - e n v_N U) dA = - \iiint Z n (eU + E_i) dV, \quad (12)$$

S_N 为边界面上电子的法向能流密度, 以向外为正. 根据正则角动量 $m\omega r^2 - e r A_\phi$ 守恒, 对每一子区域有

$$\oint n v_N (m\omega r^2 - e r A_\phi) dA = - \iiint n (\nu m\omega r^2 + Z e r A_\phi) dV. \quad (13)$$

式(11)、(12)、(13)是流体方程组中方程(1)、(5)、(2)的积分形式.

二、电子云中各物理量的分布

在电子云中电子沿磁力线运动比横越磁力线容易得多。如果在某一磁面上电子云偏离了平衡状态, 电子的运动将很快使它恢复平衡。因此可以认为在每一磁面上电子云处于平衡态, 其电子温度和漂移角速度为常数。这一点也可从下面的讨论中看出。由式(7)、(8)可导出电子云中沿磁力线方向的热流密度

$$q_L = -\frac{5nkT}{2m\nu} \frac{\partial}{\partial L}(kT), \quad (14)$$

$\frac{\partial}{\partial L}$ 表示沿磁力线方向的导数。由于 ν 很小, 不大的 $\frac{\partial}{\partial L}(kT)$ 就会引起很大的 q_L , 从而使此磁面的 T 恢复常数。对漂移角速度也可作类似讨论^[2]。

选取电子云中对称轴上电子密度 n 取最大值的一点为电子云的中心, 记这点的 n 为 n_0 。平衡态电子云中电子密度分布为^[1,3]

$$n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right), \quad (15)$$

选 $n = n_0$ 处的 ϕ 为 0。对于自持磁约束电子云, 由于每一磁面上电子云处于平衡态, 可以认为其电子密度分布满足

$$n = n_0 \exp\left[\frac{e}{kT}(\phi + \beta)\right], \quad (16)$$

β 是一个较小的量, 在每一磁面上它为常数。为了说明这一点, 可由式(3)、(4)导出

$$e \frac{\partial U}{\partial L} + m\omega^2 r \frac{\partial r}{\partial L} - \frac{\partial}{\partial L}(kT) - \frac{kT}{n} \frac{\partial n}{\partial L} = 0. \quad (17)$$

由于每一磁面上 rA_ϕ , T , ω 为常数, 得到

$$\frac{\partial}{\partial L}(e\phi - kT \ln n) = 0. \quad (18)$$

从式(16)可得

$$e\phi - kT \ln n = -e\beta - kT \ln n_0, \quad (19)$$

显然在每一磁面上 β 为常数。因此要确定电子云中电子密度、温度和漂移角速度的分布, 只需计算 n_0 和各磁面的 T, ω, β 。

由式(3)、(4)还可导出

$$\begin{aligned} e \frac{\partial U}{\partial N} - e\omega r B + m\omega^2 r \frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial}{\partial N}(kT) - \frac{kT}{n} \frac{\partial n}{\partial N} &= 0, \\ e \frac{\partial \beta}{\partial N} - (erA_\phi - m\omega r^2) \frac{\partial \omega}{\partial N} + (1 - \ln n) \frac{\partial}{\partial N}(kT) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$\frac{\partial}{\partial N}$ 表示沿磁面法线方向的导数。它描述了 T, ω, β 之间的关系。

三、电子云中的离子

在前面的叙述中都没有考虑电子云中由电离产生的离子。现在讨论这些离子对电子云的影响。此时流体方程组中的静电场方程(6)应修改为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n - n_i), \quad (21)$$

n_i 为离子密度。

电子云中由电离产生的离子在电场作用下最终将落到较低电位的电极即阴极上。离子轰击使阴极发射电子。这些电子受电场加速获得较高能量，它们沿磁力线进入电子云并在其中往复振荡。由于部分能量用以电离气体原子，它们大多数不能再回到阴极。

电子云内的电场主要是径向的。电离产生的离子大多数先流向对称轴，集中在轴周围半径为 r_0 的区域内，然后再在两端轴向电场作用下流向阴极。此处 $r_0 = \sqrt{Q_i / (Q_i^2 + 4\omega)} R$ ， R 为电子云半径， Q_i 为离子回旋频率^[4]。这样轴附近就有较高的离子密度，其数值可用下式近似计算：

$$n_i = \frac{1}{2\pi r_0^2} \iiint \frac{ZndV}{\sqrt{2M(U - U_0)}}. \quad (22)$$

积分对整个电子云所在区域进行， M 为离子质量， U_0 为电子云中心的电位。

在平衡态电子云中除边缘之外电子密度是比较均匀的。对于自持磁约束电子云，由于离子的存在，对称轴上的电荷密度绝对值将低于均匀区域的电荷密度绝对值。用 δ 表示两者之差与均匀区域电荷密度之比，显然

$$\delta = (n_1 - n_0 + n_i) / n_1, \quad (23)$$

n_1 为 $r_0 < r \ll R$ 处的平均电子密度。根据方程(3)，在 $r < r_0$ 处

$$\frac{e^2}{2\epsilon_0} (n_0 - n_i) r - e\omega Br + m\omega^2 r - \frac{kT_0}{r_0^2} \frac{n_1 - n_0 r}{n_0} \approx 0, \quad (24)$$

T_0 为电子云中心附近的电子温度。当不存在离子时对称轴上电子密度亦为 n_1 ，上式变为

$$\frac{e^2 n_1 r}{2\epsilon_0} - e\omega Br + m\omega^2 r \approx 0. \quad (25)$$

从以上两式得

$$\frac{e^2}{2\epsilon_0} (n_1 - n_0 + n_i) + \frac{kT_0}{r_0^2 n_0} (n_1 - n_0) \approx 0,$$

$$\delta \approx \frac{n_i}{n_1 \left(1 + \frac{e^2 r_0^2 n_0}{2\epsilon_0 kT} \right)}. \quad (26)$$

设 γ 为每个落到阴极上的离子所打出的电子中能进入电子云的电子数， $\gamma \ll 1$ 。阴极发射的电子虽然远少于电子云中电离产生的电子，但是它们在维持放电上却起重要作用。粗略地假定这些电子均匀地进入电子云。根据式(11)、(12)，对于 $r < r_0$ 区域，

$$2\pi r_{0j} = \pi r_0^2 Z n_0 + \pi r_0^2 Z \gamma n_0, \quad (27)$$

$$2\pi r_{0j} \cdot \frac{5}{2} kT_0 + \pi r_0^2 Z n_0 E_i \approx \pi r_0^2 Z \gamma n_0 e U_c. \quad (28)$$

j 为 $r = r_0$ 处的径向电子流, $Z\gamma n_0$ 为 $r < r_0$ 处阴极发射的电子的密度, U_c 为电子云中心与阴极的电位差. 消去 j 可得

$$kT_0 \approx \frac{2}{5}(\gamma e U_c - E_i). \quad (29)$$

如果不考虑阴极发射的电子 ($\gamma = 0$), 轴附近的电子云就无法维持.

四、比例关系

由流体方程组可以导出电子云与电磁场各物理量之间的一些比例关系. 为此引入下面的简化条件:

1. ν, Z 和约束装置中的气压成正比而与电子的动能无关.
2. 流体方程组中的热导项和包含电离能的项可以略去.

这些条件不完全符合实际, 因此导出的比例关系仅仅是近似的. 但是它们在电子云研究中仍然颇有用处. 下面列举这些比例关系, 其推导方法可参考[5].

1. 电子扩散速度 ν 与约束装置中的气压成正比.
2. 当磁场形状不变而强度变化时, 为了保持电子云形状和相对密度分布不变, 应改变各电极间电位差使与 B^2 成正比, 此时 $\omega \propto B, T \propto B^2, n \propto B^2$.
3. 当约束装置(包括磁场)几何尺寸作相似变换时, 为了使电子云尺寸也按同样比例作相似变换, 应改变各电极间电位差使与 d^2 成正比, d 为约束装置任一基准尺寸. 此时 $T \propto d^2, \nu \propto d$, 而 ω, n 不变.

如果磁场的强度变化时各电极间电位差不变, 电子云的形状与密度分布将变化以满足流体方程组. 如果磁场过高电子云的变化已不可能满足流体方程组, 此时 Penning 放电的类型将发生变化, 在对称轴周围将出现一个等离子体柱, 其电位接近阴极. 文[6]指出此时磁场满足

$$B^2 \approx \frac{16m\nu V_a}{3eZR_a^2}, \quad (30)$$

V_a 为约束装置总电压, R_a 为约束区域半径. 如果磁场过低, 电子温度将会降低到难于电离气体, 此时放电将无法维持. 文[6]指出此时磁场应为

$$B \approx \frac{8m\nu}{3eZR_a} \sqrt{\frac{2E_i}{m}}. \quad (31)$$

式(30)、(31)与实验基本一致.

五、数值计算方法

在一定边界条件下求解流体方程组可以计算出轴对称自持磁约束电子云中各物理量的分布. 但是这种求解是很困难的, 下面介绍一种简化的方法.

1. 选定一组参数 n_0, T, ω , 在已知边界条件下计算出平衡态电子云的电子密度和电位的分布. 这些分布应尽可能接近待求的自持磁约束电子云的相应分布.
2. 选定一系列磁力面, 将约束区域分为一系列子区域.
3. 利用式(11)–(13)重新计算各磁面的 T, ω , 再用式(20)计算各磁面的 β . 计算时

近似地认为

$$\omega \approx \overline{v_N \omega} / \bar{v}_N, \quad (32)$$

$$\iint n v_N U dA \approx \bar{v}_N \iint n U dA, \quad (33)$$

此处

$$\bar{v}_N = \iint n v_N dA / \iint n dA, \quad (34)$$

$$\overline{v_N \omega} = \iint n v_N \omega r^2 dA / \iint n r^2 dA. \quad (35)$$

上述面积分都是对磁面进行的.

4. 利用非线性迭代法解下述方程求电位

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{e n_0}{\epsilon_0} \exp \left[\frac{e}{kT} \left(U - U_0 - \omega r A_\phi + \frac{m \omega^2 r^2}{2e} + \beta \right) \right], \quad (36)$$

再用式(16)计算电子密度.

5. 计算电子云的边界形状和总电子数.

6. 如连续两次计算所得结果很相近则结束计算, 否则返回第3步.

在计算过程中一般可不考虑电离中产生的离子, 必要时可利用式(22)、(26)对结果作适当修正. 阴极发射的电子在计算电子温度时需加以考虑.

上述方法将在另外的文章中加以应用.

参 考 文 献

- [1] 郁庆长, 高能物理与核物理, 14(1990), 973.
- [2] 郁庆长, 电子云中的角动量问题, 中国科学院高能物理研究所, 内部资料, 1990年.
- [3] 郁庆长, 高能物理与核物理, 13(1989), 298.
- [4] G. E. Sieger, R. C. Connolly and H. W. Lefevre, *Phys. Fluids*, 27(1984), 291.
- [5] P. T. Kirstein, G. S. Kino and W. E. Waters, *Space Charge Flow*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [6] W. Schunrman, *Physica*, 36(1967), 136.

THE FLUID THEORY OF SELF-SUSTAINING MAGNETICALLY CONFINED ELECTRON CLOUDS

II. DISTRIBUTIONS OF PHYSICAL QUANTITY OF ELECTRON CLOUDS AND NUMERICAL COMPUTATIONAL METHOD

YU QINGCHANG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

In this paper the distributions of the electron density, the electron temperature and the drift angular velocity in the axisymmetrical self-sustaining magnetically confined electron clouds are studied. The influence of the ions produced by ionization of the electron cloud is discussed. The scaling relations and the numerical computational method of the physical quantities of the electron clouds and the electromagnetic fields are introduced.