第16卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 16, No. 2
1992年2月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1992

介子超精细质量劈裂的统一描述

罗振飞　　邱锡钧
（中国科学院上海原子核研究所，201800）

摘　　要

利用能量依赖的夸克-反夸克间自旋-自旋作用势建立了介子超精细质量劈裂公式。数据分析表明该公式能统一描述基态和激发态、同位旋为零及非零介子的超精细质量劈裂。

最近，一些作者[1-5]利用从 Bethe-Salpeter 方程作 C^{-2} 展开得到两粒子自旋-自旋作用势[6]在非相对论微扰理论中尝试解释基态介子的超精细质量劈裂（以下简称为 HS）。然而，由于所采用的自旋-自旋作用势是能量无关的，他们所得到的公式不能描述激发态 $L=0$ 介子的 HS。而且，对一些同位旋为零介子的 HS，例如 $c\bar{c}$ 和 $s\bar{s}$ 介子，他们的公式也不能给出合理的描述。

Song[7]在他的公式中唯象地引入了能量因子（$E=\bar{M}=[M(^1s_0)+3M(^3s_1)]/4$）并赖以合理地描述了激发态介子的 HS 数据。由于虚胶子交换对 HS 的贡献很小[8]，Song 指出对同位旋为零及非零的介子，其 HS 并不存在实质性的区别，因而这些介子的 HS 应该可以利用同一公式进行统一的描述。事实上，Song 的计算结果比较合理地预言了大部分 $L=0$ 介子的 HS 数据。但是，在他的公式中，能量因子的引入是唯象的。

在本文中，我们从两粒子 Dirac 方程出发，按 E^{-1} 展开在一级近似下得到了能量依赖的夸克-反夸克间自旋-自旋作用势，并进而建立了新的介子 HS 公式。由于 $E=(p^2c^2+m^2c^4)^{1/2}$，因此按 E^{-1} 展开比通常按 C^{-2} 展开所得到的结果更合理。数据分析表明所建立的 HS 公式能统一地描述基态和激发态、同位旋为零和非零介子的 HS 数据。最后，我们对结果作了简单的讨论。

两粒子 Dirac 方程可写为

$$[c\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{p}_1+\beta_1m_1c^2+c\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{p}_2+\beta_2m_2c^2+U]\psi=E\psi, \tag{1}$$

其中

$$U=\beta_1\beta_2V_S(r)+(\beta\gamma_\mu)_1(\beta\gamma_\mu)_2V_v(r) \tag{2}$$

是夸克-反夸克间的 Lorentz 标量和矢量相互作用，$\boldsymbol{\alpha},\beta,\gamma$ 是通常的 Dirac 矩阵，m_1 和 m_2 分别是夸克和反夸克的质量。

将方程(1)按 E^{-1} 展开的方法与按 C^{-2} 展开的方法[9]类似。由于中间的代数运算较繁，我们将这部分内容放在附录中。所得到的自旋-自旋作用势（附录中的（A.16）和

本文于1991年4月25日收到。

(A.9)式)为

$$V_\sigma=\frac{4E\hbar^2c^2}{3[E+m_1c^2+m_2c^2][E^2-(m_1-m_2)^2c^4]}\nabla^2V_v-\frac{2V_v^2}{E+m_1c^2+m_2c^2}. \tag{3}$$

若 $E\approx m_1c^2+m_2c^2$，则上式变为

$$V_\sigma^0=\frac{\hbar^2}{6m_1m_2c^2}\nabla^2V_v-\frac{V_v^2}{m_1c^2+m_2c^2}. \tag{4}$$

由于介子的 HS 主要来自夸克-反夸克短程作用的贡献，因此上式第二项是次要的，在实际计算中常常被略去。上式第一项即是通常用来计算基态介子 HS 的自旋-自旋作用势[1-5]。

在本文中，我们采用能量依赖的自旋-自旋作用势((3)式中的第一项)。因实验观测的大部分 $L=0$ 介子的 HS 数值比其自旋平均值要小得多，故微扰计算对大部分 $L=0$ 介子是合适的。介子 HS 通过下式计算

$$\Delta M=M(^3s_1)-M(^1s_0)=\langle\phi|V_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)|\phi\rangle, \tag{5}$$

式中 $|\phi\rangle$ 是未计及粒子自旋时的波函数。

夸克-反夸克相互作用 V_v 主要是夸克间单胶子交换的贡献，即

$$V_v=-\frac{4\alpha_s/3}{r}, \tag{6}$$

其中[1]，

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)} \tag{7}$$

是跑动耦合常数，Λ 是 QCD 标度参数，$Q=4\mu=4m_1m_2/(m_1+m_2)$，n_f 取值为 5 (对 $b\bar{b}$ 介子)，4 (对 $c\bar{c}$ 和 $c\bar{b}$ 介子)或 3 (对其它介子)。

利用 $\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$，从(3)和(5)式可得

$$\Delta M=\frac{256\pi E}{9(E+m_1+m_2)[E^2-(m_1-m_2)^2]}\cdot\alpha_s\cdot|\phi(0)|^2, \tag{8}$$

式中 $|\phi(0)|^2\propto\mu^{1.52}$[1]，这里我们采用了 $\hbar=c=1$ 单位制。记 $E=\overline{M}$，我们得到介子 HS 公式

$$\Delta M=\frac{a\overline{M}}{(\overline{M}+m_1+m_2)[\overline{M}^2-(m_1-m_2)^2]}\alpha_s\mu^{1.52}, \tag{9}$$

其中符合参数 a 和 QCD 标度参数 Λ 通过符合 $q\bar{s}$ 和 $q\bar{c}$ 介子的 HS 来确定 (q = u 或 d)，得到的数值为 $\Lambda=207\text{MeV}$，$a=3.1214\times10^5\text{MeV}^{1.48}$。

利用(9)式，我们计算了基态和激发态、同位旋为零和非零介子的 HS 值，其结果与实验数据以及 Song 计算的 HS 值一起列于表 1。对夸克质量，我们采用 Crater 和 Van Alstine 在单参数成功地描述了所有矢量介子谱时的数值[10]，

$$(m_q,m_s,m_c,m_b)=(298,454,1600,4938)\text{MeV}. \tag{10}$$

从表 1 可以看出，公式(9)准确预言了大部分 $L=0$ 介子的 HS 数据。对 ρ-π 和 ω-η_u 质量劈裂，理论预言与实验数据的偏离主要是因为 ρ-π 和 ω-η_u 的劈裂值大于它

表1 介子HS理论预言及与实验数据的比较*

HS	实验数据	理论预言	
		公式(9)	文献[7]
$q\bar{q}:\rho-\pi$	628.7	563.1	539.6
$q\bar{q}:\omega-\eta_u$	643	546.5	533.1
$q\bar{q}:\rho'-\pi'$	150	146.0	214.7
$q\bar{s}:K^*-K$	398.2	398.1	370.4
$q\bar{c}:D^*-D$	142.6	142.6	143.0
$q\bar{b}:B^*-B$	52	53.7	52.8
$s\bar{s}:\varphi-\eta_s$	300	320.8	298.2
$s\bar{c}:D_s^*-D_s$	141.5	142.4	139.1
$c\bar{c}:J/\psi-\eta_c$	117.3	115.6	115.2
$\bar{c}c:\psi'-\eta_c$	92	88.5	96.5
$b\bar{b}:\Upsilon-\eta_b$		51.9	55.0

* 实验值取自文献[13]，η_u,η_s 介子的质量取自文献[7]的分析。

们各自的自旋平均值，因而微扰计算是不合适的。其次，在组份夸克模型中，π 介子质量的计算往往需要特别的处理[11]。

从上面的数值分析，我们看到公式(9)可以给出比 Song 的唯象公式对实验数据较好的符合，对同位旋为零和非零，基态和激发态介子的 HS，公式(9)能给出统一的描述。另外，我们所取的 QCD 标度参数 Λ 的值为 207MeV，这与 Crater 和 Van Alstiae 利用基于 Dirac 约束力学推导的相对论 2 体方程计算介子质量谱时选取的 Λ 值一致(对 Adler-Piran 势)[12]。

附 录

类似于文献[9]的推导，我们将 2 体波函数 ϕ 表示成一个 2×2 矩阵

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi^{++} & \phi^{+-}\\ \phi^{-+} & \phi^{--}\end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

从原始方程(1)可得

$$\begin{cases}(V_1-E+m_1c^2+m_2c^2)\phi^{++}-cd_2\phi^{+-}+cd_1\phi^{-+}+V_2\phi^{--}=0,\\ -cd_2\phi^{++}+(V_3-E+m_1c^2-m_2c^2)\phi^{+-}+V_2\phi^{-+}+cd_1\phi^{--}=0,\\ cd_1\phi^{++}+V_2\phi^{+-}+(V_3-E-m_1c^2+m_2c^2)\phi^{-+}-cd_2\phi^{--}=0,\\ V_2\phi^{++}+cd_1\phi^{+-}-cd_2\phi^{-+}+(V_1-E-m_1c^2-m_2c^2)\phi^{--}=0.\end{cases} \tag{A.2}$$

这里我们采用了质心坐标系，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2$，且 $d_1=\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{p}$，$d_2=\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{p}$。式中 $V_i(i=1,2,3)$ 定义为

$$\begin{cases}V_1=V_s+V_v,\\ V_2=-V_v(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2),\\ V_3=-V_s+V_v.\end{cases} \tag{A.3}$$

从方程组 (A.2) 直接消去 ϕ^{+-},ϕ^{-+} 分量得

$$(E-m_1c^2-m_2c^2-V_1)\phi^{++}=V_2\phi^{--}$$
$$+\frac{c^2}{2}\left[(d_1+d_2)\frac{E-V_2-V_3}{K_r}-(d_1-d_2)\frac{(m_1-m_2)c^2}{K_r}\right](d_1+d_2)(\phi^{++}-\phi^{--})$$

$$-\frac{c^2}{2}\left[(d_1+d_2)\frac{(m_1-m_2)c^2}{K_r}-(d_1-d_2)\frac{E+V_2-V_3}{K_r}\right](d_1-d_2)(\phi^{++}+\phi^{--}), \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}(E+m_1c^2+m_2c^2-V_1)\phi^{--} &= V_2\phi^{++}\\ &-\frac{c^2}{2}\left[(d_1+d_2)\frac{E-V_2-V_3}{K_r}+(d_2-d_2)\frac{(m_1-m_2)c^2}{K_r}\right](d_1+d_2)(\phi^{++}-\phi^{--})\\ &+\frac{c^2}{2}\left[(d_1+d_2)\frac{(m_1-m_2)c^2}{K_r}+(d_1-d_2)\frac{E+V_2-V_3}{K_r}\right](d_1-d_2)(\phi^{++}+\phi^{--}).\end{aligned} \tag{A.5}$$

这里 $K_r=(E+V_2-V_3)(E-V_2-V_3)-(m_1-m_2)^2c^4$.

由于在非相对论近似下，ψ 中 ϕ^{++} 分量对应于体系波函数，其它分量趋于零. 因此，我们只要找到关于 ϕ^{++} 的方程即可.

将方程 (A.5) 按 E^{-1} 展开并保留到一级项，我们有

$$\phi^{--}=\frac{1}{E+m_1c^2+m_2c^2}\left[V_2-\frac{2Ec^2}{E^2-(m_1-m_2)^2c^4}d_1d_2\right]\phi^{++}. \tag{A.6}$$

同样将 (A.4) 展开并利用上式，我们得到关于 ϕ^{++} 的方程

$$E\phi^{++}=\left[m_1c^2+m_2c^2+\frac{2Ec^2}{K_1}p^2+\frac{4E^2c^4}{K_1^2K_4}p^4+V_1+\frac{V_2^2}{K_4}+W\right]\phi^{++}, \tag{A.7}$$

这里

$$\begin{aligned}W=&-\frac{2Ec^2}{K_1K_4}(V_2d_1d_2+d_1d_2V_2)-\frac{c^2}{K_1}(d_1V_2d_2+d_2V_2d_1)\\ &+\frac{c^2}{K_2}d_1V_3V_1+\frac{c^2}{K_3}d_2V_3d_2,\end{aligned} \tag{A.8}$$

$K_i(i=1,2,3)$ 定义为

$$\begin{cases}K_1=E^2-(m_1-m_2)^2c^4,\\ K_2=[E+(m_1-m_2)c^2]^2,\\ K_3=[E-(m_1-m_2)c^2]^2,\\ K_4=E+m_1c^2+m_2c^2.\end{cases} \tag{A.9}$$

由波函数归一化条件 $T_r\langle\psi|\psi\rangle=1$，即

$$\left\langle\phi^{++}\left|\left(1+\frac{c^2}{K_2}p^2+\frac{c^2}{K_3}p^2\right)\right|\phi^{++}\right\rangle=1, \tag{A.10}$$

记把 ϕ^{++} 归一化后的波函数为 ϕ，且略去 p^4 项，我们从 (A.7) 式得到

$$E\phi=\left[\frac{2Ec^2}{K_1}p^2+m_1c^2+m_2c^2+V_{\text{eff}}\right]\phi, \tag{A.11}$$

其中

$$V_{\text{eff}}=V_1+\frac{V_2^2}{K_4}+\frac{c^2}{K_5}(p^2V_1-V_1p^2)+W \tag{A.12}$$

且

$$K_5=\frac{[E^2-(m_1-m_2)^2c^4]^2}{E^2+(m_1-m_2)^2c^4}. \tag{A.13}$$

为将 V_{eff} 表示成自旋-自旋，自旋-轨道，张量作用等项的标准形式，我们利用文献[9]附录中的公式. 通过直接的代数运算，V_{eff} 最后写成

$$V_{\text{eff}}=V_c+V_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)+V_TS_{12}+V_{LS}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S})+V_{LS}^e+V_\Delta\nabla^2+V_\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\nabla), \tag{A.14}$$

其中自旋-轨道和张量算子分别定义为

$$\begin{cases}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S})=\frac{1}{2i}(\boldsymbol{r}\times\nabla)\cdot(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2),\\ S_{12}=\frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^2}-(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2),\end{cases} \tag{A.15}$$

各作用项前的系数是

$$
\begin{cases}
V_c = (V_S + V_v) - \dfrac{\hbar^2c^2}{K_5}\nabla^2 V_S - \hbar^2c^2\left(\dfrac{1}{K_5} + \dfrac{2E}{K_1K_4}\right)\nabla^2 V_v + \dfrac{3V_v^2}{K_4}, \\
V_\sigma = -\dfrac{2V_v^2}{K_4} + \dfrac{4E\hbar^2c^2}{3K_1K_4}\nabla^2 V_v, \\
V_T = -\dfrac{2E\hbar^2c^2}{3K_1K_4}V_v'' + \dfrac{\hbar^2c^2}{K_1}\left(1 - \dfrac{4E}{3K_4}\right)\dfrac{V_v'}{r}, \\
V_{LS} = \dfrac{4\hbar^2c^2}{K_1}\ \dfrac{V_v'}{r}, \\
V_{LS}^a = -\dfrac{2\hbar^2c^2}{r}(V_S' - V_v')\dfrac{1}{2i}(\boldsymbol{r}\times\nabla)\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{\sigma}_1}{K_2} + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_2}{K_3}\right), \\
V_\Delta = \dfrac{2\hbar^2c^2}{K_5}V_S - 2\hbar^2c^2\left(\dfrac{1}{K_1} + \dfrac{2E}{K_1K_4} + \dfrac{1}{K_5}\right)V_v, \\
V_\nabla = -2\hbar^2c^2\left(\dfrac{1}{K_1} + \dfrac{2E}{K_1K_4} + \dfrac{2}{K_v}\right)\dfrac{V_v'}{r},
\end{cases}
\tag{A.16}
$$

其中符号′表示对 r 求导.

参 考 文 献

[1] K. Igi and S. Ono, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 232.
[2] M. Frank and P. J. O'Donnell, *Z. Phys.*, **C34**(1987), 39.
[3] S. Chakrabarty and S. Deoghuria, *J. Phys.*, **G16**(1990), 185.
[4] M. Frank and P. J. O'Donnell, *Phys. Lett.*, **159B**(1985), 174.
[5] D. B. Lichtenberg, *Phys. Lett.*, **193B**(1987), 95.
[6] D. Gromes, *Nucl. Phys.*, **B131**(1977), 80;
S. Jacobs, M. G. Olsson and C. J. Suchyta, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 2448.
[7] Xiaotong Song, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 3655.
[8] W. Buchmüller, Y. J. Ng and S. H. H. Tye, *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 3003.
[9] S. Sato, *Nuovo Cimento*, **103A**(1990), 471.
[10] H. W. Crater and P. Van Alstine, *Phys. Lett.*, **100B**(1981), 166.
[11] R. W. Childers, *Phys. Lett.*, **121B**(1983), 485.
H. W. Crater and P. Van Alstine, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 1527.
[12] H. W. Crater and P. Van Alstine, *Phys. Rev.*, **D37**(1988), 1982.
[13] Particle Data Group, *Phys. Lett.*, **239B**(1988), 1; *Phys. Lett.*, **239B**(1990), 1.

A Unified Description for Hyperfine Mass Splitting of Mesons

Luo Zhenfei Qiu Xijun

(Shanghai Institute of Nuclear Research, Academia Sinica, 201800)

Abstract

A new formula for the hyperfine mass splitting of mesons is established by using energy-dependent spin-spin potential between quark and antiquark. Data analysis indicates that this formula is capable of describing hyperfine mass splitting of mesons in ground-state or excited-state with isospin zero or nonzero.