第 15 卷 第 8 期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 8
1991 年 8 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1991

仿射 Toda 场作为约束的 WZNW 模型

侯伯宇 赵 柳 杨焕雄
(西北大学现代物理所，西安 710069)

摘 要

由共形不变的 WZNW 模型加约束导出了 Sine-Gordon 方程，得到了它的作用量、运动方程、正则等时 Poisson 括号、能动量张量，说明了 Sine-Gordon 方程的非共形不变但完全可积性质，并将加约束的 WZNW 模型联系于非线性 σ 模型。此外还通过约束导出了 $SL(n, R)$ 仿射 Toda 场及 $SL(2, R)$ 共形仿射 Toda 场。

共形场与完全可积系的关系已得到了众多的研究，例如共形场的W代数[1,2]，完全可积系统 Liouville、Toda 方程[3]以及两者间的关系[4]. Zamolodchikov[5] 指出，可以将共形场扰动到临界之外，并且保持其完全可积性。现已知道，完全可积系统 Sine-Gordon 方程[6]及仿射 Toda 方程[7]同临界外共形场有密切的关系。为了进一步理解这一重要的关系，本文将从 WZNW 模型加上约束破坏其共形对称性而导出 Sine-Gordon 和仿射 Toda 方程。

WZNW 模型是最基本的共形不变理论，它同时具有左、右手征的 Kac-Moody 流。通过 GKO 方式[8]，可以构造出左、右 Virasoro 算子，相应的共形场可用 WZNW 模型的规范化实现[9]. 近来发现，可将加约束的 WZNW 模型联系于 Liouville、Toda[10] 或 mKdV、KdV[11,12] 等模型，同时导出 Virasoro 代数。W代数，并且联系于[13]二维引力[14]. 文献 [12] 还采用左手征的约束得到了 WZNW 模型与仿射 Toda 方程的不完全确定的联系。本文首先推广[10]的左右手征同时约束的方法，于 $SU(2)$ 情形得到 Sine-Gordon 方程。然后将约束推广到 $SL(n,R)$ 及仿射 $SL(2,R)$ 的情形，得到仿射 Toda 方程和共形仿射 $sl(2)$ Toda 模型[15]. 文中还讨论了规范化 WZNW 模型与完全可积系的线性化矩阵的关系及与非线性 σ 模型的关系，指出了如何将约束推广到更复杂的李群。

1. 作用量和运动方程

我们引入如下的加约束 WZNW 作用量*

本文 1991 年 1 月 5 日收到。

* 本文对 Minkovski 二维时空采用如下的约定和标记：时空度规 $\eta^{\mu\nu}$，反对称张量 $\varepsilon^{\mu\nu}$ 为 $\eta^{00}=-v^{11}=\varepsilon^{01}=-\varepsilon^{10}=1$，光锥变量 $x_{\pm}\equiv(x_0\pm x_1)/2$，对光锥变量的求导为 $\partial_{\pm}=\partial_0\pm\partial_1$，积分变元在 Minkovski 时空坐标 (x_0,x_1) 下采用 dx，光锥坐标 (x_+,x_-) 下采用 $d\xi$.

$$I(g,A_-,A_+)=S(g)+\kappa\int d^2\xi \operatorname{Tr}\{A_-\partial_+gg^{-1}+g^{-1}\partial_-gA_+ \\ +A_-gA_+g^{-1}-A_-\mu-A_+\nu\}, \tag{1}$$

其中，WZNW 作用量

$$S(g)=\frac{\kappa}{2}\int_{\partial B} d^2x\eta^{\mu\nu}\operatorname{Tr}(\partial_\mu gg^{-1}\partial_\nu gg^{-1}) \\ -\frac{\kappa}{3}\int_B d^3x\varepsilon^{ijk}\operatorname{Tr}(\partial_i gg^{-1}\partial_j gg^{-1}\partial_k gg^{-1}),$$

场 $g(x)$ 取值于群 $SU(2)$ 上．常约束矩阵 $\mu\equiv\frac{i}{2}(m\sigma_++\bar{m}\sigma_-)$, $\nu\equiv\frac{i}{2}(n\sigma_++\bar{n}\sigma_-)$, $\sigma_{\pm,3}$ 为 Pauli 矩阵． Lagrange 乘子函数 A_- 和 A_+ 也均选作只取 $\sigma_{1,2}$ 方向的反厄米矩阵

$$A_\pm(x)=\frac{i}{2}\sum_j A_\pm^j(x)\sigma_j,\ j=(+,-).$$

作用量对 $g(x)$ 作左、右变分，得到下面的"零曲率方程"

$$\partial_-(\partial_+gg^{-1}+gA_+g^{-1})+[A_-,\partial_+gg^{-1}+gA_+g^{-1}]+\partial_+A_-=0, \tag{2}$$

$$\partial_+(g^{-1}\partial_-g+g^{-1}A_-g)-[A_+,g^{-1}\partial_-g+g^{-1}A_-g]+\partial_-A_+=0, \tag{3}$$

这两个方程在以 $g(x)$ 作相似变换时互相等价．对 $A_\pm$ 变分，得到约束方程

$$\operatorname{Tr}\{\sigma_\pm(\partial_+gg^{-1}+gA_+g^{-1}-\mu)\}=0, \tag{4}$$

$$\operatorname{Tr}\{\sigma_\pm(g^{-1}\partial_-g+g^{-1}A_-g-\nu)\}=0. \tag{5}$$

2. Sine-Gordon 方程的实现

在约束面 (4) 上，

$$\partial_+gg^{-1}+gA_+g^{-1}=\frac{i}{2}J_+^3(x)\sigma_3+\mu.$$

式中 $J_+^3(x)$ 为待定函数．上式代入 (2)，在 $\sigma_\pm$ 方向上得到

$$J_+^3(x)=-\frac{i}{2}\partial_+\log(A_-^+/A_-^-),\ 0=\partial_+\log(A_-^+\cdot A_-^-).$$

所以，可选择一对函数 $\lambda_-(x_-)$ 和 $\varphi_+(x)$，将 $A_-^\pm$ 和 J_+^3 表为

$$A_-^+=\overline{A_-^-}=\lambda_-(x_-)e^{i\varphi_+(x)},\ J_+^3=\partial_+\varphi_+(x). \tag{6}$$

同理，由 (5) 式和 (3) 式可得

$$g^{-1}\partial_-g+g^{-1}A_-g=\frac{i}{2}J_-^3(x)\sigma_3+\nu,$$

$$A_+^+=\overline{A_+^-}=\lambda_+(x_+)e^{-i\varphi_-(x)},\ J_-^3=\partial_-\varphi_-(x). \tag{7}$$

由以上 (6)、(7) 式及零曲率方程 (2)、(3) 在同一个 $g(x)$ 下的相似性可得

$$|\lambda_+(x_+)|=|m|,\ |\lambda_-(x_-)|=|n|,$$

$$\arg(m/\lambda_+(x_+))=\arg(\lambda_-(x_-)/n)\equiv\delta(\text{const.}),$$

$$\varphi_+(x)+\delta=\varphi_-(x)+\delta\equiv\varphi(x),$$

$$g(x)=\exp\left(\frac{i}{2}\varphi(x)\sigma_3\right),$$

而两个零曲率方程的 σ_3 分量均给出

$$\partial_+\partial_-\varphi(x)=|m||n|\sin\varphi(x). \tag{8}$$

上面的结果也可以这样得到：将 $g(x)\in SU(2)$ 表为 $e^{ia\sigma_1/2}e^{i\varphi\sigma_3/2}e^{ib\sigma_1/2}$，代入约束方程(4)、(5)，并利用 $A_\pm$ 的对角分量为零的特点，解出 $a=0(\mathrm{mod}\,k\pi)$，$b=0(\mathrm{mod}\,k'\pi)$，最后由零曲率方程(2)或(3)得到(8)。

3. 加约束的 WZNW 模型的规范不变性

在本节中不失一般性地取 $m=n=1$。易证当我们解除了 $A_\pm$ 不在 σ_3 方向取值的限制时，作用量在如下的左-右 $U(1)$ 规范变换下不变(准确到一个全微分项)，

$$\begin{aligned}&g(x)\to\alpha(x_-)g(x)\beta^{-1}(x_+),\\&A_-(x)\to\alpha(x_-)A_-(x)\alpha^{-1}(x_-)+\alpha(x_-)\partial_-\alpha^{-1}(x_-),\\&A_+(x)\to\beta(x_+)A_+(x)\beta^{-1}(x_+)+\partial_+\beta(x_+)\beta^{-1}(x_+),\end{aligned} \tag{9}$$

式中 $\alpha(x_-)=\exp(ia(x_-)\sigma_1)$，$\beta(x_+)=\exp(ib(x_+)\sigma_1)$。这时 Lagrange 乘子而 $A_\pm$ 成为具有三个分量的 $U(1)$ 规范场，其 σ_1 分量好象是一个 $U(1)$ 的联络，而其他两个分量形成一个与 σ_1 方向垂直的协变矢量。在上述规范变换下，零曲率方程(2)和(3)不变，而约束方程(4)、(5)化为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\{(\alpha^{-1}\sigma_j\alpha)(\partial_+gg^{-1}+gA_+g^{-1}-\mu)\}=0,\\&\mathrm{Tr}\{(\beta^{-1}\sigma_j\beta)(g^{-1}\partial_-g+g^{-1}A_-g-\nu)\}=0,\quad j=1,2.\end{aligned} \tag{10}$$

(10)式 $j=1$ 时保持(4)、(5)原来的形式不变，$j=2$ 时规范协变。

总之，作用量(1)中，$g(x)$ 有 3 个自由度，A_-、A_+ 各 2 个自由度，而约束方程共去掉 4 个自由度，再通过固定规范去掉左右各 1 个规范自由度，最后只剩下 1 个自由度。以后称第 2 节中所选的 $A_\pm$ 均为对角外反厄米矩阵的规范为既约规范。

4. Noether 流与规范不变量

在规范变换(9)下，作用量(1)的改变是一个全微分项。因此，欲求相应的守恒流，须令作用量在无穷小规范变换下，在质壳上和在质壳外的改变相等。经过标准的步聚，可得相应于左方负手征 $U(1)(\alpha)$ 变换的 Noether 流及守恒律为

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}^L_+\mathscr{J}^L_--\mathscr{D}^L_-\mathscr{J}^L_+=0,\\&\mathscr{D}^L_\pm=\partial_\pm\pm Q^L(\mathscr{A}^{L(1)}_\mp)^{-1},\quad \mathscr{J}^L_\pm=\mathscr{A}^{L(1)}_\pm,\\&Q^L\equiv(\mathscr{A}^L_+\mathscr{A}^L_-)^{(1)}=-(\mathscr{A}^L_-\mathscr{A}^L_+)^{(1)},\end{aligned} \tag{11}$$

式中 $\mathscr{A}^L_+=-(\partial_+gg^{-1}+gA_+g^{-1})$，$\mathscr{A}^L_-=A_-$，$\mathscr{A}^{(i)}=\mathrm{Tr}(\sigma_i\mathscr{A})$，$i=1,2,3$。类似可得相应于右方正手征 $U(1)(\beta)$ 变换的 Noether 流及守恒律

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}^R_+\mathscr{J}^R_--\mathscr{D}^R_-\mathscr{J}^R_+=0,\\&\mathscr{D}^R_\pm=\partial_\pm\pm Q^R(\mathscr{A}^{R(1)}_\mp)^{-1},\quad \mathscr{J}^R_\pm=\mathscr{A}^{R(1)}_\pm,\\&Q^R\equiv(\mathscr{A}^R_+\mathscr{A}^R_-)^{(1)}=-(\mathscr{A}^R_-\mathscr{A}^R_+)^{(1)},\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\mathscr{A}^R_+=-A_+$，$\mathscr{A}^R_-=g^{-1}\partial_-g+g^{-1}A_-g$。(11)与(12)的第一个方程实际上相当于零曲率方程(2)和(3)的 σ_1 分量，我们纯粹是为了形式上的优美而把它们写成了现在的守恒律形式。

容易证明，Q^L 和 Q^R 是两个规范不变量．因此它们的值可在第2节的既约规范下求得（$m=n=1$）：

$$Q^L=-\frac{i}{4}\partial_+(\cos\varphi(x)),\quad Q^R=-\frac{i}{4}\partial_-(\cos\varphi(x)).$$

可见，Sine-Gordon 场 $\varphi(x)$ 与 WZNW 加约束理论中的规范不变量有直接关系．

5. Hamilton 约化

在既约规范下，作用量(1)可以用 $\varphi(x)$ 表为

$$I(\varphi)=-\frac{\kappa}{4}\int d^2x(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-2\cos\varphi),\tag{13}$$

易见 $\pi_\varphi=-\frac{\kappa}{2}\partial_0\varphi$，正则等时 Poisson 括号为

$$\{\varphi(x),\partial_0\varphi(y)\}_{x_0=y_0}=-\frac{2}{\kappa}\delta(x_1-y_1).\tag{14}$$

Poisson 括号(14)可以从 WZNW 模型经 Hamilton 约化求得． WZNW 模型的 Poisson 括号由它的左、右手征流

$$J_+^{(\mathrm{WZNW})a}=\frac{\kappa}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^a\partial_+gg^{-1}),\quad J_-^{(\mathrm{WZNW})a}=\frac{\kappa}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^a g^{-1}\partial_-g)$$

所满足的 Kac-Moody 型代数来描述：

$$\{J_\pm^{(\mathrm{WZNW})a}(x_\pm),\ J_\pm^{(\mathrm{WZNW})b}(y_\pm)\}_{P.B.}=2i\epsilon^{abc}J_\pm^{(\mathrm{WZNW})c}(y_\pm)+\frac{\kappa}{2}\delta^{ab}\partial_\pm\delta(x_\pm-y_\pm),$$

$$\{J_+^{(\mathrm{WZNW})a}(x_+),\ J_-^{(\mathrm{WZNW})b}(y_+)\}_{P.B.}=0.$$

对于加约束的模型(1)，流 $J_\pm^{(\mathrm{WZNW})}$ 不再是手征函数，并且其1，2分量均被约束为零．剩余的第3分量满足如下的 Poisson 括号

$$\{J_+^{(\mathrm{WZNW})3}(x),\ J_+^{(\mathrm{WZNW})3}(y)\}_{x_-=y_-}=\frac{\kappa}{2}\partial_+\delta(x_+-y_+),$$

$$\{J_-^{(\mathrm{WZNW})3}(x),\ J_-^{(\mathrm{WZNW})3}(y)\}_{x_+=y_+}=\frac{\kappa}{2}\partial_-\delta(x_--y_-),$$

$$\{J_-^{(\mathrm{WZNW})3}(x),\ J_+^{(\mathrm{WZNW})3}\}_{x_0=y_0}=0.$$

在既约规范下，以 $g(x)=\exp\left(\frac{i}{2}\varphi(x)\sigma_3\right)$ 代入，得到

$$\{\partial_+\varphi(x),\ \partial_+\varphi(y)\}_{x_-=y_-}=-\frac{2}{\kappa}\partial_+\delta(x_+-y_+),$$

$$\{\partial_-\varphi(x),\ \partial_-\varphi(y)\}_{x_+=y_+}=-\frac{2}{\kappa}\partial_+\delta(x_--y_-).$$

换到通常的时空坐标系即得 Poisson 括号(14)．

在既约规范下，作用量已不再有 $U_L(1)\times U_R(1)$ 的规范自由度，但还有一个剩余的 z_2 对称性

$$\alpha=\beta=\exp\left(\frac{i}{2}\pi\sigma_1\right),$$

这时 $A_+ \longleftrightarrow A_-$，$g \longleftrightarrow g^{-1}$，即左、右手变量互换，对于 Sine-Gordon 场 $\varphi(x)$ 而言，这 z_2 对称性恰好就是 [6] 中的 $\varphi(x) \to -\varphi(x)$。

6. 能动量张量与共形对称性的破缺

由作用量 (1) 可得如下的能动量张量

$$
\begin{aligned}
T^{\rho\tau} = {} & \kappa \mathrm{Tr}\{\eta^{\rho\sigma}\partial_\sigma g g^{-1}\partial^\tau g g^{-1} + (\eta^{\rho\sigma} - \varepsilon^{\rho\sigma})A_\sigma \partial^\tau g g^{-1} \\
& + (\eta^{\rho\sigma} + \varepsilon^{\rho\sigma}) g A_\sigma g^{-1}\partial^\tau g g^{-1} - \frac{1}{2}\eta^{\rho\tau}\partial_\sigma g g^{-1}\partial^\sigma g g^{-1} \\
& - \eta^{\rho\tau}[(\eta^{\lambda\sigma} + \varepsilon^{\lambda\sigma})(A_\lambda \partial_\sigma g g^{-1} + g^{-1}\partial_\lambda g A_\sigma + A_\lambda g A_\sigma g^{-1}) \\
& - A_0(\mu + \nu) + A_1(\mu - \nu)]\} \\
= {} & T^{\rho\tau}_{\mathrm{WZNW}} + \kappa \mathrm{Tr}\{(\eta^{\rho\sigma} - \varepsilon^{\rho\sigma})A_\sigma \partial^\tau g g^{-1} + (\eta^{\rho\sigma} + \varepsilon^{\rho\sigma}) g A_\sigma g^{-1}\partial^\tau g g^{-1} \\
& - \eta^{\rho\tau}[(\eta^{\lambda\sigma} + \varepsilon^{\lambda\sigma})(A_\lambda \partial_\sigma g g^{-1} + g^{-1}\partial_\lambda g A_\sigma + A_\lambda g A_\sigma g^{-1}) \\
& - A_0(\mu + \nu) + A_1(\mu - \nu)]\}, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

式中 $A_0 \equiv (A_+ + A_-)/2$，$A_1 \equiv (A_+ - A_-)/2$。在既约规范下，(15) 式给出

$$T^{++} \equiv \frac{1}{4}(T^{00} + T^{11} + 2T^{01}) = \frac{\kappa}{4}\mathrm{Tr}(\partial_+ g g^{-1}\partial_+ g g^{-1}), \qquad (16)$$

$$T^{--} \equiv \frac{1}{4}(T^{00} + T^{11} - 2T^{01}) = \frac{\kappa}{4}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_- g g^{-1}\partial_- g), \qquad (17)$$

$$T^{+-} = T^{-+} \equiv \frac{1}{4}(T^{00} - T^{11}) = \frac{1}{2}\kappa \mathrm{Tr}(A_- g A_+ g^{-1}). \qquad (18)$$

利用第 5 节中的流 $J_+^{(\mathrm{WZNW})3}$，可将 (16) 和 (17) 表为

$$T^{++} = \frac{1}{2\kappa} J_+^{(\mathrm{WZNW})3} J_+^{(\mathrm{WZNW})3},$$

$$T^{--} = \frac{1}{2\kappa} J_-^{(\mathrm{WZNW})3} J_-^{(\mathrm{WZNW})3}.$$

注意到这时 $\partial_- J_+^{(\mathrm{WZNW})} \neq 0 \neq \partial_+ J_-^{(\mathrm{WZNW})}$，所以 T^{++} 和 T^{--} 不再是光锥变量的全纯与反全纯函数。利用 $T^\alpha_\alpha = \eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ 得 $T^\alpha_\alpha = T^{+-} = T^{-+} \neq 0$。能动量张量的非零迹来自约束项，它明显破坏了标度不变性。

将第 2 节中得到的关于 g，$A_\pm$ 的解代入 (15) 式，可将能动量张量表示为

$$T^{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi + \frac{\kappa}{4}\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\varphi\partial^\lambda\varphi - \frac{\kappa}{2}\eta^{\mu\nu}\cos\varphi, \qquad (19)$$

它与从作用量 (13) 导出的能动量张量一致。

7. 完全可积系的线性化方程与谱参数

零曲率方程 (2) 和 (3) 可以写为如下的线性化方程的可积条件：

$$\partial_- U_L = -A_- U_L, \quad \partial_+ U_L = (\partial_+ g g^{-1} + g A_+ g^{-1}) U_L, \qquad (20)$$

$$\partial_- U_R = -(g^{-1}\partial_- g + g^{-1}A_- g) U_R, \quad \partial_+ U_R = A_+ U_R. \qquad (21)$$

在既约规范下，令 $m = \frac{1}{n} = \lambda_+ = \frac{1}{\lambda_-} = \lambda$，(20) 和 (21) 化为 Sine-Gordon 方程的线性

化方程组

$$\begin{cases}\partial_- U_L = -\frac{i}{2}\lambda^{-1}(\cos\varphi(x)\sigma_1 - \sin\varphi(x)\sigma_2)U_L, \\ \partial_+ U_L = \frac{i}{2}(\partial_+\varphi(x)\sigma_3 + \lambda\sigma_1)U_L,\end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases}\partial_- U_R = -\frac{i}{2}(\partial_-\varphi(x)\sigma_3 + \lambda^{-1}\sigma_1)U_R, \\ \partial_+ U_R = \frac{i}{2}\lambda(\cos\varphi(x)\sigma_1 + \sin\varphi(x)\sigma_2)U_R,\end{cases} \tag{23}$$

其中,谱参数 λ 由约束矩阵 μ 和 ν 自动地携入。

用线性化方程组 (20) 和 (21) 的解 U_L 及 U_R, 可将作用量 (1) 改写为

$$I(g, U_L, U_R) = S(U_L^{-1}gU_R) - S(U_L^{-1}) - S(U_R) - \kappa\int d^2\xi \operatorname{Tr}(U_L\partial_- U_L^{-1}\mu + \partial_+ U_R U_R^{-1}\nu), \tag{24}$$

既定规范下的规范固定条件为

$$\operatorname{Tr}(\sigma_3 U_L \partial_- U_L^{-1}) = \operatorname{Tr}(\sigma_3 \partial_+ U_R U_R^{-1}) = 0,$$

在质壳上,可证 $U_L^{-1}gU_R = 1$.

8. 非线性 σ 模型[16]

虽然 Sine-Gordon 场 $\varphi(x)$ 不依赖于谱参数 λ, 但是 $U_L(x,\lambda)$ 和 $U_R(x,\lambda)$ 却显含 λ. 定义

$$N(x,\lambda) \equiv U_L^{-1}\sigma_3 U_L = U_R^{-1}\sigma_3 U_R,$$

可证[16]

$$[N, \partial_\mu \partial^\mu N] = 0. \tag{25}$$

非线性 σ 模型 (25) 的解 $N(x,\lambda)$ 随 λ 而变. 利用 N 可以构造各种无穷多守恒流[17], 特别是与 Sine-Gordon 方程的 Backlund 变换相联系的定域守恒流.

9. $SL(n, \mathrm{R})$ WZNW 和仿射 Toda 场

选取

$$\mu = \frac{1}{2}\gamma^{-1}\Lambda, \quad \nu = \frac{1}{2}\gamma\Lambda^T,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

相应地,规范对称群变为以 $\Lambda, \Lambda^2, \cdots, \Lambda^n = 1$ 为生成元的手征子群. 取定规范:

$$A_\pm \in \text{对角外}$$

约束方程可以写为

$$\mathrm{Tr}\{E_\alpha(\partial_+ g g^{-1} + g A_+ g^{-1} - \mu)\} = 0, \tag{27}$$
$$\mathrm{Tr}\{E_\alpha(g^{-1}\partial_- g + g^{-1} A_- g - \nu)\} = 0, \tag{28}$$
$$(\alpha \in \Phi).$$

将 $g \in SL(n, \mathrm{R})$ 作高斯分解，用类似于前面的方法可证：g 是对角矩阵，且

$$g A_+ g^{-1} = \mu, \quad g^{-1} A_- g = \nu.$$

选取下面的场量：

$$g = \begin{bmatrix} e^{\varphi_1/2} & & & 0 \\ & e^{\varphi_2/2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\varphi_n/2} \end{bmatrix}, \tag{29}$$
$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = 0),$$

我们有

$$A_+ = \frac{1}{2}\gamma^{-1}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & e^{(\varphi_n-\varphi_1)/2} \\ e^{(\varphi_1-\varphi_2)/2} & 0 & & \vdots \\ & e^{(\varphi_2-\varphi_3)/2} & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & e^{(\varphi_{n-1}-\varphi_n)/2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$A_- = \frac{1}{2}\gamma\begin{bmatrix} 0 & e^{(\varphi_1-\varphi_2)/2} & & & 0 \\ \vdots & 0 & e^{(\varphi_2-\varphi_3)/2} & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & e^{(\varphi_{n-1}-\varphi_n)/2} \\ e^{(\varphi_n-\varphi_1)/2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$\partial_+ g g^{-1} + g A_+ g^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial_+\varphi_1 & \cdots & \cdots & \gamma^{-1} \\ \gamma^{-1} & \partial_+\varphi_2 & & \vdots \\ & \gamma^{-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & \gamma^{-1} & \partial_+\varphi_n \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$g^{-1}\partial_- g + g^{-1} A_- g = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial_-\varphi_1 & \gamma & & 0 \\ \vdots & \partial_-\varphi_2 & \gamma & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \gamma \\ \gamma & \cdots & \cdots & & \partial_-\varphi_n \end{bmatrix}. \tag{33}$$

这时，零曲率方程 (2) 式或 (3) 式成为仿射 Toda 场的线性化方程的可积条件，它们给出

$$\partial_+\partial_-\varphi_i + \frac{1}{2}\left\{\exp\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2} - \exp\frac{\varphi_{i-1} - \varphi_i}{2}\right\} = 0,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = 0, \tag{34}$$
$$\varphi_{n+1} = \varphi_1, \quad \varphi_0 = \varphi_n.$$

从 $SL(n, \mathrm{R})$ WZNW 模型约束为仿射 Toda 模型后，还有一个剩余的 Z_n 对称

性,即仿射 Toda 场方程(34)式在变换 $\varphi_i \to \varphi_{i+1}$ 下不变.

上述结果可推广到典型李群 A_n, B_n, C_n, D_n 与例外李群 G_2, F_4, E_6, E_7 和 E_8,只是剩余对称性 Z_n 中的指数会有不同的缺失或重复.

10. Loop $sl(z, \mathrm{R})$、仿射 $sl(z, \mathrm{R})$ 和共形仿射 Toda 场

如将约束改为

$$\mu = \sigma_+ + \lambda\sigma_-,$$
$$\nu = \sigma_- + \lambda^{-1}\sigma_+,$$

则仿上法得到 Sinh-Gordon 方程. 这时也可以将谱参数 λ 的引入解释为扩充到了 A_+、A_- 属于 Loop $sl(z, \mathrm{R})$ 还可进一步扩充到仿射 $sl(z, \mathrm{R})$,为此引进

$$\mu = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_0}, \tag{35}$$
$$\nu = E_{-\alpha_1} + E_{-\alpha_0}, \tag{36}$$

式中 α_1、α_0 为仿射 $sl(z, \mathrm{R})$ 的二素根,E_{α_1}、E_{α_0} 为对应的升算子.

仿前,由约束方程及零曲率方程知,可选取规范使得 g 为对角矩阵:

$$g = \exp\Phi,$$
$$\Phi = \frac{1}{2}\varphi H + \eta d + \frac{1}{2}\xi c, \tag{37}$$

式中 H、d、c 为仿射 $sl(z, \mathrm{R})$ 子代数的生成元. 在该规范中,

$$A_+ = e^{ad\Phi}\mu, \tag{38}$$
$$\nu = e^{-ad\Phi}\nu, \tag{39}$$

且零曲率条件写成了如下的共形仿射 $sl(z, \mathrm{R})$ Toda 场方程[15]

$$\partial_+\partial_-\varphi = e^{2\varphi} - e^{2\eta-2\varphi}, \tag{40}$$
$$\partial_+\partial_-\eta = 0, \tag{41}$$
$$\partial_+\partial_-\xi = e^{2\eta-2\varphi}. \tag{42}$$

本文由 WZNW 作用量加约束,经变分,得到了零曲率方程与约束方程. 零曲率方程正是文献[15]的出发点. [15]中的作用量也可由约束 WZNW 作用量约化得到. 此外易见,左右 Monodromy 矩阵之比 $(U_L U_R^{-1})$ 正是 WZNW 方程的解 $g(x)$.

注意到(37)式中 Φ 含有 d、c,故不仅 $A_\pm$ 的取值范围扩充到了仿射 $sl(z, \mathrm{R})$ 实际上 g 的取值范围也已经扩充到了仿射 $sl(z, \mathrm{R})$ 中,但是零曲率条件及约束方程中 $\partial_+ g g^{-1} + g A_+ g^{-1}$、$A_-$ 及 A_+、$g^{-1}\partial_- g + g^{-1}A_- g$ 取值仅限于其 Cartan 子代数及二素根相应的升降算子上.

因为 η 是自由场,故 $\eta = \eta_+(x_+) + \eta_-(x_-)$. 利用 $e^{\partial_\pm \eta d}$ 对零曲率条件作相似变换,得:

$$g^{-1}\partial_- g + g^{-1}A_- g \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial_-\varphi & -\lambda^{-1}e^{\eta_-} \\ -1 & -\partial_-\varphi \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$A_+ \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & e^{-\varphi} \\ \lambda e^{\eta_+}\cdot e^{\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$A_{-}\longrightarrow-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \lambda^{-1}e^{\eta_-}\cdot e^{\varphi}\\ e^{-\varphi} & 0\end{bmatrix},\tag{45}$$

$$\partial_{+}gg^{-1}+gA_{+}g^{-1}\longrightarrow\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\partial_{+}\varphi & 1\\ \lambda e^{\eta_+} & -\partial_{+}\varphi\end{bmatrix},\tag{46}$$

含 λ、λ^{-1} 的项对应于 E_{d_0}。如取 $c=0$，则仿射 $sl(z,\mathrm{R})$ 代数退化为 Loop $sl(z,\mathrm{R})$、即带谱的普通 $sl(z,\mathrm{R})$ 代数，相容条件 $\partial_{+}\partial_{-}\varphi=e^{\eta/2}\sinh\varphi$ 可用共形变换 $x_{+}\longrightarrow\eta_{+}(x_{+})$，$x_{-}\longrightarrow\eta_{-}(x_{-})$ 化为通常的 Sinh-Gordon 方程。

本文通过 WZNW 模型加约束的方式实现了完全可积系统。这样就可以利用熟知的 WZNW 模型及其约化情况的量子化方法将完全可积系量子化，从而研究它们与量子共形场及其临界外扰动的关系；还可以利用 WZNW 模型与 Chern-Simans 理论的联系将二维可积系统三维化，从而研究可因式化矩阵的 Yang-Baxter 行为。与本文内容平行的超对称情形也是一个有趣的问题。

本文的手稿完成时，我们看到了文献[18]。该文含有和本文部分内容相似的内容，但本文是从一个左右对称的规范化 WZNW 作用量出发的，约束由规范诱导而产生，这与[18]处理约束的方式是不同的。

作者感谢 J. Balog, L. Fehér, L. O' Raifeartaigh, P. Forgács, A. Wipf 以及 O. Babelon 和 L. Bonora。他们寄来的文献[10]和[15]吸引了作者在这一领域的兴趣；赵柳和杨焕雄还对杨仲侠的许多有益的讨论表示感谢。

参　考　文　献

[1] A. B. Zamolodchikov, *Theore. Math. Phys.*, **63**(1985), 1205. V. A. Fatteev and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B280**(1987), 644.

[2] V. A. Fatteev and S. L. Luk'yanov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A3**(1988), 507.

[3] A. N. Leznov and M. V. Saveliev, *Lett. Math. Phys.*, **3**(1979), 489.

[4] A. Bilal and J.-L Gervais, *Phys. Lett.*, **206B** (1988), 412. *Nucl. Phys.*, **B314**(1989) 646. *Nucl. Phys.*, **B318**(1989), 579.

[5] A. B. Zamolodchikov, *Int. J Mod. Phys.*, **A4**(1989), 4235.

[6] T. Eguchi and S. K. Yang, *Phys. Lett.*, **224B**(1989), 373. 235B, 282 (1990).

[7] H. W. Braden, E. Corrigan, P. E. Dorey and R. Sasaki, *Nucl. Phys.* **B318**, 689(1990).

[8] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, *Phys. Lett.*, **152B**(1985), 88.

[9] G. Moore and N. Seiberg, *Phys. Lett.*, **220B**(1989), 422.

[10] J. Balog, L. Feher, P. Forgacs, O'Raifertaigh and A. Wipf, *Phys. Lett.*, **227B**(1989), 214. Dublin/Zurich preprint DIAS-STP-89-31, DIAS-STP-90-2.

[11] M. Bershadsky and H. Ooguri, *Commun. Math. Phys.*, **126**(1989), 49.

[12] Q. -H. Park, *Nucl. Phys.*, **B333**(1990), 267.

[13] A. Alekseev and S. Shatashvili, *Nucl. Phys.*, **B323**(1989), 719.

[14] A. M. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A2**(1987), 893.
V. G. Kniznik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(1988), 819.

[15] O. Babelon and L. Bonora, *Phys. Lett.*, **244B**(1990), 220.

[16] Hou Bo-yu, Hou Bo-yuan and Wang Pei, in the book 'Gauge theory, group theory and completely integrable systems', p. 362, ed. by Hou Bo-yu, Northwest University Press (1985).

[17] Hou Bo-yu, *J. Math. Phys.*, **25**(1984), 2325.

[18] H Aratyn, L. A. Ferreira, J F. Gomes and A. H. Zimerman, IFT/P-24/90.

Affine Toda Fields as Restriced WZNW Model

HOU BOYU ZHAO LIU YANG HUINXIONG

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian* 710069)

ABSTRACT

The Sine-Gordon equation is derived from the conformally invariant WZNW model by imposing constraints. The action, equation of motion, canonical equal-time Poisson braket and energy-momentum tensor of S.G.E. are obtained, and the absence of conformal invariance and the complete integrability of S.G.E. are explained. The restricted WZNW model is related to the nonlinear sigma model. In addition, the $SL(n, R)$ affine Toda fields and the $SL(2, R)$ conformal affine Toda fields are also derived from the restricted WZNW model.