

(p,2p)准弹性敲出反应的多重散射展开*

陈学俊** 郑良友

(清华大学物理系,北京市 100084)(西安交通大学物理系,西安市 710049)

摘 要

为了能更精确地描述(p,2p)这一类准弹性敲出反应,本文发展了一种多重散射展开方法。基于时间无关的多重散射理论, T 矩阵元被展开成多重散射级数的形式, $T_{fi} = T_M^{(1)} + T_M^{(2)} + \dots$ 。已经证明,第一项 $T_M^{(1)}$ 的作用几乎等于前三级Born展开的总和,因而,只取多重散射级数的头一项,就有相当高的精确度,而 $T_M^{(2)}$ 的计算比较简单。将现在这种方法应用于纯库仑力的情况(例如氢原子的(e,2e)以及 ${}^6\text{Li}(p,2p){}^4\text{He}$),得到相当令人满意的结果。

一、引 言

在研究原子核结构时,中能的(p,2p)准弹性敲出反应起重大的作用。通过这样的研究,人们能相当直接地从实验结果得到原子核内某个核子的动量分布。这些研究有力地支持了核的壳模型结构理论^[1]。(p,2p)在原子和分子物理中有一个对应物,这就是(e,2e)。时至今日,(e,2e)已发展成为一个专门课题,称为电子动量谱学,它在原子和分子结构的研究中起重大的作用^[2,3]。这些事实说明,无论是在原子核物理中,还是在原子和分子物理中,准弹性敲出反应的研究都是相当有价值的。目前这样的研究仍在持续进展中,实验和理论都在向更精细的水平前进。

在理论上,(p,2p)涉及两方面的问题:一是碰撞动力学的,二是原子核结构学的。在碰撞动力学方面,已经发展了多种方法,例如:

1) Born 展开方法。 T 矩阵元可表成 Born 级数的形式,

$$T_{fi} = T_B^{(1)} + T_B^{(2)} + T_B^{(3)} + \dots \quad (1.1)$$

下标 B 强调(1.1)是 Born 级数,上标代表各项的级别。目前,人们有能力计算前二项,第三项和更高的项因为过于复杂很难计算。

2) 平面波冲量近似(PWIA)和扭曲波冲量近似(DWIA)。DWIA的精确度比PWIA高,但即使是DWIA,其精确度也只大体上相当于 $T_B^{(1)} + T_B^{(2)}$ 的水准。

3) 扭曲波 Born 近似(DWBA)。DWBA的精确度也大体上相当于 $T_B^{(1)} + T_B^{(2)}$ 的

本文1990年11月18日收到。

* 国家自然科学基金,清华大学研究生院,理学院和计算中心基金资助。

** 中国高等科学技术中心(世界实验室)。

水准。

在目前,上述各个方法能描写 (p, 2p) 的主要特征,但在细节上(例如截面的绝对值和谱形等方面),理论和实验还有差距。另外,所有这些方法,都没有特别考虑两个出射质子的空间关联。除上述方法外,目前尚未看到有更高水准的方法提出。

作者之一在研究氢原子的(e, 2e)准弹性敲出反应时提出过一种多重散射展开方法^[4],这个方法具有精确度高,计算较为简单等优点。本文的目的在于将这个方法推广应用于 (p, 2p) 准弹性敲出反应。

二、理 论

1. 准三体近似

一般而言, (p, 2p) 是多体问题。不过在壳模型近似下, (p, 2p) 可简化为准三体问题,如图 1 所示,其中 P 代表入射质子, p' 代表靶中被敲出的质子, C 是靶核的实心, O_c 是靶的质心, O_{pp'} 是入射质子与靶的质心,即整个体系的质心, O_{pp'} 是入射质子和敲出质子的质心。在准三体近似下,靶的其它核子的作用仅仅表现在对入射质子和敲出质子提供一个平均场。

2. 哈密顿算符、T 矩阵元和三重微分截面

在准三体近似下, (p, 2p) 的特性由下面的哈密顿算符决定,

$$H = H_0 + V, \quad (2.1)$$

其中 H₀ 是入射质子, 敲出质子和实心的动能算符之和。它有三种等价的形式:

$$H_0 = -\frac{1}{2\mu}\nabla_r^2 - \frac{1}{2\nu}\nabla_{\vec{k}}^2, \quad (2.2a)$$

$$= -\frac{1}{2\nu}\nabla_{r_t}^2 - \frac{1}{2\mu}\nabla_{\vec{k}_p}^2, \quad (2.2b)$$

$$= -\frac{1}{2\nu_p}\nabla_{r_p}^2 - \frac{1}{2\mu}\nabla_{\vec{k}_t}^2, \quad (2.2c)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{M_p(M_p + M_c)}{M_c + 2M_p}, \\ \nu &= \frac{M_p M_c}{M_c + M_p}, \quad \nu_p = \frac{1}{2}M_p. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

M_p 和 M_c 分别是质子和实心 C 的质量。

$$V = V_1(\vec{r}_t) + V_1(\vec{R}) + V_2(\vec{r}_p). \quad (2.4)$$

V₁(\vec{r}_t), V₁(\vec{R}) 和 V₂(\vec{r}_p) 分别是敲出质子与实心, 入射质子与实心, 入射质子与敲出质子

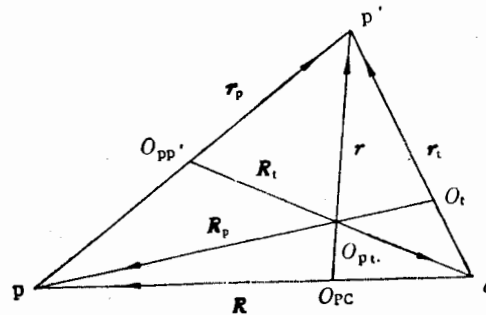


图 1 (p, 2p) 反应的坐标关系

的相互作用。

用 $\Psi_i^{(0)}$ 和 $\Psi_f^{(0)}$ 分别代表反应前后的系统状态,它们是 H_i 的本征态,即

$$H_i \Psi_\alpha^{(0)} = E_\alpha \Psi_\alpha^{(0)}, (\alpha = i, f) \quad (2.5)$$

其中

$$H_i = -\frac{1}{2\mu} \nabla_{\mathbf{k}_p}^2 - \frac{1}{2\nu} \nabla_{\mathbf{k}_t}^2 + V_1(\mathbf{r}_t). \quad (2.6)$$

从 $\Psi_i^{(0)}$ 到 $\Psi_f^{(0)}$ 的 T 矩阵元由一般的量子散射理论给出,

$$T_{fi} = \langle \Psi_f^{(-)} | V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle, \quad (2.7)$$

其中

$$V_i = V_1(\mathbf{R}) + V_2(\mathbf{r}_p). \quad (2.8)$$

$\Psi_f^{(-)}$ 是系统的完全波函数,也就是 H 的本征态,而且满足入射球面波的渐近条件,它由 Lippmann-Schwinger 方程决定,

$$\langle \Psi_f^{(-)} | = \langle \Psi_f^{(0)} | + \langle \Psi_f^{(-)} | V_i G_0^{(+)} |, \quad (2.9)$$

其中

$$G_0^{(\pm)} = [E_i - H_i \pm i\epsilon]^{-1}. \quad (2.10)$$

(p, 2p) 的三重微分截面为:

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_p d\Omega_{p'} dE_{p'}} = C \frac{k_p k_{p'}}{k_i} |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f), \quad (2.11)$$

系数 C 与所采用的单位制和具体的实验几何条件有关。 k_i, k_p 和 $k_{p'}$ 分别是入射质子, 散射质子和敲出质子的波数。 δ 函数反映能量守恒。

对(2.9)作迭代求解,并代入(2.7),就得到 T 矩阵元的 Born 级数展开形式:

$$T_{fi} = T_B^{(1)} + T_B^{(2)} + T_B^{(3)} + \dots \quad (2.12)$$

其中

$$T_B^{(1)} = \langle \Psi_f^{(0)} | V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle, \quad (2.13)$$

$$T_B^{(2)} = \langle \Psi_f^{(0)} | V_i G_0^{(+)} V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle, \quad (2.14)$$

$$T_B^{(3)} = \langle \Psi_f^{(0)} | V_i G_0^{(+)} V_i G_0^{(+)} V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle. \quad (2.15)$$

为了便于后面的比较,把 $T_B^{(3)}$ 折成两部分:

$$T_B^{(3)} = T_B^{(3)a} + T_B^{(3)b}, \quad (2.16)$$

其中,

$$T_B^{(3)a} = \langle \Psi_f^{(0)} | V_i (G_0^{(+)} V_1 G_0^{(+)} V_1 + G_0^{(+)} V_2 G_0^{(+)} V_2) | \Psi_i^{(0)} \rangle, \quad (2.17)$$

$$T_B^{(3)b} = \langle \Psi_f^{(0)} | V_i (G_0^{(+)} V_1 G_0^{(+)} V_2 + G_0^{(+)} V_2 G_0^{(+)} V_1) | \Psi_i^{(0)} \rangle. \quad (2.18)$$

如果知道 H_i 的本征函数集 $\{\phi_n\}$, $G_0^{(+)}$ 可表示为:

$$G_0^{(+)} = \sum_n \frac{|\phi_n\rangle \langle \phi_n|}{E_i - E_n + i\epsilon}. \quad (2.19)$$

利用(2.19)可具体写出 $T_B^{(N)}$ 的表达式,例如

$$\begin{aligned} T_B^{(3)} &= \sum_n \sum_{n'} \langle \Psi_f^{(0)} | V_i | \phi_n \rangle \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} \langle \phi_n | V_i | \phi_{n'} \rangle \\ &\times \frac{1}{E_i - E_{n'} + i\epsilon} \langle \phi_{n'} | V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

由此看出,为了实际计算二级以上的 Born 项,首先必须求出 H_i 的本征函数集,然后还要完成大量的多重积分以及对中间态的无限项求和。对于三级和三级以上的 Born 项,实际计算是很难进行的。DWIA 和 DWBA 的优越性就在于,它们不包含对中间态的求和,而它们的精确度又大体上相当于 $T_B^{(1)} + T_B^{(2)}$ 的水平。

3. 多重散射级数展开

首先定义两个扭曲波:

$$\langle \Psi_1^{(-)} | = \langle \Psi_f^{(0)} | + \langle \Psi_1^{(-)} | V_1 G_0^{(+)}, \quad (2.21)$$

$$\langle \Psi_2^{(-)} | = \langle \Psi_f^{(0)} | + \langle \Psi_2^{(-)} | V_2 G_0^{(+)}, \quad (2.22)$$

于是完全波函数可表示为:

$$\langle \Psi_f^{(-)} | = \langle \Psi_1^{(-)} | + \langle \Psi_f^{(-)} | V_2 G_1^{(+)} \quad (2.23)$$

$$= \langle \Psi_2^{(-)} | + \langle \Psi_f^{(-)} | V_1 G_2^{(+)}, \quad (2.24)$$

其中,

$$G_i^{(\pm)} = [E_i - H_i - V_i \pm i\epsilon]^{-1} \quad (2.25)$$

$$G_i^{(\pm)} = [E_i - H_i - V_i \pm i\epsilon]^{-1}. \quad (2.26)$$

在 (p, 2p) 反应中,终态的三个粒子或它们中的任意两个都不形成束缚态,即 $\Psi_f^{(0)}$ 是完全的连续态, $\Psi_f^{(0)}$ 的倒数是存在的。因而(2.23)可改写成

$$\langle \Psi_f^{(-)} | = \langle [\Psi_f^{(0)}]^{-1} \Psi_1^{(-)} \Psi_f^{(0)} | + \langle \Psi_f^{(-)} | V_2 G_1^{(+)}, \quad (2.27)$$

由(2.22)得

$$\langle \Psi_f^{(0)} | = \langle \Psi_2^{(-)} | - \langle \Psi_2^{(-)} | V_2 G_0^{(+)}, \quad (2.28)$$

由(2.24)得

$$\langle \Psi_2^{(-)} | = \langle \Psi_f^{(-)} | - \langle \Psi_f^{(-)} | V_1 G_2^{(+)}. \quad (2.29)$$

(2.29)代入(2.28)的第二项,得到

$$\langle \Psi_f^{(0)} | = \langle \Psi_2^{(-)} | - \langle \Psi_f^{(-)} | V_2 G_0^{(+)} + \langle \Psi_f^{(-)} | V_1 G_2^{(+)} V_2 G_0^{(+)}. \quad (2.30)$$

由定义知,

$$G_2^{(+)} V_2 G_0^{(+)} = G_2^{(+)} - G_0^{(+)}, \quad (2.31)$$

因而(2.30)变为

$$\langle \Psi_f^{(0)} | = \langle \Psi_2^{(-)} | - \langle \Psi_f^{(-)} | V_1 G_0^{(+)} + \langle \Psi_f^{(-)} | V_1 G_2^{(+)}. \quad (2.32)$$

(2.32)代入(2.27)得

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f^{(-)} | &= \langle [\Psi_f^{(0)}]^{-1} \Psi_1^{(-)} \Psi_2^{(-)} | + \langle \Psi_f^{(-)} | V_2 G_1^{(+)} \\ &+ \langle [\Psi_f^{(0)}]^{-1} \Psi_1^{(-)} \Psi_f^{(-)} | (V_1 G_2^{(+)} - V_1 G_0^{(+)}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

利用迭代法,从(2.9),(2.23)和(2.24)三式中的任意一式出发,都可以得到 $\langle \Psi_f^{(-)} |$ 的级数形式,然后再代入(2.33),就得到完全波函数的级数形式。例如从(2.9)出发得到:

$$\langle \Psi_f^{(-)} | = \langle \Psi_{M1}^{(-)} | + \langle \Psi_{M2}^{(-)} | + \cdots, \quad (2.34)$$

其中

$$\langle \Psi_{M1}^{(-)} | = \langle [\Psi_f^{(0)}]^{-1} \Psi_1^{(-)} \Psi_2^{(-)} |, \quad (2.35)$$

$$\langle \Psi_{M2}^{(-)} | = \langle \Psi_f^{(0)} | V_2 G_1^{(+)} + \langle \Psi_1^{(-)} | (V_1 G_2^{(+)} - V_1 G_0^{(+)}). \quad (2.36)$$

(2.34)代入(2.7),得到 T_{fi} 的多重散射级数:

$$T_{fi} = T_M^{(1)} + T_M^{(2)} + \dots \quad (2.37)$$

其中

$$T_M^{(1)} = \langle \Psi_M^{(-)} | V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle, \quad (2.38)$$

$$T_M^{(2)} = \langle \Psi_M^{(-)} | V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle, \quad (2.39)$$

下标 M 强调(2.37)是多重散射级数。

4. Born 级数和多重散射级数的比较

采用迭代法,从(2.21)和(2.22)出发,容易证明:

$$T_M^{(1)} = T_B^{(1)} + T_B^{(2)} + (T_B^{(3)a} + \tilde{T}_B^{(3)b}) + \dots \quad (2.40)$$

其中 $T_B^{(1)}, T_B^{(2)}$ 和 $T_B^{(3)a}$ 已由(2.13), (2.14)和(2.17)规定, $\tilde{T}_B^{(3)b}$ 则为:

$$\tilde{T}_B^{(3)b} = \langle \Psi_3 | V_i | \Psi_i^{(0)} \rangle, \quad (2.41)$$

其中

$$\langle \Psi_3 | = \langle ([\Psi_i^{(0)}]^{-1}) \rangle \langle \Psi_i^{(0)} | V_1 G_0^{(+)} \rangle \langle \Psi_i^{(0)} | V_2 G_0^{(+)} \rangle. \quad (2.42)$$

(2.40)表明,多重散射级数的第一项几乎等价于 Born 级数的前三项的总和。又从(2.38)看到, $T_M^{(1)}$ 的表达式中不包含任何格林函数,问题归结到解两个扭曲波方程(2.21)和(2.22),因而计算相对简单得多。

三、应用举例

1. 纯库仑力的情况

作为一个说明性的例子,让我们考虑处于基态的氢原子的 $(e, 2e)$ 反应。对此情况,本文所述方法已经得到了和实验数据相当符合的结果^[5]。说明本方法的确具有精确度高,计算较为简单等优点^[6]。

2. $(p, 2p)$ 微分截面

$(p, 2p)$ 反应比 $(e, 2e)$ 反应复杂得多,表现在两方面:一是坐标关系复杂;二是核力的形式复杂,扭曲波方程(2.21)和(2.22)没有严格的解析解,只能作数值解。下面对实际计算作一些原则性的讨论,详细的描述可在文[9]中找到。

作第一级多重散射计算的中心环节是如何精确地求解两个扭曲波方程(2.21)和(2.22)。这两个方程的等价微分方程为:

$$[H_i + V_1(\vec{R})] \Psi_1^{(-)} = E_i \Psi_1^{(-)}, \quad (3.1)$$

$$[H_i + V_2(\vec{r}_p)] \Psi_2^{(-)} = E_i \Psi_2^{(-)}, \quad (3.2)$$

以及相应的边界条件。 $\Psi_1^{(-)}$ 和 $\Psi_2^{(-)}$ 都是两个三维坐标的函数,而且一般而言不能分离坐标,因而比较复杂。不过 Jackson 等指出^[7],如果忽略耦合项,则(3.1)和(3.2)是可以分离变量的,它们均变成单粒子方程。对这样的单粒子方程,可作严格求解,至少可以严格地作数值求解。而耦合项的大小为 $\frac{1}{A}$ 的数量级 (A 为靶核的核子数),这一项引起的修正相当于壳模型的质心效应修正,通常比较小。在现有的 DWBA 和 DWIA 的计算中,

都忽略这样的耦合项。因此在相当准确的程度上, (2.21) 和 (2.22) 定义的两个扭曲波可以实际地求得, 其复杂程度相当于光学模型的计算。在此基础上, 可以组合出第一级多重散射波函数 $\Psi_{\text{int}}^{(1)}$, 进而得到三重微分截面。为了说明问题, 下面列举一个数值结果。考虑这样的 (p, 2p) 反应: ${}^6\text{Li}(p, 2p){}^4\text{He}$ 。该反应已被 Jain 等人详细研究过^[8], 他们所用的方法是 DWIA, 结果如图 2 中的虚线所示。图中的实线是按本文的理论所得的结果。在这里简要地叙述一下我们的实际计算, 详细的描述见文[9]。

首先, 敲出质子的原来状态是 $1P_{3/2}$ 态, 其波函数由 Saxon-Woods 势给出, 具体参数和 Jain 等人的完全相同^[8]。这是数值求解单粒子束缚态方程的问题。径向波函数以数值形式表达。

其次, 入射质子和敲出质子与原子核实的相互作用, 采用定域光学势^[8], 为了便于比较, 所有参数的选取均与 Jain 等人的相同^[8]。利用光学模型计算程序, 得到以分波形式表达的扭曲波波函数, 径向部分以数值形式表达。

再次, 质子之间的相互作用采用简化的 Hamada-Johnston 势^[10], 即只保留中心势和自旋-轨道耦合势, 而忽略了对现在的问题并不重要的张量力等, 所有参数均同于文[10]。用光学模型程序可求出相应的扭曲波。不过此时的空间变量是两个质子的相对坐标, 即两粒子坐标发生交叉。为了分离两粒子坐标, 可采用傅立叶变换, 两粒子坐标很容易分开, 付出的代价是多了一重积分。

如上所述, 本文遇到的计算可归结为: 解单粒子束缚态和散射态, 以及完成三重积分问题(两个质子的径向变量, 以及傅立叶变换带来的动量径向变量), 并完成对分波的求和。

现在来比较 Jain 等人的和本文的结果。从图 2 可知, 在角分布的形状上, 本文结果比 Jain 等人的好得多。值得一提的是, 我们没有引入新的参数, 所有参数的取值均同于 Jain 等人, 改进的主要原因是两个质子之间的关联已被认真考虑。

四、结 论

初步的工作表明, 本文所扩展的用于描述 (p, 2p) 准弹性敲出反应的多重散射展开方法可能是一个好的方法。它具有精确度高, 计算相对地简单等优点。预计这一方法在量子碰撞问题中还会有其它的应用, 例如其它直接反应等。

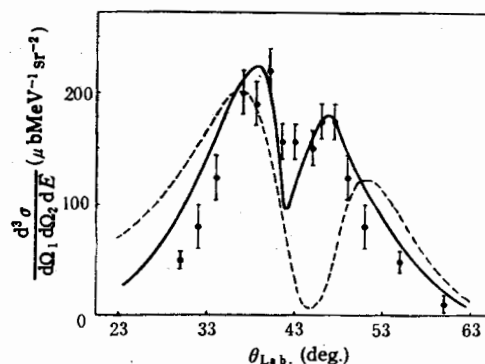


图 2 ${}^6\text{Li}(p, 2p){}^4\text{He}$ 反应的重三重微分截面
入射质子能量为 185 MeV, 敲出质子原来状态为
 $1p$ 态, 实验数据取自 Tibell^[11] 等人

参 考 文 献

- [1] D. F. Jackson, Direct Cluster Reactions. Progress Towards a Unified Theory., in Clustering Phenomena in Nuclei, ed. by K. Wildermuth and P. Kramer, 1983.
- [2] I. E. McCarthy and E. Weigold, *Rep. Prog. Phys.*, **51**(1988), 299.
- [3] 陈学俊,核物理动态, **7**(1990),27.
- [4] X. J. Chen (陈学俊), *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 1795.
- [5] 陈学俊 郑良友,(e,2e)的多重散射展开方法,物理学报, **40**(1991), 1595.
- [6] 陈学俊,原子的电子碰撞电离截面的高精度计算,计算物理,待发表.
- [7] D.F. Jackson et al., *Nucl. Phys.*, **62**(1965), 353.
- [8] B. K. Jain and D. F. Jackson, *Nucl. Phys.*, **A99**(1967), 113.
- [9] 陈学俊等,(p,2p)核反应截面的高精度计算,计算物理,待发表.
- [10] 胡济民,原子核理论,第二卷,第70页,原子能出版社,(1987).
- [11] G. Tibell et al., *Ark. Fys.*, **25**(1963), 433.

Multiple-Scattering Expansion for Quasi-Elastic Knockout Reaction (p, 2p)

Chen Xuejun

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Zheng Liangyou

(Department of Physics, Xi'an Jiao-Tong University, Xi'an 710049)

ABSTRACT

In order to describe the quasi-elastic knockout reactions such as (p,2p) by a method with higher accuracy, the multiple-scattering proposed by the previous work has been developed in this paper based on the time-independent multiple-scattering theory. In particular, T matrix element is expanded as a series form of multiple-scattering terms, $T_{ji} = T_M^{(1)} + T_M^{(2)} + \dots$. It is proved that $T_M^{(1)}$ is almost equivalent to the total effects of the first three orders of the Born series. It means that one can only keep the first term, $T_M^{(1)}$ and obtain good results. On the other hand, the calculations of $T_M^{(1)}$ is simple relatively. As an example, excellent results have been produced by the present method for the pure Coulomb interaction, such as the (e,2e) reactions of atomic hydrogen, and ${}^6\text{Li}(p,2p) {}^5\text{He}$ reactions.