第 14 卷 第 2 期　高能物理与核物理　Vol. 14, No. 2
1990 年 2 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Feb. 1990

李超代数 $B(0,1)$ 的非齐次微分实现，Boson-Fermion 实现及其表示

付 洪 忱
（东北师范大学物理系，长春）

摘　　要

本文研究了李超代数 $B(0,1)$ 在非齐次多项式空间上的微分实现（称为非齐次微分实现），和对应的非齐次 Boson-Fermion 实现. 利用非齐次 Boson-Fermion 实现，在 Heisenberg-Weyl 超代数的通用包络代数，其子空间和商空间上研究了 $B(0,1)$ 的一类新的不可分解表示和不可约表示. $B(0,1)$ 的所有有限维不可约表示则作为特殊情况全部给出.

一、引　　言

苏联学者最近提出的量子力学中的“准精确可解问题”[1-3]已被证明与李(超)代数的有限维非齐次微分实现相联系[2,3]. 研究李超代数的有限维非齐次微分实现是解决“准精确可解问题”的关键. 本文作者已经给出了任意李代数的非齐次微分实现的明显表达式[4]. 本文则试图把它推广到李超代数,具体地研究了李超代数 $B(0,1)$ 的非齐次微分实现.

考虑到 C-数的微分算子与 Boson 态的产生和湮灭算子，Grassmann 数的微分算子与 Fermion 态的产生和湮灭算子的对应关系，由非齐次微分实现对应地给出了 $B(0,1)$ 的非齐次 Boson-Fermion 实现. 它与齐次 Boson-Fermion 实现[5]相比,少用一个 Boson 态的产生和湮灭算子.

李超代数的不可分解表示在描述不稳定粒子体系中起重要作用[6]. 利用李超代数的 Boson-Fermion 实现研究李超代数的不可分解表示是十分有效的方法[5]. 本文利用 $B(0,1)$ 的非齐次 Boson-Fermion 在 Heisenberg-Weyl 超代数的通用包络代数，其子空间和商空间上研究了 $B(0,1)$ 的一类新的不可分解表示. 特别是在广义 Fock 空间的子空间上,自然地得到了 $B(0,1)$ 的全部有限维不可约表示.

本文中 $\mathbb{Z}^+$ 表示全体非负整数集合. $\mathbb{C}$ 表示复数域. $\tilde{G}$ 为 Grassmann 代数. span $\{A_i\}$ 表示由集合 $\{A_i\}$ 张成的线性空间.

本文 1989 年 4 月 6 日收到.

二、$B(0,1)$ 的非齐次微分实现和 Boson-Fermion 实现

李超代数 $B(0,1)$ 的基为：

$$\{L_0, L_+, L_-, \in B(0,1)_{\bar{0}} \mid V_{+\frac{1}{2}},\ V_{-\frac{1}{2}} \in B(0,1)_{\bar{1}}\} \tag{2.1}$$

满足如下的对易和反对易关系：

$$\text{A:}\ [L_0, L_\pm] = \pm L_\pm, [L_+, L_-] = -L_0$$

$$\text{B:}\ [L_0, V_{\pm\frac{1}{2}},] = \pm V_{\pm\frac{1}{2}}, [L_\pm, V_{\pm\frac{1}{2}}] = 0, [L_\pm, V_{\mp\frac{1}{2}}] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\mp\frac{1}{2}}$$

$$\text{C:}\ \{V_{\pm\frac{1}{2}}, V_{\pm\frac{1}{2}}\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} L_\pm, \{V_{+\frac{1}{2}}, V_{-\frac{1}{2}}\} = -\frac{1}{2} L_0 \tag{2.2}$$

选择 $B(0,1)$ 的一个(2,1)维不可约表示 D:

$$D(L_0) = \left[\begin{array}{cc:c} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad D(L_+) = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$D(L_-) = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.3}$$

$$D(V_{+\frac{1}{2}}) = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \qquad D(V_{-\frac{1}{2}}) = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hdashline \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

为了研究 $B(0.1)$ 在多项式空间上的微分实现，引入三个独立变量 x_1, x_2, y，其中 x_1, x_2 为 C-数，y 是 Grassmann 数，并把它们与表示空间的基等同起来：

$$x_1 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

由(2.3),(2.4)我们得到：

$$L_0 x_1 = \frac{1}{2} x_1, \qquad L_0 x_2 = -\frac{1}{2} x_2, \qquad L_0 y = 0$$

$$L_+ x_1 = 0, \qquad L_+ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1, \qquad L_+ y = 0$$

$$L_-x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \quad L_-x_2 = 0, \qquad L_-y = 0 \tag{2.5}$$

$$V_{+\frac{1}{2}}x_1 = 0, \qquad V_{+\frac{1}{2}}x_2 = -\frac{1}{2}y, \qquad V_{+\frac{1}{2}}y = -\frac{1}{2}x_1$$

$$V_{-\frac{1}{2}}x_1 = \frac{1}{2}y, \quad V_{-\frac{1}{2}}x_2 = 0, \qquad V_{-\frac{1}{2}}y = -\frac{1}{2}x_2$$

由此可把 $B(0.1)$ 的生成元写成微分形式:

$$L_0 = \frac{1}{2}x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad L_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$L_- = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad V_{+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.6}$$

$$V_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial y}$$

(2.6) 实质上是在一次齐次多项式空间 $\mathscr{P}_1 = \mathrm{span}\,\{x_1, x_2, y\}$ 上的微分实现. 对于 n 次齐次多项式空间 $\mathscr{P}_n$:

$$\mathscr{P}_n = \mathrm{span}\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}y^k \,|\, i_1,\ i_2 \in \mathbf{Z}^+,\ k = 0, 1, i_1 + i_2 + k = n\} \tag{2.7}$$

它荷载着 $B(0,1)$ 的表示

$$D_s^{\otimes n} \equiv (\underbrace{D\otimes D\otimes\cdots\otimes D}_{n\text{次}})_{\text{symmetrized}} \tag{2.8}$$

利用直积表示的定义:

$$\hat{T}(x_1^{i_1}x_2^{i_2}y^k) = (Tx_1^{i_1})x_2^{i_2}y^k + x_1^{i_1}(Tx_2^{i_2})y^k + x_1^{i_1}x_2^{i_2}(Ty^k) \tag{2.9}$$

其中 T 代表 $B(0,1)$ 的生成元, 可以得到 $B(0,1)$ 在 $\mathscr{P}_n$ 上的微分实现 $\hat{T}$. 容易验证, $\hat{T} = T$. 我们称实现 $\hat{T}$ 为齐次微分实现.

但在准精确可解问题中,需要建立在非齐次多项式空间上的微分实现. 为此,定义两个新变量:

$$\xi = x_1/x_2, \quad \eta = y/x_2 \quad (x_2 \neq 0) \tag{2.10}$$

其中 ξ 为 C-数, η 为 Grassmann 数. $\mathscr{P}_n$ 的基变成

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}y^k \Rightarrow \xi^{i_1}x_2^n\eta^k \quad (i_1 + k = 0, 1, \cdots, n) \tag{2.11}$$

令 $$\mathscr{P}'_n = \mathrm{span}\{\xi^{i_1}\chi_2^n\eta^k \,|\, i_1 + k = 0, 1, 2, \cdots, n,\ i_1 \in \mathbf{Z}^+, k = 0, 1\} \tag{2.12}$$

则 $\mathscr{P}'_n$ 是一个非齐次多项式空间. 利用(2.6)(2.10)以及下式:

$$\bar{T}(\xi^{i_1}x_2^n\eta^k) = (\hat{T}\xi^{i_1})\chi_2^n\eta^k + \xi^{i_1}(\hat{T}x_2^n)\eta^k + \xi^{i_1}x_2^n(\hat{T}\eta^k) \tag{2.13}$$

可得到 $B(0,1)$ 在 $\mathscr{P}'_n$ 上的微分实现 $\bar{T}$:

$$\bar{L}_0 = -\frac{1}{2}n + \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$\bar{L}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}n\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\eta\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$\bar{L}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{2.14}$$

$$\bar{V}_{+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}n\eta + \frac{1}{2}\xi\eta\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$\bar{V}_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

这就是我们所要求的 $B(0,1)$ 的非齐次微分实现。

应指出，x_2^n 是 $\mathscr{P}'_n$ 基中的一个公因子。所以既使把 n 由正整数推广到任意实数，由于获得(2.14)过程中均为微分运算，我们仍可得到实现(2.14)，下文中的 n 已推广为任意实数。

注意到 C-数的微分算子 $\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$ 与 Boson 态的产生和湮灭算子 $\{b^+, b\}$ 的对应关系

$$b^+ \Longleftrightarrow \xi, \quad b \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$[b,b^+] = E, \quad [E,b^+] = [E,b] = 0 \quad (E\ \text{为单位算子}) \tag{2.15}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi},\xi\right] = 1, \quad [1,\xi] = \left[1,\frac{\partial}{\partial\xi}\right] = 0$$

以及 Grassmann 数的微分算子 $\left[\eta,\frac{\partial}{\partial\eta}\right]$ 与 Fermion 态的产生和湮灭算子 $\{f^+, f\}$ 的对应关系：

$$f^+ \Longleftrightarrow \eta, \quad f \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$\{f,f^+\} = E, \quad [E,f] = [E,f^+] = 0 \tag{2.16}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta},\eta\right\} = 1, \quad \left[1,\frac{\partial}{\partial\eta}\right] = [1,\eta] = 0$$

可对应地写出 $B(0,1)$ 的非齐次 Boson-Fermion 实现，

$$\tilde{L}_0 = b^+b + \frac{1}{2}f^+f - \frac{1}{2}n$$

$$\tilde{L}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}nb^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}b^{+2}b + \frac{1}{\sqrt{2}}b^+f^+f$$

$$\tilde{L}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}b$$

$$\tilde{V}_{+\frac{1}{2}} = -\frac{n}{2}f^+ + \frac{1}{2}b^+f^+b + \frac{1}{2}f^{+2}f - \frac{1}{2}b^+f$$

$$\tilde{V}_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}f^+b - \frac{1}{2}f \tag{2.17}$$

对于表示 D，它只用一个玻色子态和一个费米子态的产生和湮灭算符，比[5]中的齐次 Boson-Fermion 实现少用一个 Boson 态的产生和湮灭算子。

三、$B(0,1)$ 的不可分解表示

根据 PBW 定理,$(1+1)$态 Heisenberg-Weyl 超代数 $\mathscr{H}:\{b^+,b,f^+,f,E\}$ 的通用包络代数Ω的基可以取为:

$$\{X(k,l,\alpha,\beta,t)\equiv b^{+k}b^{l}f^{+\alpha}f^{\beta}E^{t}\,|\,k,l,t\in \mathbb{Z}^+;\alpha,\beta=0,1\}\tag{3.1}$$

现把Ω从复数域C扩张到 Grassmann 代数 $\tilde{G}$ 上，使之变成定义在有1非交换环上的模$\bar{\Omega}$,通常的通用包络代数不过是这个模的子模[7].

$\mathscr{H}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的表示定义为:

$$\begin{aligned}
&\rho(b^+)X(k,l,\alpha,\beta,t)=X(k+1,l,\alpha,\beta,t)\\
&\rho(b)X(k,l,\alpha,\beta,t)=X(k,l+1,\alpha,\beta,t)+kX(k-1,l,\alpha,\beta,t+1)\\
&\rho(f^+)X(k,l,\alpha,\beta,t)=(1-\alpha)X(k,l,\alpha+1,\beta,t)\\
&\rho(f)X(k,l,\alpha,\beta,t)=(-1)^{\alpha}X(K,l,\alpha,\beta+1,t)+\alpha X(k,l,\alpha-1,\beta,t+1)
\end{aligned}\tag{3.2}$$

设I是由 $(E-1)$ 生成的 $\bar{\Omega}$ 的左理想,则商空间 $V\equiv\bar{\Omega}/I$ 的基可以取为:

$$\{X(k,l,\alpha,\beta)\equiv X(k,l,\alpha,\beta,0)\mathrm{Mod}I\,|\,k,l\in \mathbb{Z}^+,\alpha\beta=0,1\}\tag{3.3}$$

表示(3.2)在V上诱导的表示为:

$$\begin{aligned}
&\rho(b^+)X(k,l,\alpha,\beta)=X(k+1,l,\alpha,\beta)\\
&\rho(b)X(k,l,\alpha,\beta)=X(k,l+1,\alpha,\beta)+kX(k-1,l,\alpha,\beta)\\
&\rho(f^+)X(k,l,\alpha,\beta)=(1-\alpha)X(k,l,\alpha+1,\beta)\\
&\rho(f)X(k,l,\alpha,\beta)=(-1)^{\alpha}X(k,l,\alpha,\beta+1)+\alpha X(k,l,\alpha-1,\beta)
\end{aligned}\tag{3.4}$$

利用 $\Gamma(T(b^+,b,f^+,f))=\tilde{T}(\rho(b^+),\rho(b),\rho(f^+),\rho(f))$，这里$T$代表 $B(0,1)$ 的生成元,以及 $B(0.1)$ 的 Boson-Fermion 实现(2.14),得到 $B(0,1)$ 在V上的表示Γ:

$$\begin{aligned}
\Gamma(L_0)X(k,l,\alpha,\beta)&=\left(-\frac{n}{2}+k+\frac{\alpha}{2}\right)X(k,l,\alpha,\beta)\\
&\quad+X(k+1,l+1,\alpha,\beta)+\frac{1}{2}(-1)^{\alpha}(1-\alpha)X(k,l,\alpha+1,\beta+1)\\
\Gamma(L_+)X(k,l,\alpha,\beta)&=-\frac{1}{\sqrt{2}}(n-k-\alpha)X(k+1,l,\alpha,\beta)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{2}}X(k+2,l+1,\alpha,\beta)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\alpha}(1-\alpha)X(k+1,l,\alpha+1,\beta+1)\\
\Gamma(L_-)X(k,l,\alpha,\beta)&=\frac{1}{\sqrt{2}}X(k,l+1,\alpha,\beta)+\frac{k}{\sqrt{2}}X(k-1,l,\alpha,\beta)\\
\Gamma(V_{+\frac{1}{2}})X(k,l,\alpha,\beta)&=-\frac{1}{2}(n-k-\alpha)(1-\alpha)X(k,l,\alpha+1,\beta)\\
&\quad+\frac{1}{2}(1-\alpha)X(k+1,l+1,\alpha+1,\beta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(-1)^{\alpha}X(k+1,l,\alpha,\beta+1)\\
&-\frac{\alpha}{2}X(k+1,l,\alpha-1,\beta)\\
\Gamma(V_{-\frac{1}{2}})X(k,l,\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}(1-\alpha)X(k,l+1,\alpha+1,\beta)\\
&+\frac{1}{2}k(1-\alpha)X(k-1,l,\alpha+1,\beta)\\
&-\frac{1}{2}(-1)^{\alpha}X(k,l,\alpha,\beta+1)\\
&-\frac{1}{2}\alpha X(k,l,\alpha-1,\beta)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

在上式推导中，利用了当 $\alpha=0.1$ 时，$\alpha(1-\alpha)\equiv 0$，$\alpha(2-\alpha)\equiv\alpha$ 的条件。

注意到式(3.5)中值 $(l+\beta)$ 并不减少，故由非负整数 $S\in\mathbb{Z}^{+}$ 确定一个不变子空间 $V^{[S]}$：

$$
V^{[S]}=\mathrm{span}\{X(k,l,\alpha,\beta)\in V\mid l+\beta\geqslant S\}
\tag{3.6}
$$

但不存在其不变的补空间，所以，表示(3.5)是不可分解表示。并且，表示(3.5)限制到每个 $V^{[S]}$ 上，都得到在 $V^{[S]}$ 上的一个不可分解表示。

设 J 是由 $\{b-\Lambda,\ f-\xi\mid\Lambda\in\mathbb{C},\ \xi\in\tilde{G}\}$ 生成的 V 的左理想。则商空间 $\mathscr{F}\equiv V/J$，叫做广义 Fock 空间，的基可以取为：

$$
\mathscr{F}:\{X(k,\alpha)\equiv X(k,0,\alpha,0)\mathrm{Mod}J\mid k\in\mathbb{Z}^{+},\alpha=0,1\}
\tag{3.7}
$$

表示(3.5)在 $\mathscr{F}$ 上诱导的表示为：

$$
\begin{aligned}
\Gamma(L_0)X(k,\alpha) &= \left(-\frac{n}{2}+k+\frac{\alpha}{2}\right)X(k,\alpha)+\Lambda X(k+1,\alpha)\\
&+\frac{1}{2}(1-\alpha)\xi X(k,\alpha+1)\\
\Gamma(L_{+})X(k,\alpha) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(n-k-\alpha)X(k+1,\alpha)\\
&+\frac{\Lambda}{\sqrt{2}}X(k+2,\alpha)+\frac{\xi}{\sqrt{2}}(1-\alpha)X(k+1,\alpha+1)\\
\Gamma(L_{-})X(k,\alpha) &= \frac{\Lambda}{\sqrt{2}}X(k,\alpha)+\frac{k}{\sqrt{2}}X(k-1,\alpha)\\
\Gamma(V_{+\frac{1}{2}})X(k,\alpha) &= -\frac{1}{2}(n-k-\alpha)(1-\alpha)X(k,\alpha+1)\\
&+\frac{1}{2}\Lambda(1-\alpha)X(k+1,\alpha+1)\\
&-\frac{1}{2}\xi X(k+1,\ \alpha)-\frac{\alpha}{2}X(k+1,\alpha-1)\\
\Gamma(V_{-\frac{1}{2}})X(k,\ \alpha) &= \frac{1}{2}\Lambda(1-\alpha)X(k,\alpha+1)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$+\frac{1}{2}k(1-\alpha)X(k-1,\alpha+1)-\frac{1}{2}\xi X(k,\alpha)$$
$$-\frac{1}{2}\alpha X(k,\alpha-1)$$

如果 Λ,ξ 不全为零，表示(3.8)是一个无穷维的不可约表示. 当 $\Lambda=0$，$\xi=0$ 时，表示(3.8)变成：

$$\Gamma(L_0)X(k,\alpha)=\left(-\frac{n}{2}+k+\frac{\alpha}{2}\right)X(k,\alpha)$$
$$\Gamma(L_+)X(k,\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(n-k-\alpha)X(k+1,\alpha)$$
$$\Gamma(L_-)X(k,\alpha)=\frac{k}{\sqrt{2}}X(k-1,\alpha) \tag{3.9}$$
$$\Gamma(V_{+\frac{1}{2}})X(k,\alpha)=-\frac{1}{2}(n-k-\alpha)(1-\alpha)X(k,\alpha+1)$$
$$-\frac{\alpha}{2}X(k+1,\alpha-1)$$
$$\Gamma(V_{-\frac{1}{2}})X(k,\alpha)=\frac{1}{2}k(1-\alpha)X(k-1,\alpha+1)$$
$$-\frac{1}{2}\alpha X(k,\alpha-1)$$

如果 $n\notin Z^+$,表示(3.9)是无穷维的不可约,表示. 如果 $n\in Z^+$,显然存在下面的不变子空间:

$$\mathscr{F}(n):\{X(k,\alpha)\in\mathscr{F}\mid k+\alpha\leqslant n,\ k\in Z^+,\ \alpha=0,1\} \tag{3.10}$$
$$\dim\mathscr{F}(n)=2n+1$$

但并不存在其不变的补空间,故当 $n\in Z^+$ 时,表示(3.9)是不可分解表示.

(3.9)限制到 $\mathscr{F}(n)$ 上,实质上给出了 $B(0,1)$ 的有限维不可约表示. 下面我们仔细讨论它.

四、$B(0,1)$ 的有限维不可约表示

重新定义 $\mathscr{F}(n)$ 的基:

$$|j,m,\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m-\alpha)!}}X(j+m,\alpha) \tag{4.1}$$

其中

$$j=\frac{1}{2}n=0,\ \frac{1}{2},1,\ \frac{3}{2},2,\cdots,$$
$$m=\begin{cases}-j,-j+1,\cdots,j & \text{当}\ \alpha=0\\ -j,-j+1,\cdots,j-1 & \text{当}\ \alpha=1\end{cases}$$

则 $B(0,1)$ 在 $\mathscr{F}(n)$ 的新基上的表示为:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(L_0)|j,m,\alpha\rangle = \left(m+\frac{1}{2}\alpha\right)|j,m,\alpha\rangle \\
&\Gamma(L_+)|j,m,\alpha\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m+1)(j-m-\alpha)}\,|j,m+1,\alpha\rangle \\
&\Gamma(L_-)|j,m,\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1-\alpha)}\,|j,m-1,\alpha\rangle \\
&\Gamma(V_{+\frac{1}{2}})|j,m,\alpha\rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{j-m-\alpha}\,(1-\alpha)|j,m,\alpha+1\rangle \\
&\qquad -\frac{1}{2}\alpha\sqrt{j+m+1}\,|j,m+1,\alpha-1\rangle \\
&\Gamma(V_{-\frac{1}{2}})|j,m,\alpha\rangle = \frac{1}{2}(1-\alpha)\sqrt{j+m}\,|j,m-1,\alpha+1\rangle \\
&\qquad -\frac{\alpha}{2}\sqrt{j-m-\alpha+1}\,|j,m,\alpha-1\rangle
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

容易证明这是一个 $4j+1$ 维的不可约表示。

当把 $B(0,1)$ 限制到 $B(0,1)_{\bar{0}}$ 上时，由于 α 值不改变，故 $B(0,1)_{\bar{0}}$ 在 $\mathscr{F}(n)$ 上的表示分解成 $B(0,1)_{\bar{0}}$ 的两个不可约表示的直和：

$$
\mathscr{F}(n)\big|_{B(0,1)_{\bar{0}}} = \mathscr{F}(n)_{\alpha=0} \oplus \mathscr{F}(n)_{\alpha=1} \tag{4.3}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}(n)_{\alpha=0} = \mathrm{span}\{|j,m,0\rangle \mid m=-j,-j+1,\cdots,j\} \\
&\mathscr{F}(n)_{\alpha=1} = \mathrm{span}\{|j,m,1\rangle \mid m=-j,-j+1,\cdots,j-1\} \\
&\dim\mathscr{F}(n)_{\alpha=0} = 2j+1, \quad \dim\mathscr{F}(n)_{\alpha=1} = 2j
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

并且有：

$$
\Gamma(V_{\pm\frac{1}{2}})\mathscr{F}(n)_{\alpha=0} \subset \mathscr{F}(n)_{\alpha=1}, \quad \Gamma(V_{\pm\frac{1}{2}})\mathscr{F}(n)_{\alpha=1} \subset \mathscr{F}(n)_{\alpha=0} \tag{4.5}
$$

如果令 $\mathscr{F}(n)_{\bar{0}} \equiv \mathscr{F}(n)_{\alpha=0}$，$\mathscr{F}(n)_{\bar{1}} \equiv \mathscr{F}(n)_{\alpha=1}$ 分别是偶空间和奇空间，则得到 $B(0,1)$ 的(2,1),(3,2),(4,3)……维不可约表示。如果令

$$
\mathscr{F}(n)_{\bar{0}} \equiv \mathscr{F}(n)_{\alpha=1}, \mathscr{F}(n)_{\bar{1}} \equiv \mathscr{F}(n)_{\alpha=0}
$$

分别是偶空间和奇空间，则得到 $B(0,1)$ 的(1,2),(2,3),(3,4),……维不可约表示。这些表示包含着 $B(0,1)$ 的所有有限维不可约表示[8]。

例如，当 $j=\frac{1}{2}$ 时，$B(0,1)$ 的(1+2)维不可约表示是：

$$
\Gamma(L_0) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \quad
\Gamma(L_+) \doteq \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$\Gamma(L_-)=\left[\begin{array}{c|cc}0&0&0\\ \hline 0&0&0\\ 0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{array}\right]$$

$$\Gamma(V_{+\frac{1}{2}})=\left[\begin{array}{c|cc}0&0&-\frac{1}{2}\\ \hline -\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0\end{array}\right]\quad \Gamma(V_{-\frac{1}{2}})=\left[\begin{array}{c|cc}0&\frac{1}{2}&0\\ \hline 0&0&0\\ -\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right]$$

它就是李超代数 $B(0,1)$ 本身[8]. 对应的(2,1)维不可约表示就是我们构造 $B(0,1)$ 的非齐次微分实现时选取的不可约表示 D.

最后指出，尽管李超代数 $B(0,1)$ 是最简单的李超代数，但研究其非齐次微分实现，非齐次 Boson-Fermion 实现及其表示的方法可以推广到任意李超代数. 我们将看到，在广义 Fock 空间的子空间上，可以自然地得到李超代数的有限维不可约表示，从而得到一种研究李超代数有限维不可约表示的新方法.

作者感谢吉林大学物理系吴兆颜老师的指导与讨论.

参 考 文 献

[1] A. V. Turbiner and A. G. Ushveridze; *Phys. Lett.*, **126A**(1987), 181.

[2] A. V. Turbiner; *Commun. Math Phys.*, **118**(1988), 467—474.

[3] M. A. Shifman; Preprint, CERN-TH. 5265/88, "New Findings in Quantum Mechanics".

[4] Hong-Chen Fu and Chang-Pu Sun; Inhomogeneous Boson Realization of Indecomposable Representations of Lie Algebras, J. Math. Phys., in press.

[5] Chang-Pu Sun; J. Phys. A: *Math. Gen.*, **20**(1987), 5823—5829.

[6] P. A. M. Dirac; *Int. J. Theor. Phys.*, **23**(8)(1984), 677.

[7] N. Jacobson; Basic Algebra.. Acdamic Press,1971.

[8] 孙洪洲、韩其智，物理学进展，Vol. **3**, No. 1(1983).

INHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL REALIZATION, BOSON-FERMION REALIZATION OF LIE SUPERALGEBRA $B(0,1)$ AND ITS REPRESENTATIONS

FU HONGCHEN

(*Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun*)

ABSTRACT

The differential realization of Lie superalgebra $B(0, 1)$ on the space of inhomogeneous polynomials, and the corresponding inhomogeneous Boson-Fermion realization are studiel. A new kind of indecomposable and irreducible representations of Lie superalgebra $B(0, 1)$ is studied on the universal enveloping algebra of Heisenberg-Weyl superalgebra, and on its sub-spaces and quotient spaces. All the finite dimensional irreducible representations are naturally obtained as special cases.