第 14 卷 第 9 期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 9
1990 年 9 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1990

正交基下的一些无多重性 $SU_N \supset SO_N$ 同位标量因子的解析表达式

潘 峰

（辽宁师范大学，大连）

摘 要

本文导出了一些 $SU_N \supset SO_N \supset SO_{N-1}$ 按 $SU_N \supset SU_{N-1} \supset SO_{N-1}$ 态展开系数。利用该系数及已知的 $SO_N \supset SO_{N-1}$ 同位标量因子，我们求得了 $SU_N \supset SO_N$ 关于耦合 $[w_1w_20\cdots0] \times [w_30\cdots0] \rightarrow [w_1'w_2'0\cdots0]$ 的无多重性同位标量因子的解析表达式。

一、引 言

$SU_N \supset SO_N$ 同位标量因子在许多物理问题中都是非常重要的。但是一般说来，$SU_N \supset SO_N$ 群链是非简单可约的，所以人们通常只能在非正交基下来处理，并且在非正交基下有人计算了同位标量因子[1,2]。

最近，Hecht 等人利用 $SP(3,R) \supset U_3$ 与 $SU_4 \supset SO_4$ 群链间的关系，在正交基下计算了极少一部分 $SU_4 \supset SO_4$ 同位标量因子[3]。该方法虽较为实用，但对于高维表示计算将十分困难。本文将指出，在无多重性情况下，我们可以用另一种方法计算 $SU_N \supset SO_N$ 同位标量因子，方法十分简便。

在下一节中，我们将首先讨论计算方法并求出一些变换系数。在最后一节中给出一些正交基下的无多重性 $SU_N \supset SO_N$ 同位标量因子的解析表达式。

二、计 算 方 法

首先，我们约定记号问题。我们用方括号 $[N_1N_20\cdots0] \equiv [N_1N_2]$ 来标记 SU_N 群的两行不可约表示；用圆括号 $(w_1w_20\cdots0) \equiv (w_1w_2)$ 来标记 SO_N 群的两行不可约表示；SU_N 或 SO_N 的对称表示用 $[N_10]$ 或 (w_10) 来标记。

我们设 $SU_N \supset SO_N \supset SO_{N-1}$ 的基矢为 $|[N_1N_2]\omega(w_1w_2)(v_1v_2)\Omega\rangle$；而 $SU_N \supset SU_{N-1} \supset SO_{N-1}$ 的基矢为 $|[N_1N_2][n_1n_2]k(v_1v_2)\Omega\rangle$，其中 ω 和 k 是由于 $SU_N \supset SO_N$ 非简单可约而引入的多重性指标，而 Ω 表示其它附加量子数。$SU_N \supset SO_N \supset SO_{N-1}$ 基矢可利用 $SU_N \supset SU_{N-1} \supset SO_{N-1}$ 基矢展开：

本文 1989 年 1 月23日收到。

$$|[w_1w_2](w_1w_2)(v_1v_2)\Omega\rangle = \sum_{n_1n_2 k} B^{(w_1w_2)(v_1v_2)}_{(n_1n_2)k(N)} |[w_1w_2][n_1n_2]k(v_1v_2)\Omega\rangle, \tag{2.1}$$

其中 $B^{(w_1w_2)(v_1v_2)}_{(n_1n_2)k(N)}$ 是基矢变换系数。 由于 SU_N 的不可约表示 $[w_1w_2]$ 约化到 SO_N 群不可约表示的最高权(w_1w_2) 是无多重性的，所以在(2.1)式中略去了多重性指标 ω。目前我们讨论的是正交基。利用(2.1)式及 Racah 因子分解引理，我们有

$$B^{(w_1w_2)(v_1v_2)}_{(n_1n_2)k'(N)} B^{(w_30)(v_30)}_{(n_30)(N)} \begin{bmatrix} SO_N & (w_1w_2)(w_30) & (w_1'w_2') \\ SO_{N-1} & (v_1v_2)\ \ (v_30) & \tau(v_1'v_2') \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{n_1'n_2' k} B^{(w_1'w_2')(v_1'v_2')}_{(n_1'n_2')k(N)} \begin{bmatrix} SU_N & [w_1w_2][w_30] & [w_1'w_2'] \\ SU_{N-1} & [n_1n_2]\ \ [n_30] & [n_1'n_2'] \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} SU_{N-1} & [n_1n_2]\ \ \ [n_30] & [n_1'n_2'] \\ SO_{N-1} & k'(v_1v_2)\ \ (v_30) & \tau k(v_1'v_2') \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

其中 $\begin{bmatrix} G & (w_1w_2)\ \ (w_30) & (w_1'w_2') \\ g & (v_1v_2)\ \ (v_30) & \tau(v_1'v_2') \end{bmatrix}$ 等是群 $G \supset g$ 的同位标量因子，这里 τ 是由于 SO_{N-1} 表示$(v_1'v_2')$ 在 $(v_1v_2)\times(v_30)$ 的约化中不仅出现一次而引入的多重性指标。

在(2.2)式中，当 $SU_{N-1}\supset SO_{N-1}$ 约化无多重性时，及满足 $v_1+v_2+v_3=v_1'+v_2'$ 时，多重性指标 k, k' 及 τ 可以略去，于是我们可得到一个重要公式：

$$\begin{bmatrix} SU_N & [w_1w_2]\ \ [w_30] & [w_1'w_2'] \\ SO_N & (v_1v_2)\ \ (v_30) & (v_1'v_2') \end{bmatrix}$$

$$= \left(B^{(w_1'w_2')(v_1'v_2')}_{(w_1'w_2')(N+1)}\right)^{-1} B^{(w_1w_2)(v_1v_2)}_{(w_1w_2)(N+1)} B^{(w_30)(v_30)}_{(w_30)(N+1)}$$

$$\times \begin{bmatrix} SO_{N+1} & (w_1w_2)\ \ (w_30) & (w_1'w_2') \\ SO_N & (v_1v_2)\ \ (v_30) & (v_1'v_2') \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

变换系数 $B^{(w_1w_2)(v0)}_{(w_1w_2)(N)}$ 可以从下式求出：

$$B^{(w_1w_2)(v0)}_{(w_1w_2)(N)} = B^{(w_1w_2)(v0)}_{(v0)(N)} \xi^{(w_1w_2)}_{(v0)(N)}, \tag{2.4}$$

其中

$$\xi^{(w_1w_2)}_{(v0)(N)} = \left\{ \sum_{n_1n_2} \frac{(w_1-n_1-1)!!(w_2-n_2-1)!!(2n_1+N-3)!!(2n_2+N-3)!!}{(w_1+n_1+N-3)!!(w_2+n_2+N-3)!!} \right.$$

$$\left. \times \begin{bmatrix} SU_N & [w_10]\ \ [w_20] & [w_1w_2] \\ SU_{N-1} & [n_10]\ \ [n_20] & [v0] \end{bmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{对 } N>4. \tag{2.5}$$

而 $B^{(w_1w_2)(v0)}_{(v0)(N)}$ 可利用 $SU_N\supset SU_{N-1}$ 及 $SO_N\supset SO_{N-1}$ 的特殊同位标量因子求出[4]。

利用已知的 $SU_N\supset SU_{N-1}$ 同位标量因子解析表达式[5]，经过反复计算，我们得到

$$\xi^{(w_1w_2)}_{(v0)(N)} = \left[\frac{(v+N-4)!(w_1+w_2+v+N-4)!!(w_1+w_2-v-1)!!}{(w_1+v+N-3)!(w_2+v+N-4)!} \right.$$

$$\left. \times (2v+N-3)!! \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

利用 $SU_N\supset SU_{N-1}$ 同位标量因子的性质[4]及(2.5)，(2.6)式，我们得到

$$\xi^{(w_1w_2)}_{(v_1v_2)(N)} = \xi^{(w_1-v_2\ \ w_2-v_2)}_{(v_1-v_20)(N+2v_2)}, \quad \text{对 } N>4, \tag{2.7}$$

类似地，我们有

$$B^{(w_1 w_2)(v_1 v_2)}_{(v_1 v_2)(N)} = B^{(w_1-v_2\ w_2-v_2)(v_1-v_2 0)}_{(v_1-v_2 0)(N+2v_2)}, \text{ 对 } N > 4, \tag{2.8}$$

三、同位标量因子

利用文献[4]的结果及（2.3）—（2.8）式，我们最后可把正交基下无多重性的 $SU_N \supset SO_N (N > 3)$ 的同位标量因子表为：

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{c|cc|c} SU_N & [w_1 w_2] & [w_3 0] & [w_1' w_2'] \\ SO_N & (v_1 v_2) & (v_3 0) & (v_1' v_2') \end{array}\right] = \delta_{w_1+w_2+w_3, w_1'+w_2'} \\
&\times \left[\frac{(w_1+w_2-v_1-v_2-1)!!(w_1+w_2+v_1-v_2+N-3)!!}{(w_1'+w_2'-v_1'-v_2'-1)!!(w_1'+w_2'+v_1'-v_2'+N-3)!!}\right. \\
&\times \frac{(w_3-v_3-1)!!(w_2'+v_1'+N-3)!(w_1'+v_1'+N-2)!}{(w_1+v_1+N-2)!(v_1-v_2')!(w_3+v_3+N-2)!!} \\
&\times \frac{(v_1+v_2+N-3)!(2v_1+N-2)!!(2v_3+N-2)!!}{(w_2+v_2+N-3)!!(v_1'+v_2'+N-3)!(2v_1'+N-2)!!} \\
&\times \frac{(w_3-v_3)!(v_1-v_2+1)(w_1'-w_2'+1)(v_1'-v_1)!(v_2'-v_2)!}{(w_1'-w_1)!(w_2'-w_2)!(w_1'-w_2+1)!(w_1'+1)!w_2'!} \\
&\times \frac{(v_1'-v_2+1)!(w_1-w_2')!w_2!(w_1+1)!(w_1-v_1)!(w_2-v_2)!}{(v_1-w_2)!v_2!(v_1+1)!(w_1'-v_1')!(w_2'-v_2')!} \\
&\times \left.\frac{(w_1-v_2+1)!(v_1'-w_2')!v_2'!(v_1'+1)!}{(w_1'-v_2'+1)!}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \sum_{xy} (-)^{x+y} \frac{(v_1-v_2+x-y+1)(v_1-w_2+x)!}{x!y!(v_1-v_2+x+1)!(w_1-v_1-x)!} \\
&\times \frac{(v_1-v_2'+x)!(w_1'-v_1-x)!(v_1-v_2-y)!}{(v_1'-v_1-x)!(v_1-w_2'+x)!(w_1-v_2+1-y)!} \\
&\times \frac{(w_1'-v_2+1-y)!(w_2'-v_2-y)!}{(w_2-v_2-y)!(v_3-v_1'+v_1-y)!(v_1-v_2'+v_3+1-y)!},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

当 $[w_1 w_2]$ 及 $[w_1' w_2']$ 为 $[w, w]$；$[w+1\ w]$；$[w0]$；$[w1]$；$[w+2, w]$（此时 $w - v_1 =$ 奇数）并满足 $v_1 + v_2 + v_3 = v_1' + v_2'$，或 $v_2 = 0, v_1' = v_2'$，$v_1 + v_3 = 2v_1'$；以及 $v_2 = v_2' = 0$，$v_1 + v_3 = v_1'$ 时，（3.1）式成立。

参　考　文　献

[1] S.J. Alisauskas, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **17**(1984), 2899.
[2] S.J. Alisauskas, ibid., **19**(1986), 1761.
[3] K.T. Hecht et al., ibid., **20**(1987), 257.
[4] Feng Pan, Yu-Fang Cao, *J. Math. Phys.*, **29**(1988), 2384.
[5] E. Chacon et al, ibid., **13**(1972), 577.

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF SOME MULTIPLICITY-FREE ISOSCALAR FACTORS FOR $SU_N \supset SO_N$ UNDER THE ORTHOGONAL BASIS

PAN FENG
(*Liaoning Normal University; Dalian*)

ABSTRACT

Some analytical expressions of state expansion coefficients for $SO_N \supset SO_{N-1}$ in terms of $SU_N \supset SU_{N-1} \supset SO_{N-1}$ are derived. Analytical expressions of some multiplicity-free isoscalar factors for $SU_N \supset SO_N$ for the coupling $[w_1 w_2 0 \cdots 0] \times [w_3 0 \cdots 0] \rightarrow [w_1' w_2' 0 \cdots 0]$ for the SU_N group are obtained by using these coefficients and isoscalar factors for $SO_N \supset SO_{N-1}$.