第14卷 第8期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 8
1990年8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1990

二维随机三角点阵上 $SU(3)\times SU(3)$ 手征模型 β 函数的研究*

陈天崙 索存川 黄五群

(南开大学物理系,天津)

摘 要

用蒙特卡洛重正化群方法讨论了二维随机三角点阵上 $SU(3)\times SU(3)$ 手征模型的 β 函数行为, 得出它的行为与四维 $SU(3)$ 规范理论模型的 β 函数相似,但强、弱耦合区的过渡更为平滑, 不存在尖锐的小峰, 标度区从 $\beta=5.8$ 开始.

我们已用蒙特卡洛重正化群(简称 MCRG)方法研究了二维随机三角点阵上 $SU(2)\times SU(2)$ 手征模型的 β 函数[1]. 结果表明, 其 β 函数行为与四维 $SU(2)$ 规范模型的 β 函数行为十分相似, 但强、弱耦合区的过渡更为平滑,不存在由瞬子效应所引起的尖锐小峰. 在此基础上,本文在二维随机三角点阵上, 用 MCRG 方法对 $SU(3)\times SU(3)$ 手征模型进行研究,讨论此模型是否存在相变及 β 函数行为,并与四维 $SU(3)$ 规范模型的结果进行比较.

$SU(3)\times SU(3)$ 手征模型是在点阵的第 i 个格点上放置一个 $SU(3)$ 群元 U_i,且仅考虑最近邻的相互作用,其作用量为

$$S=\sum_{\langle ij\rangle}\left(1-\frac{1}{3}\mathrm{ReTr}\,\lambda_{ij}U_i^+U_j\right)$$
$$=\sum_{i}\left[1-\frac{1}{3}\mathrm{ReTr}\left(U_i^+\sum_{l_i}\lambda_{i,l_i}U_{l_i}\right)\right]. \tag{1}$$

其中 l_i 为格点 i 之最近邻格点标号, λ_{i,l_i} 为权因子,本文取等权情况,即取 $\lambda_{i,l_i}=1$. 配分函数为

$$z=\int e^{-\beta S}dU. \tag{2}$$

其中 $\beta=6/g^2$. 在蒙特卡洛模拟中, 首先将 $SU(2)$ 群元参数化: $a=a_0\mathbb{1}+i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}$ 及 $a_0^2+|\vec{a}|^2=1$,其中 $\vec{\sigma}$ 为泡利矩阵.

为了提高程序进行的速度, 我们采用文献[1]及[2]中介绍的混合的 heat bath-metropolis 方法. 考虑单一格点上的群元. 令 U_0 为要被更新的格点上的 $SU(3)$ 群元, 且 R 为其最近邻格点上群元之和, 从 U_0R 矩阵的左上角(或右上角,或四个角元素)取出一

本文1989年10月19日收到.
* 国家自然科学基金资助课题.

个 2×2 矩阵 b，把 b 中的幺正部分取出，记为 kr，其中 r 是一个 $SU(2)$ 矩阵，k 为幺正部分的行列式值[2]. 通过在补加行和列使对角元素为 1，其余元素为零的方法，可将 ar^+ 扩充为一个 $SU(3)$ 矩阵. 令 U' 为新的该格点上的群元 $U'=ar^+U_0$，则产生 a_0 的几率为

$$
\begin{aligned}
p(a_0)da_0 &= z^{-1}\sqrt{1-a_0^2}\,e^{2\beta k a_0/3} \\
&= z^{-1}\sqrt{1-a_0^2}\,e^{2\beta\bar{k}a_0/3}e^{2\beta(k-\bar{k})a_0/3}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$\bar{k}$ 为自由参数. 由混合的 heat bath-metropolis 方法，首先在[0, 1]区间中产生一均匀分布的随机数 x，由

$$
x = z^{-1}\int_{-1}^{a_0}\sqrt{1-l^2}\,e^{2\beta\bar{k}l/3}dl. \tag{4}
$$

反求出 a_0 作为试验值. 然后用 metropolis 方法检验此 a_0 是否被接受，接受的几率为

$$
p=\begin{cases}1 & \text{若 } (k-\bar{k})[a_0(\text{新})-a_0(\text{老})]>0 \\ \exp\{2\beta(k-\bar{k})[a_0(\text{新})-a_0(\text{老})]/3\}. & \text{其它}\end{cases} \tag{5}
$$

如果新的 a_0 未被接受，则保持原来的群元，否则，随机地取两个角度 $\theta\in[0,\pi]$，$\varphi\in[0, 2\pi]$，求出 $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{1-a_0^2}\cos\theta \\
a_2 &= \sqrt{1-a_0^2}\sin\theta\cos\varphi \\
a_3 &= \sqrt{1-a_0^2}\sin\theta\sin\varphi.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

从而得到对左上角(或右上角，或四个角元素)更新后的群元. 按上述方法，把每个格点上的群元更新一遍，便可得到新的平衡组态. 为达到较高的接收率，我们取 $\bar{k}$ 为 k 的平均值.

在蒙特卡洛重正化群的研究中，为求得模型的 $\Delta\beta(\beta)$ 函数及 β 函数，我们采用描述于文献[3]及[4]中的标准方法，计及的关联函数为:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{1}{3}\sum_{\substack{\langle ij\rangle\\ \text{最近邻对}}}\mathrm{Tr}U_i^+U_j, \\
\Gamma_2 &= \frac{1}{3}\sum_{\substack{\langle ij\rangle\\ \text{次近邻对}}}\mathrm{Tr}U_i^+U_j.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

块化后的群元取为使得 ReTr $(U_l^+U_{l\text{块}})$ 最大的 U_l[5]，其中 $U_{l\text{块}}=\sum_{i\in\text{块}l}U_i$. 为了求得满足上述条件的 U_l，将 $U_{l\text{块}}$ 进行极分解，$U_{l\text{块}}=UD=U_1e^{i\phi}D$，$U$ 为幺正矩阵，$U_1\in SU(3)$，D 为正定厄米矩阵. 在我们关心的耦合常数范围内 U_1 近似为 U_l[5]. 在具体计算中，我们用求特征根的方法求得 U_1.

为了减少计算量，希望只经过少数几步块化尽可能快达到固定点. 为此，采用改进的块化方法[6]: 第 l 块的群元取值为 μ_l 的几率为

$$
\exp(p\,\mathrm{Tr}\mu_l^+U_{l\text{块}}). \tag{8}
$$

其中 $\mu_l\in SU(3)$. p 为一个自由参数. 一般取 $p=c\beta$，c 是一个常数，由关联函数的匹配条件

$$\Gamma(\beta, p, L)_{(K)} = \Gamma(\beta', p, L/b)_{(K-1)}. \tag{9}$$

及大 β 时微扰论的结果[7]共同来决定，我们调试的结果取 $c = 12.5$. (9)式中 L 为大点阵的尺度大小，d 为块化的标度因子。

用文献[1]中所述的方法，构造格点数分别为 320 及 160 的大、小两个点阵，块化的标度因子 $b = \sqrt{2}$.

各次迭代之间的自关联函数定义为

$$\Gamma(l) = \sum_{n} (\Gamma(l+n) - \bar{\Gamma})(\Gamma(n) - \bar{\Gamma}) \Big/ \sum_{n} (\Gamma(n) - \bar{\Gamma})^2. \tag{10}$$

其中 $\bar{\Gamma}$ 为 Γ 之平均值. 在我们的计算中，独立组态可通过 6 步蒙特卡洛迭代产生. 关联函数的统计误差由

$$\Delta\Gamma = \sqrt{(\langle\Gamma^2\rangle - \langle\Gamma\rangle^2)/(N-1)}. \tag{11}$$

给出，这是 N 是独立组态数.

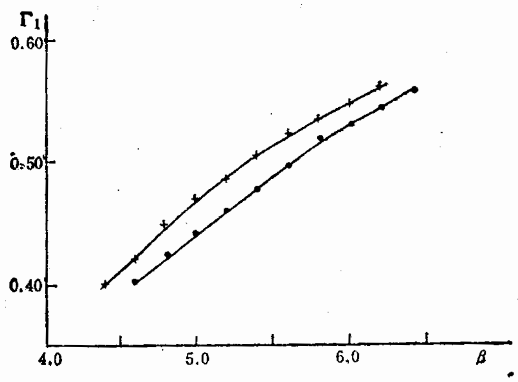

图　1

+160 sites　●320 sites

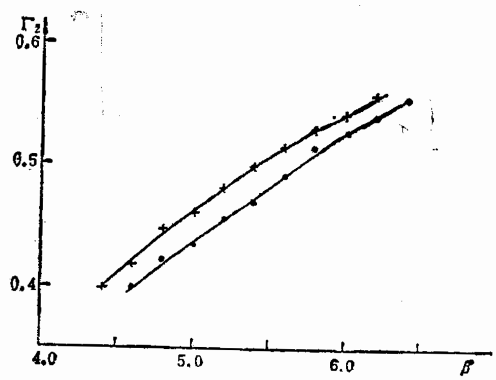

图　2

+160 sites　●160 sites

对大、小点阵，我们分别都做 900 次蒙特卡洛迭代，由于采用文[2]中的技巧，接受率接近 90%. 去掉前面 180 次达到热平衡的迭代，测量关联函数的平均值. 最近邻关联函数 Γ_1 及次近邻关联函数 Γ_2 随 β 变化的曲线示于图 1 及图 2. 由(11)式可得其统计误差 $\Delta\Gamma_1 < 0.005$, $\Delta\Gamma_2 < 0.005$. 由图看到，图 1 和图 2 中的两条曲线不相交，不会出现 $\Delta\beta = 0$ 的情况，所以二维 $SU(3) \times SU(3)$ 手征模型不出现相变点，这是与四维 $SU(3)$ 规范模型的性质一致的. 由图 1 中的两条曲线并借助线性内插法可得 $\Delta\beta(\beta)$-β 曲线，示于图 3. 由图可见，当 $\beta > 5.4$ 后，$\Delta\beta \cong 0.250$，这与微扰论略去高阶项的结果[7] $\Delta\beta = 0.248$ 一致. 为求出该模型 β 函数曲线，用文献[4]中的方法，通过拟合 $\Delta\beta$-β 曲线得出，当 $\beta > 5.0$ 时

$$\Delta\beta(\beta) = 2.26(\beta - 4.9)e^{-10.39(\beta-4.9)} + 0.250. \tag{12}$$

由

$$\beta(g) = -b_0 g^3 \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{d\Delta\beta(\beta)}{d\beta}\Big|_{g_i}\right), \quad b_0 = \frac{3}{16\pi}. \tag{13}$$

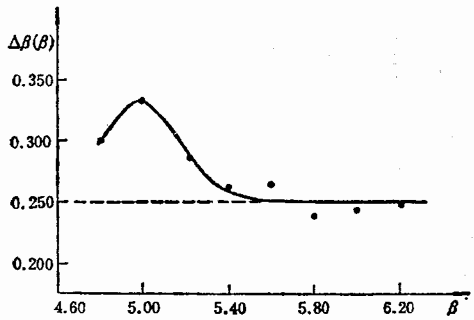

图　3

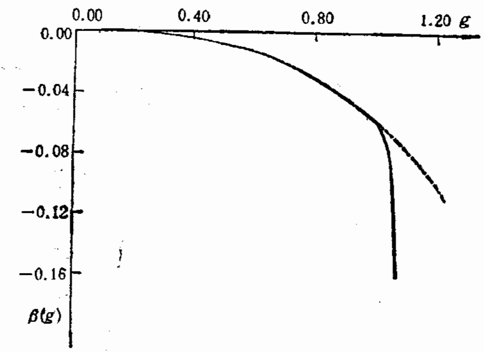

图　4

得β函数的行为，$\beta(g)$-g 曲线示于图 4. 由图可以看到其行为与四维 $SU(3)$ 规范模型的β函数[7]相似，但从强耦合区至弱耦合区的过渡更为平滑，不存在 $SU(3)$ 规范模型β函数行为中的尖锐小峰，这与理论的预期是一致的. 由图 3 还可看出，当 $\beta=5.8$ 时，开始进入渐近标度区.

参　考　文　献

[1] 陈天崙，黄五群，金柯、索存川，高能物理与核物理，V.**13** (1989), 188.
[2] H. Q. Ding, *J. Comp. Phys.*, **67**(1986), 28.
[3] R. H. Swendsen, *Phys. Rev.*, **B20**(1979), 2080.
[4] C. M. Wu and P. Y. Zhao, *Phys. Lett.*, **B178** (1986), 89.
[5] R. Gupta, G. Guralnik, A. Patel, T. Warnock and C. Zemach, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 1721.
[6] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, U. Heller and F. Karsch, *Phys. Lett.*, **140B** (1984), 76.
[7] F. Green and S. Samuel, Nucl. Phys., **B190**(FS3) (1981), 113.

β FUNCTION FOR $SU(3)\times SU(3)$ CHIRAL MODEL ON 2-DIMENSIONAL RANDOM TRIANGLE LATTICE

Chen Tianlun　Suo Cunchuan　Huang Wuqun

(Nankai University, Tianjin)

Abstract

The β function behavior for $SU(3)\times SU(3)$ chiral model on 2-dimensional random triangle lattice has been studied with Monte Carlo renormalization group method. The behavior is similar to that of the 4-dimensional $SU(3)$ gauge theory, but it has a smoother transition from weak to strong coupling regions. There is no nonperturbative peak structure. The asymptotic scaling starts beyond $\beta=5.8$.