

# 格点 Schwinger 模型“介子”波函数的 变分研究<sup>1)</sup>

陈启洲 方锡岩 许国材<sup>2)</sup> 刘金明 罗向前  
(中山大学物理系, 广州 510275)

## 摘 要

本文用变分法研究格点 Schwinger 模型“介子”波函数, 计算了矢量和标量介子的质量比、以及矢量介子质量的绝对值, 得到与连续理论严格解相近的结果。

## 一、引 言

Schwinger 模型 [1] 是描写 1 + 1 维 QED 系统的严格可解模型, 它具有低能格点 QCD 理论的特点。譬如: 电荷禁闭, 手征对称自发破缺等等。由于低能 QCD 理论研究遇到诸多困难, 人们希望通过低维模型的研究取得经验、检验计算方法、然后推广到 QCD 领域。因此, Schwinger 模型和非线性  $\sigma$  模型引起广泛关注。我们曾经用变分方法计算 Schwinger 模型的手征对称自发破缺参数  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  得到与严格解相近结果<sup>[2-4]</sup>。本文将过去工作推广到质量谱的计算, 初步结果表明, 变分法得到的结果与严格解相容。

格点 Schwinger 模型的哈密顿量为<sup>[3]</sup>:

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_x E^2(x) + \frac{1}{2a} \sum_{x,k=\pm 1} \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x,k) \psi(x+k) \\ + m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{r}{2a} \sum_{x,k=\pm 1} [\bar{\psi}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) U(x,k) \\ \cdot \psi(x+k)], \quad (1.1)$$

其中,  $a, r, m$  分别为格距、Wilson 参数、费米子裸质量(以下计算取  $m = 0$ ), 裸耦合常数  $g = ea$  ( $e$  为裸电荷),  $U(x,k)$  为规范场的链,  $\gamma_k$  为  $2 \times 2$  矩阵:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\gamma_0\gamma_1. \quad (1.2)$$

费米子场  $\psi(x)$  可写成:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

本文 1990 年 11 月 13 日收到。

1) 高等学校博士学科点专项科研基金资助课题。

2) 许国材是广东教育学院访问学者。

$$\xi|0\rangle = \eta|0\rangle = E|0\rangle = 0. \quad (1.4)$$

我们过去提出的变分真空态为

$$|Q\rangle = e^{i\theta_1 s_1 + i\theta_2 s_2} |0\rangle, \quad (1.5)$$

其中

$$s_1 = i \sum_{x,k} \phi^+(x) \gamma_k U(x,k) \phi(x+k),$$

$$s_2 = i \sum_{x,k} \phi^+(x) \gamma_k U(x,2k) \phi(x+2k),$$

$$[s_1, s_2] = 0.$$

利用真空态能量  $E_Q = \frac{\langle Q|H|Q\rangle}{\langle Q|Q\rangle}$  取极小值条件:

$$\frac{\partial E_Q}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial E_Q}{\partial \theta_2} = 0. \quad (1.6)$$

确定  $\theta_1, \theta_2$  和  $\frac{1}{g^2}$  的关系, 从而得到  $\langle \bar{\phi}\phi \rangle$ , 经过减除后的  $\langle \bar{\phi}\phi \rangle$  值与严格解相符<sup>[1,2]</sup>.

在质量谱的计算方面, Kogut 等人用强耦合展开方法计算了“介子”质量谱<sup>[5,6]</sup>, 他们引入的介子波函数分别为:

$$|V\rangle = \sum_x [\xi^+(x)U(x,1)\eta^+(x+1) + \xi^+(x+1)U^+(x,1)\eta^+(x)]|0\rangle, \quad (1.7)$$

$$|S\rangle = \sum_x [\xi^+(x)U(x,1)\eta^+(x+1) - \xi^+(x+1)U^+(x,1)\eta^+(x)]|0\rangle. \quad (1.8)$$

利用(1.2—1.4)式以及平移不变性, 这些态可写成:

$$|V\rangle = i \sum_{x,k=\pm 1} \bar{\phi}(x) \gamma_k U(x,k) \phi(x+k) |0\rangle \equiv v|0\rangle, \quad (1.9)$$

$$|S\rangle = i \sum_{x,k=\pm 1} \bar{\phi}(x) \gamma_k U(x,k) \phi(x+k) |0\rangle \equiv s|0\rangle. \quad (1.10)$$

其中利用了

$$U^+(x,k) = U(x+k,-k),$$

$$\gamma_k = -\gamma_{-k}.$$

## 二、一链波函数

由于我们引进的变分真空  $|Q\rangle$  与裸真空  $|0\rangle$  之间的差别是: 后者经过么正变换  $u = e^{i\theta_1 s_1 + i\theta_2 s_2}$  得到前者, 即  $|Q\rangle = u|0\rangle$ . 可以想象当真空态进行么正变换时“介子”波函数也应进行同样的变换:

$$|V'\rangle = u|V\rangle, \quad (2.1)$$

$$|S'\rangle = u|S\rangle. \quad (2.2)$$

新的“介子”波函数当然满足如下关系式:

$$\langle Q|V'\rangle = \langle Q|S'\rangle = 0, \quad (2.3)$$

$$\langle V'|S'\rangle = 0. \quad (2.4)$$

经过繁琐计算得到“介子”质量的表示式:

$$\begin{aligned} m'_v &= \frac{\langle V'|H|V'\rangle}{\langle V'|V'\rangle} - \frac{\langle Q|H|Q\rangle}{\langle Q|Q\rangle} \\ &= \frac{1}{a} \left[ 2D_0 + 2D_2 + \frac{1}{2} g^2 \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} m'_s &= \frac{\langle S'|H|S'\rangle}{\langle S'|S'\rangle} - \frac{\langle Q|H|Q\rangle}{\langle Q|Q\rangle} \\ &= \frac{1}{a} \left[ 2D_0 - 2D_2 + \frac{1}{2} g^2 \right] \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{2} + \frac{(2\theta_1)^4}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中:

$$\begin{aligned} D_0 &= (r\theta_1) \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{2} \right] + r \left\{ 1 - (2\theta_1)^2 + \frac{(2\theta_1)^4}{2} \right. \\ &\quad \left. + (2\theta_1)(2\theta_2) \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} D_2 &= -\frac{(2\theta_1)}{2} \left[ 1 - \frac{2}{3} (2\theta_1)^2 \right] + r \left\{ \frac{(2\theta_1)^2}{2} \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{3} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\theta_2)(2\theta_1)^3}{12} \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

由于从(1.6)式求得的 $\theta$ 值满足:  $0 < 2\theta_1 < 1$ ,  $0 < 2\theta_2 < 0.1$ ,因此质量谱计算中,我们

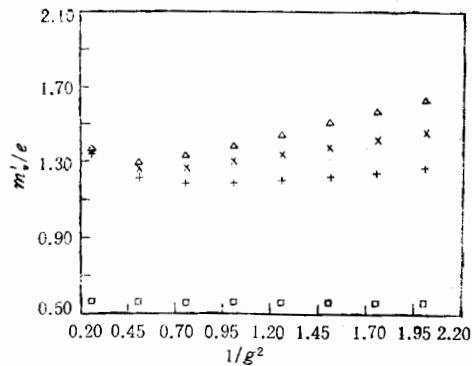


图1  $m'_v/e$  与  $1/g^2$  的关系,图中 $\Delta$ 、 $\times$ 、 $+$ 、 $\square$  分别表示曲线1、曲线2、曲线3以及连续理论准确解

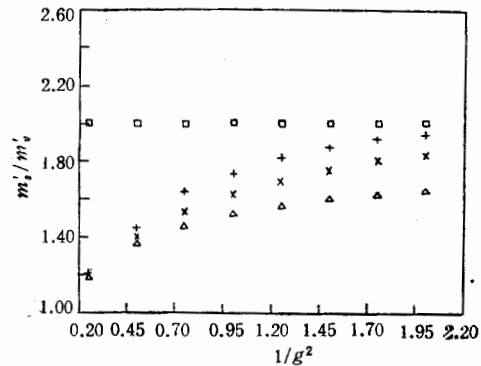


图2  $m'_s/m'_v$  与  $1/g^2$  的关系,图中符号的意义与图1同

只保留到 $(2\theta_1)$ 的四次方项和 $(2\theta_2)$ 的一次方项,我们取 $r = 0.2$ 时 $m'_v/e$ 及 $m'_s/m'_v$ 随 $\frac{1}{g^2}$ 的变化曲线画成图1和图2的曲线1,从图2看到,本方法给出的质量比与连续理论严格解的结果相近,但图1给出矢量介子质量比严格解 $m_v = e/\sqrt{\pi} = 0.56e$ 大一倍,而且 $m'_v/e$ 与 $1/g^2$ 的关系曲线从 $1/g^2 = 0.25$ 下降到 $1/g^2 = 0.5$ 附近开始上升。为了改进

计算结果,我们将波函数选为:

$$|V''\rangle = [V - \langle Q|V|Q\rangle]|Q\rangle, \quad (2.9)$$

$$|S''\rangle = [S - \langle Q|S|Q\rangle]|Q\rangle. \quad (2.10)$$

它们也满足  $\langle Q|V''\rangle = \langle Q|S''\rangle = \langle S''|V''\rangle = 0$  的要求。跟上面计算一样,并注意

$$s|Q\rangle = us|0\rangle,$$

我们得到:

$$m''_v a = 2D_0 + 8 \left[ -D_1 A_1 + D_2 A_7 + D_3 B_0 + D_4 B_3 + \frac{1}{8} g^2 B_6 \right] / A_1, \quad (2.11)$$

$$m''_s a = 2D_0 - 2D_2 + \frac{1}{2} g^2 \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{2} + \frac{(2\theta_1)^4}{2} \right]. \quad (2.12)$$

其中:

$$D_1 = \frac{1}{2} (2\theta_2) \left[ 1 - (2\theta_1)^2 + \frac{5}{24} (2\theta_1)^2 \right] - (2\theta_2)(2\theta_1)r \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{2} \right],$$

$$D_3 = -(2\theta_2) \left[ 1 - \frac{3}{2} (2\theta_1)^2 + \frac{3}{8} (2\theta_1)^4 \right] + r \left\{ (2\theta_2)(2\theta_1) \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{2} \right] - \frac{(2\theta_1)^2}{4} \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{4} \right] \right\},$$

$$D_4 = -\frac{(2\theta_1)^3}{12} + r \left\{ \frac{(2\theta_1)^4}{24} - \frac{1}{2} (2\theta_2)(2\theta_1) \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^2}{3} \right] \right\},$$

$$A_1 = 2 \left[ 1 - (2\theta_1)^2 + \frac{2}{3} (2\theta_1)^4 \right], \quad A_4 = (2\theta_2)(2\theta_1) \left[ 1 - \frac{7}{6} (2\theta_1)^2 \right],$$

$$A_7 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} (2\theta_1)^4 \right], \quad B_0 = (2\theta_2)(2\theta_1) [1 - 2(2\theta_1)^2],$$

$$B_3 = \frac{1}{2} (2\theta_1)^2 \left[ 1 - \frac{3}{4} (2\theta_1)^2 \right], \quad B_6 = 1 - (2\theta_1)^2 + \frac{7}{6} (2\theta_1)^4.$$

由(2.11)式算得的  $m''_v/e$  以及  $m''_s/m''_v$  与  $1/g^2$  的关系曲线见图 1 和图 2 的曲线 2。从图 1 的曲线 2 看到此曲线也是在  $1/g^2 = 0.5$  附近上升,但上升速度比曲线 1 慢,即结果有所改善。

### 三、二链波函数

我们进一步考虑次近邻作用,即在波函数的表示式中加进二链项:

$$|V\rangle = [v_2 - \langle Q|v_2|Q\rangle]|Q\rangle, \quad (3.1)$$

$$|S\rangle = [s_2 - \langle Q|s_2|Q\rangle]|Q\rangle, = us_2|0\rangle \quad (3.2)$$

其中

$$v_2 = \sum_{x,k} [A\bar{\phi}(x)\gamma_1 U(x,k)\phi(x+k) + B\bar{\phi}(x)\gamma_1 U(x,2k)\phi(x+2k)],$$

$$s_2 = \sum_{x,k} [A'\phi^+(x)\gamma_k U(x,k)\phi(x+k) + B'\phi^+(x)\gamma_k U(x,2k)\phi(x+2k)].$$

然后利用线性变分方法确定  $m_\nu, m_s$  所满足的久期方程式。例如,  $m_\nu$  取极小值条件为:

$$\frac{\partial m_\nu}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial m_\nu}{\partial B} = 0. \quad (3.3)$$

由(3.3)式得到  $m_\nu$  所满足的久期方程:

$$\begin{vmatrix} A_1 m_\nu a + R_0 & -A_2 m_\nu a + R_1 \\ -A_2 m_\nu a + R_1 & A_3 m_\nu a + R_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.4)$$

其中:

$$R_0 = -2D_0A_1 + 8D_1A_4 - 8D_2A_7 - 8D_3B_0 - 8D_4B_3 - g^2B_6,$$

$$R_1 = 2D_0A_2 - 8D_1A_5 + 8D_2A_8 - 8D_3B_1 + 8D_4B_4 + g^2B_7,$$

$$R_2 = -2D_0A_3 + 8D_1A_6 - 8D_2A_9 + 8D_3B_2 - 8D_4B_5 - g^2(B_8 - B_9),$$

$$A_2 = \frac{8}{3}(2\theta_2)(2\theta_1)^3, \quad A_3 = 2 \left[ 1 - 2(2\theta_1)^2 + \frac{7}{3}(2\theta_1)^4 \right],$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{(2\theta_1)^4}{3} \right], \quad A_6 = (2\theta_2)(2\theta_1) \left[ 1 - \frac{5}{6}(2\theta_1)^2 \right],$$

$$A_8 = (2\theta_2)(2\theta_1) \left[ 1 - \frac{13}{12}(2\theta_1)^2 \right], \quad A_9 = \frac{3}{2}(2\theta_1)^2 \left[ 1 - \frac{4}{3}(2\theta_1)^2 \right],$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - (2\theta_1)^2 + \frac{23}{24}(2\theta_1)^4 \right], \quad B_2 = \frac{7}{6}(2\theta_2)(2\theta_1)^3,$$

$$B_4 = \frac{1}{2}(2\theta_2)(2\theta_1) \left[ 1 + \frac{7}{12}(2\theta_1)^2 \right], \quad B_5 = \frac{1}{2} \left[ 1 - 2(2\theta_1)^2 + \frac{31}{12}(2\theta_1)^4 \right],$$

$$B_7 = \frac{1}{6}(2\theta_2)(2\theta_1)^3, \quad B_8 = 2 \left[ 1 - 2(2\theta_1)^2 + \frac{25}{12}(2\theta_1)^4 \right],$$

$$B_9 = (2\theta_1)^2 [1 - 2(2\theta_1)^2].$$

$D_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$  和  $A_1, A_4, A_7, B_0, B_3, B_6$  已在本文第二部分给出, 用同样方法可算出  $m_\nu a$  的表示式。由(3.1)和(3.2)式得到的  $m_\nu/e$  值用图1和图2的曲线3表示。图1的曲线3表明曲线在  $1/g^2 = 0.75$  附近才开始缓慢上升, 比(2.9)和(2.10)式的结果有较好改善。我们相信在波函数中加入更多的长链, 将会得到较好结果。

## 四、结 论

(1) 本文分析了格点 Schwinger 模型中三种“介子”波函数对质量谱的影响, 计算表明我们提出的变分方法不仅能得较好的  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  值, 也能得到与严格解相近的质量比。这三种波函数中, (3.1)和(3.2)式给出较好结果, 原因可能是(i)它计入了长链效应;(ii)波函数变分的效果起了一定作用。因为由真空极小值条件已将参数  $\theta_1$  和  $\theta_2$  固定, 再利用(3.3)式重新调整  $m_\nu, m_s$  值, 即波函数变分的效果起了一定作用。

(2) 我们也计算了  $|S\rangle = us_2|0\rangle, |V\rangle = uv_2|0\rangle$  的质量谱, 得到的结果与(2.1)和(2.2)式的情况相近。

(3) 格点规范理论的优点之一是给出比较合理的质量比。过去许多解析计算和

Monte carlo 模拟得到的质量比是令人满意的。从图 2 看到, 三种情况的质量比均接近严格解, 其中(3.1)式和(3.2)式的结果有较好的标度行为。至于  $m_v$  的绝对值比严格解约大一倍、可能还需要在波函数中加入其它项、才能压低我们的计算结果, 尽管本文的  $m_v$  的绝对值不太令人满意, 但我们的结果与 Kogut 等人的结果相近。

### 参 考 文 献

- [1] J.Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 2425.
- [2] Xiang-qian Luo, Qi-zhou Chen, *J. Phys.*, **G16**(1990), 181.
- [3] Qi-Zhou Chen, Xiang-Qian Luo, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 1293.
- [4] 陈启洲等, “格点 Schwinger 模型中  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  的变分计算”, 高能物理与核物理(将发表).
- [5] T.Banks, L.Susskind, J.Kogut, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 1043.
- [6] A.Carroll, J. Kogut, D. K. Sinclair, L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2270.

## Variational Study of “Meson” States in the Lattice Schwinger Model

CHEN QIZHOU    FANG XIYAN    XU GUOCAI    LIU JINMING    LUO XIANGQIAN  
(Zhongshan University, Guangzhou 510275)

### ABSTRACT

We use the variationad method to study the meson states in the lattice Schwinger Model, and to calculate the mass ratio of vector and scalar mesons as well as the mass of vector meson. Our results are consistent with the exactly values in the continuum.