

力学 Berry 相因子和相应的经典 拓扑相角*

高孝纯 许晶波 钱铁铮 陈成明
(浙江大学物理系, 杭州)

摘 要

最近,有人讨论了“力学 Aharonov-Bohm 效应”,并获得了实验验证。本文则进而研究并计算了“力学 Berry 相因子”及其相应的经典拓扑相角。

一、引 言

Berry^[1] 首先发现处于某个本征态的量子系统经过一个量子绝热过程,除了获得我们熟悉的动力学相因子 $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt E_n(\mathbf{R}(t))\right\}$ 外,还要附加一拓扑相因子 $\exp\{i\gamma_n(c)\}$, 这里的 $\gamma_n(c)$ 为

$$\begin{aligned}\gamma_n(c) &= i\oint_c \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \\ &= -\iint_{\partial t=c} \mathbf{V}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{s},\end{aligned}\quad (1)$$

其中

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{R}) = \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H}(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H}(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle}{(E_m(\mathbf{R}) - E_n(\mathbf{R}))^2}.\quad (2)$$

这里的 \mathbf{R} 是一组随时间变化的参数 (R_1, R_2, \dots) , c 为参数空间的闭合曲线。Simon^[2] 和 Niemi 等^[3] 立刻认识到 $\gamma_n(c)$ 是 Chern 类的拓扑不变量,其几何意义是以参数流型 $M: \{\mathbf{R}\}$ 为底流型的厄密线丛 $\{M, \phi | \hat{H}\phi(\mathbf{R}) = E\phi(\mathbf{R})\}$ 上的 holonomy。此相因子开始引起人们的广泛注意。它不仅与非阿贝尔规范理论^[5,6]、反常^[7-9]、分数统计^[10,11]以及量子 Hall 效应^[12]等人们极感兴趣的问题有密切的关系,而且接二连三地得到实验证实^[13-16]。

最近,蔡建华和 Neilson 利用转动系中的 Coriolis 力与带电粒子在磁场中所受的 Lorentz 力的类似性预言了一个新的量子干涉效应——“力学 Aharonov-Bohm 效应”^[4], 并且已经得到实验证实。在本文中,我们进一步研究并计算了“力学 Berry 相因子”及其

本文 1989 年 11 月 8 日收到。

* 国家自然科学基金资助课题。

与此相对应的经典拓扑相角.

二、力学 Berry 相因子

首先,我们讨论力学 Berry 相因子. 考虑两个参照系,一个是惯性系,用坐标 (x, y, z) 表示,另一个是相对于惯性系以缓慢变化的角速度 ω 转动的非惯性系——转动系,用坐标 (x', y', z') 表示.

研究惯性系中一粒子在中心力场中的 Schrödinger 方程,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + U(r) \right] \phi(\mathbf{r}, t) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(r) \right] \phi(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3)$$

令

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}(\mathbf{r}', t), t) \equiv \phi'(\mathbf{r}', t), \quad (4)$$

则能够得到^[1]

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}'} = \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}'^2}{2\mu} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{p}}' + U(r') \right] \phi(\mathbf{r}', t), \quad (5)$$

其中

$$\hat{\mathbf{p}}' \equiv \frac{\hbar}{i} \nabla', \quad \nabla' \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right]. \quad (6)$$

这里的 $\phi'(\mathbf{r}', t)$ 是转动系中的几率幅, $\hat{\mathbf{p}}'$ 为正则动量, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}'}$ 是能量算符, $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{p}}'$ 中包括了离心力场和 Coriolis 力场, 而离心力场比 Coriolis 力场要小得多^[4], 因此起主要作用的是 Coriolis 力场. 由于 $\boldsymbol{\omega}$ 随时间缓慢变化, (5) 式中已忽略了与 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 有关的项.

转动系中的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \frac{\hat{\mathbf{p}}'^2}{2\mu} + U(r') + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{p}}' \\ &= \frac{\hat{\mathbf{p}}'^2}{2\mu} + U(r') + \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{L}}', \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\hat{\mathbf{L}}' = \mathbf{r}' \times \hat{\mathbf{p}}'$, 并满足关系

$$\hat{\mathbf{L}}' \times \hat{\mathbf{L}}' = i\hbar \hat{\mathbf{L}}'. \quad (8)$$

容易写出转动系中的定态 Schrödinger 方程为

$$\hat{H}'(\boldsymbol{\omega}) |\phi'_{n,l,m}(\boldsymbol{\omega})\rangle = E_{n,l,m}(\boldsymbol{\omega}) |\phi'_{n,l,m}(\boldsymbol{\omega})\rangle, \quad (9)$$

这里 $E_{n,l,m} = E_{n,l} + m\omega\hbar$ 为能量本征值.

现在让 $\boldsymbol{\omega}$ 随 t 作缓慢变化, 且 $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T)$, 则可求得绝热近似下的 Berry 相位

$$\begin{aligned}\gamma_m(c) &= i \oint_c \langle \psi'_{nlm}(\omega) | \nabla_\omega \psi'_{nlm}(\omega) \rangle \cdot d\omega \\ &= - \iint_{\partial c} \mathbf{V}_m(\omega) \cdot d\mathbf{s},\end{aligned}\quad (10)$$

其中

$$\mathbf{V}_m(\omega) = \sum_{|n'l'm'| \neq |nlm\rangle} \text{Im} \frac{\langle \psi'_{nlm} | \nabla_\omega \hat{H} | \psi'_{n'l'm'} \rangle \times \langle \psi'_{n'l'm'} | \nabla_\omega \hat{H} | \psi'_{nlm} \rangle}{(E_{n'l'm'} - E_{nlm})^2}.\quad (11)$$

为了计算 $\mathbf{V}_m(\omega)$, 先让 $\hat{\mathbf{L}}'$ 的第三分量 \hat{L}'_3 沿着 ω 方向^[1], 利用上升和下降算符的性质有

$$\begin{aligned}(\hat{L}'_1 + i\hat{L}'_2) |\psi'_{nlm}\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \hbar |\psi'_{nlm+1}\rangle; \\ (\hat{L}'_1 - i\hat{L}'_2) |\psi'_{nlm}\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \hbar |\psi'_{nlm-1}\rangle; \\ \hat{L}'_3 |\psi'_{nlm}\rangle &= m\hbar |\psi'_{nlm}\rangle.\end{aligned}\quad (12)$$

利用 $|\psi'_{nlm}\rangle$ 的正交归一性, 很容易求出

$$V_{m1}(\omega) = V_{m2}(\omega) = 0.\quad (13)$$

从(12)式可以得到

$$\begin{aligned}\langle \psi'_{nlm\pm 1} | \hat{L}'_1 | \psi'_{nlm} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}; \\ \langle \psi'_{nlm\pm 1} | \hat{L}'_2 | \psi'_{nlm} \rangle &= \mp \frac{\hbar}{2} i \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}.\end{aligned}\quad (14)$$

因而可得

$$\begin{aligned}V_{m3}(\omega) &= \text{Im} \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \{ \langle \psi'_{nlm} | \hat{L}'_1 | \psi'_{nlm+1} \rangle \langle \psi'_{nlm+1} | \hat{L}'_2 | \psi'_{nlm} \rangle \\ &\quad - \langle \psi'_{nlm} | \hat{L}'_2 | \psi'_{nlm+1} \rangle \langle \psi'_{nlm+1} | \hat{L}'_1 | \psi'_{nlm} \rangle \\ &\quad + \langle \psi'_{nlm} | \hat{L}'_1 | \psi'_{nlm-1} \rangle \langle \psi'_{nlm-1} | \hat{L}'_2 | \psi'_{nlm} \rangle \\ &\quad - \langle \psi'_{nlm} | \hat{L}'_2 | \psi'_{nlm-1} \rangle \langle \psi'_{nlm-1} | \hat{L}'_1 | \psi'_{nlm} \rangle \\ &= \frac{m}{\omega^2}.\end{aligned}\quad (15)$$

很容易得到矢量形式的 $\mathbf{V}_m(\omega)$

$$\mathbf{V}_m(\omega) = \frac{m}{\omega^2} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}.\quad (16)$$

因此力学 Berry 相因子为

$$\begin{aligned}\exp\{i\gamma_m(c)\} &= \exp \left\{ -im \iint_{\partial c} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s}}{\omega^3} \right\} \\ &= \exp\{-imQ(c)\}.\end{aligned}\quad (17)$$

c 为参数空间 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 中的闭合曲线, $Q(c)$ 为 c 所对应的立体角. $\gamma_m(c)$ 仅依赖于 $\hat{\mathbf{L}}'$ 沿角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的分量的本征值 $m\hbar$, 而与角量子数 l 无关. 这里导出的 Berry 相因子的力学起源是明显的, 我们把它称之为力学 Berry 相因子.

三、相应的经典拓扑相角

现在再讨论与前面量子情形相对应的经典拓扑相角, 相应的经典运动方程为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}', \quad (18)$$

这里 $\boldsymbol{\omega}$ 随时间作缓慢变化, 方程(21)中已略去了 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 有关的项. 类似于 Wilzeck 和 A. Zee 的讨论^[5], 方程(21)式可化为 Schrödinger 型的方程

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\omega_3 & i\omega_2 \\ i\omega_3 & 0 & -i\omega_1 \\ -i\omega_2 & i\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{bmatrix}. \quad (19)$$

令

$$L = \begin{bmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{bmatrix}; \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & -i\omega_3 & i\omega_2 \\ i\omega_3 & 0 & -i\omega_1 \\ -i\omega_2 & i\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

则(19)式可简写为

$$i \frac{dL}{dt} = \mathcal{F} \cdot L. \quad (21)$$

显然 \mathcal{F} 为厄密矩阵, 求其本征方程可得 \mathcal{F} 的本征值分别为 $\lambda^{(1)} = 0$; $\lambda^{(2)} = -\omega$; $\lambda^{(3)} = \omega$, 其中 $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$. 本征矢为

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega_1/\omega \\ \omega_2/\omega \\ \omega_3/\omega \end{bmatrix}; \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_1\omega_3 + i\omega_2\omega}{\omega \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \\ \frac{\omega_2\omega_3 - i\omega_1\omega}{\omega \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \\ -\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sqrt{2}\omega} \end{bmatrix}; \quad \phi^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_1\omega_3 - i\omega_2\omega}{\omega \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \\ \frac{\omega_2\omega_3 + i\omega_1\omega}{\omega \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \\ -\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sqrt{2}\omega} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

在绝热近似下, 方程(21)的解为

$$L(t) = c_1(0) \exp(i\beta^{(1)}) \phi^{(1)} + c_2(0) \exp(i\beta^{(2)}) \phi^{(2)} + c_3(0) \exp(i\beta^{(3)}) \phi^{(3)}, \quad (23)$$

其中

$$\beta^{(i)} = -\int_0^t \lambda^{(i)} dt + \Gamma^{(i)}; \quad \Gamma^{(i)} = -\int_0^t (\phi^{(i)}, \nabla_{\boldsymbol{\omega}} \phi^{(i)}) \cdot d\boldsymbol{\omega}. \quad (24)$$

由于 $\phi^{(1)}$ 为实, 且 $\phi^{(2)} = \phi^{(3)*}$, 因而有

$$\Gamma^{(1)} = 0; \quad \Gamma^{(2)} = -\Gamma^{(3)} = \Gamma. \quad (25)$$

即

$$\beta^{(1)} = 0; \quad \beta^{(2)} = -\beta^{(3)} = \beta. \quad (26)$$

因此

$$L(t) = c_1(0) \phi^{(1)} + c_2(0) \exp(i\beta) \phi^{(2)} + c_3(0) \exp(-i\beta) \phi^{(3)}. \quad (27)$$

再考虑到 $L(t)$ 为实, 故 $c_1(0)$ 为实, $c_2(0) = c_3^*(0)$, 因而有

$$L(t) = c_1(0)\phi^{(1)} + \frac{c_2^{(\text{Re})}(0)}{\omega \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \begin{bmatrix} \omega_1\omega_3 \cos \beta - \omega_2\omega \sin \beta \\ \omega_2\omega_3 \cos \beta + \omega_1\omega \sin \beta \\ -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos \beta \end{bmatrix} + \frac{c_2^{(\text{Im})}(0)}{\omega \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \begin{bmatrix} -\omega_1\omega_3 \sin \beta - \omega_2\omega \cos \beta \\ -\omega_2\omega_3 \sin \beta + \omega_1\omega \cos \beta \\ (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \beta \end{bmatrix}, \quad (28)$$

其中 $c_2^{(\text{Re})}(0)$ 为 $c_2(0)$ 的实部, $c_2^{(\text{Im})}(0)$ 为其虚部, 对 $L(t)$ 作一正交变换 T ,

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\omega_1\omega_3}{\omega \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} & \frac{\omega_2\omega_3}{\omega \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} & -\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega} \\ -\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} & \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} & 0 \\ \omega_1/\omega & \omega_2/\omega & \omega_3/\omega \end{bmatrix}, \quad (29)$$

则(28)式可变为

$$L'(t) = TL(t) = c_1(0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{c_2^{(\text{Re})}(0)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{c_2^{(\text{Im})}(0)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \omega'_1(t) \\ \omega'_2(t) \\ \omega'_3(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

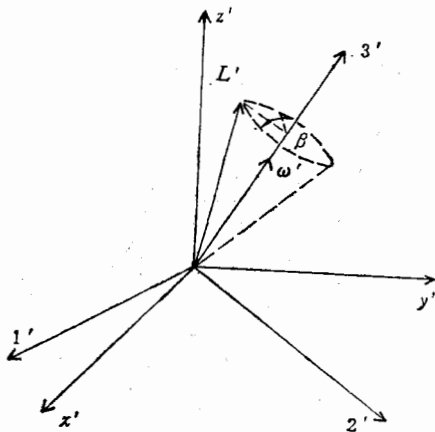


图 1

从(30)式及图1很容易知道 $\beta = \int_0^t \omega dt + \Gamma$ 是 L' 绕 $3'$ 轴转动时在 $(1', 2')$ 平面上所转过的角度, 当 $\omega(0) = \omega(T)$, 且 ω 随时间 t 作绝热变化时, $\beta(c) = \int_0^T \omega dt + \Gamma(c)$ 中除了动力学的贡献 $\int_0^T \omega dt$ 外, 还包含一拓扑相角 $\Gamma(c)$,

$$\Gamma(c) = i \oint_c (\phi^{(2)}, \nabla_\omega \phi^{(2)}) \cdot d\omega$$

$$= i \iint_{\partial c} (\nabla_\omega \phi_k^{*(2)} \times \nabla_\omega \phi_k^{(2)}) \cdot ds, \quad k = 1, 2, 3, \quad (31)$$

其中 c 为参数空间的闭合曲线, 重复指标表示求和. 从(22)式可得

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \omega_1} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_3(\omega_2^4 + \omega_2^2\omega_3^2 - \omega_1^4) - i\omega_1\omega_2\omega^3}{\sqrt{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{3/2}\omega^3} \\ \frac{-\omega_1\omega_2\omega_3(2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2) - i\omega_2^2\omega^3}{\sqrt{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{3/2}\omega^3} \\ \frac{-\omega_1\omega_3^2}{\omega^3[2(\omega_1^2 + \omega_2^2)]^{1/2}} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \omega_2} = \left(\frac{-\omega_1 \omega_2 \omega_3 (2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2) + i\omega_1^2 \omega^3}{\sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{3/2} \omega^3}} \right);$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial \omega_3} = \left(\frac{\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}}{\sqrt{2\omega^3}} \right);$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial \omega_3} = \left(\frac{\omega_2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}}{\sqrt{2\omega^3}} \right);$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial \omega_3} = \left(\frac{\omega_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}}{\sqrt{2\omega^3}} \right). \quad (32)$$

将(32)式代入(31)式可得

$$\Gamma(c) = i \iint_{\partial c} -i \frac{\omega}{\omega^3} \cdot ds = \Omega(c), \quad (33)$$

这里 c 为参数空间的闭合曲线, $\Omega(c)$ 为 c 所对的立体角. 从(17)式和(33)式可得

$$\gamma_m(c) = -m\Gamma(c). \quad (34)$$

得出这样的关系是很自然的, 如果取前面量子情况的经典极限, 也应得到这样的结果^[17].

四、结 束 语

我们所得出的 Berry 相因子纯粹是由于力学的原因——主要是 Coriolis 力的存在所引起的, 故称其为力学 Berry 相因子. 显然, 关于它的实验测量是极令人感兴趣的, 这方面的工作正在进行之中.

最近, 蔡建华教授应邀来浙大近代物理中心作学术报告, 使我们知道了他关于力学 Aharonov-Bohm 效应的工作和有关的实验验证. 为此, 我们向他致以谢意.

参 考 文 献

- [1] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London, A* **392** (1984), 45.
- [2] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 2167.
- [3] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985), 927.
- [4] Chien-Hua Tsai and D. Neilson, *Phys. Rev., A* **37**(1988), 619.
- [5] F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 2111.
- [6] Hua-zhong Li, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 539.
- [7] P. Nelson and L. Alvarez-Gaume, *Commun. Math. Phys.*, **99**(1985), 103.
- [8] H. Sonoda, *Nucl. Phys.*, **B266** (1986), 410.
- [9] A. J. Niemi, G. W. Semenoff and Y. S. Wu, *Nucl. Phys.*, **B276** (1986), 173.
- [10] D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 722.
- [11] F. D. M. Haldane and Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2887.
- [12] G. W. Semenoff and P. Sonoda, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 1195.

- [13] G. Delacretaz et al., *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 2598.
- [14] A. Tomita and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 937.
- [15] K. Tycko, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2281.
- [16] D. Suter et al., *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1218.
- [17] M. V. Berry, *J. Phys. A, Math. Gen.*, **18**(1985), 15.

THE MECHANICAL BERRY PHASE AND CORRESPONDING CLASSICAL TOPOLOGICAL PHASE ANGLE

GAO XIAOCHUN XU JINGBO QIAN TIEZHENG CHEN CHENGMING

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou)

ABSTRACT

Recently, a new effect, which may be called the mechanical Aharonov-Bohm effect, was suggested and verified experimentally. In this paper, we proceed to study and calculate the mechanical Berry's phase and corresponding topological phase angle.